Analyse B (Basterrechea S., Khukhro A., Maatouk G.) Mise à Niveau, EPFL

Série 01: Suites, voisinages de l'infini

Ex-01-01: Soit $A \subset \mathbb{N}$. Vrai ou faux ?

a) Si A contient un voisinage de l'infini, alors A contient une infinité d'éléments.

b) Si A contient un voisinage de l'infini, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $A = \{k \in \mathbb{N} : k \geq n_0\}$.

c) Si A contient un voisinage de l'infini, alors $\mathbb{N} \setminus A$ est un ensemble fini.

d) Si A contient un voisinage de l'infini, alors tout sous-ensemble de A contient aussi un voisinage de l'infini.

e) Si A contient une infinité d'éléments, alors A contient un voisinage de l'infini.

f) Si A contient une infinité d'éléments mais ne contient aucun voisinage de l'infini, alors il existe $B \subset \mathbb{N}$, contenant une infinité d'éléments, tel que $A \cap B = \emptyset$.

Ex-01-02: Parmi les sous-ensembles de $\mathbb{N}$ ci-dessous, déterminer ceux qui contiennent un voisinage de l'infini. (Lorsque c'est le cas, donner explicitement un voisinage.)

a) $A = \{n \in \mathbb{N} : n^2 - 2n \geq 50\}$

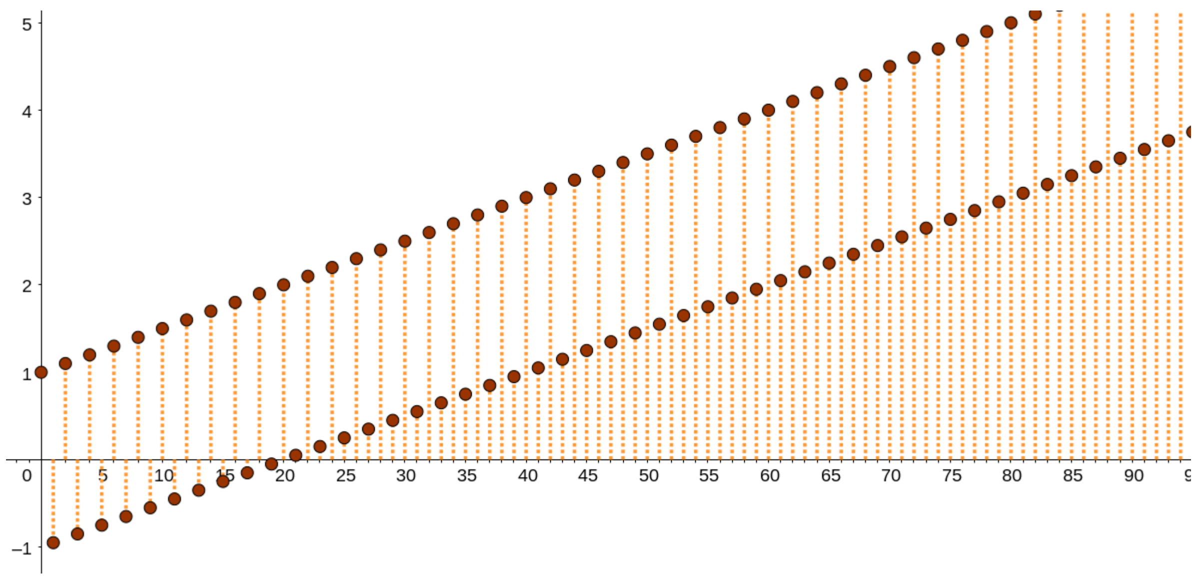
b) $B = \{n \in \mathbb{N} : \sin(n) > 0\}$

c) $C = \{n \in \mathbb{N} : \frac{n}{n+1} \leq \frac{999}{1000}\}$

d) $D = \{n \in \mathbb{N} : \frac{n}{n+1} \geq \frac{999}{1000}\}$

Ex-01-03: (Cet exercice est un exercice de sensibilisation, il ne s'agit pas de donner les réponses les plus précises possibles.)

Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ la suite dont la représentation graphique est la suivante :



Pour cette suite, donner

a) l'ensemble $A = \{n : x_n < 0\}$.

b) l'ensemble $B = \{n : x_n \geq 1\}$.

c) l'ensemble $C = \{n : x_n > x_{n+1}\}$.

d) un entier N tel que $x_n > 2$ pour tout $n \geq N$.

Ex-01-04: Donner, s'il y en a, un ou plusieurs exemples explicites (c'est-à-dire : on définira explicitement chaque terme) de suites $(a_n)_{n\geq 1}$ possédant les propriétés suivantes.

a) Possédant une infinité de termes plus grands que 3, et une infinité de termes plus petits que 2.
b) Majorée, pas minorée, pas monotone.
c) Tendant vers $+\infty$, avec une infinité de termes strictement négatifs.
d) Tendant vers $+\infty$, pas monotone.

Ex-01-05:

a) Montrer que $a_n = 3n - 7$, $n \geq 1$, est minorée mais pas majorée.
b) Montrer que $b_n = \dfrac{n+2}{n+1}$, $n \geq 1$, est minorée et majorée.
c) Montrer que $c_n = \dfrac{\sqrt{7n^2+1}+3n}{2n+5}$, $n \geq 1$, est minorée et majorée.

Ex-01-06: On considère la suite (a_n) définie par son terme général

$$a_n = \frac{n+3}{n^2+1} + \frac{n+4}{n^2+2} + \cdots + \frac{2n+2}{n^2+n}\,, \qquad n \geq 1\,.$$

Montrer que cette suite est majorée en exhibant un majorant. *Indication :* Compter le nombre de termes dans la somme qui définit a_n, puis trouver un majorant commun pour chacun de ces termes.

Ex-01-07: Montrer, à l'aide de la définition, que

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(3n-7) = +\infty$
b) $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2-10n) = +\infty$.

Ex-01-08:

a) Soit $q \in \mathbb{R}\,,\ q > 1\,,$ montrer à l'aide de la définition que $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty\,.$
b) En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\,3^n - 2^n\,\right] = +\infty$.

Ex-01-09: Montrer que la suite $a_n = \dfrac{n!}{2^n}$ tend vers l'infini. Indication : Utiliser le théorème du “chien méchant”.

Ex-01-10: (**Facultatif**) Montrer que si une suite (a_n) est croissante et non majorée, alors elle tend vers $+\infty$.

Ex-01-11: (**Facultatif**) Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite pour laquelle il existe un réel C tel que l'ensemble $\{n \geq 1 \,:\, |a_n| \leq C\}$ contient un voisinage de l'infini. Montrer que $(a_n)_{n\geq 1}$ est bornée (en exhibant explicitement un majorant et un minorant).

Réponses:

Ex-01-01: Les affirmations vraies sont a), c), f).
Ex-01-02: Les sous-ensembles contenant un voisinage de l'infini sont A et D.