1. VRAI ou FAUX ?

   Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Si f possède un extremum local en $x_0 \in \,]a, b[$ alors $f'(x_0) = 0$.

2. VRAI ou FAUX ?

   Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Les maxima globaux de f se trouvent forcément parmi les maxima locaux de f.

Réponses:

(1) FAUX

(2) VRAI

1. VRAI ou FAUX ?

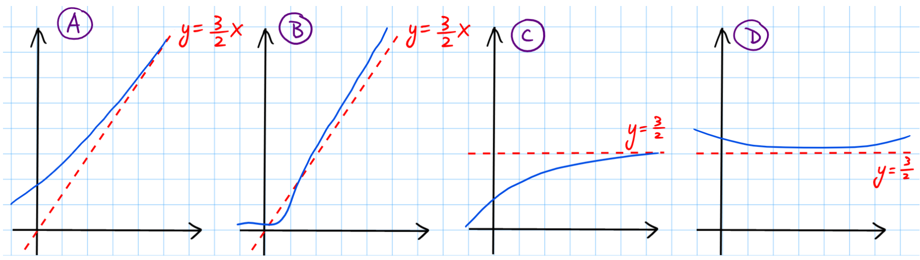
   Lors d'une étude d'une fonction f, on étudie

   - f' pour trouver les extrema locaux et les points remarquables,
   - les limites de f aux frontières du domaine pour trouver les branches infinies.

2. Étant donné que

   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{3}{2}, \quad \lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - \frac{3}{2}x\right] = +\infty,$$

   lequel des graphes suivants pourrait être le graphe de f ?



Réponses:

(1) VRAI

(2) B

1. Soit $M(t) = (x(t), y(t))$ une courbe paramétrée. Si $x(t)$ et $y(t)$ sont paires, que peut-on déduire ?

   (A) Le tracé de la courbe est symétrique par rapport à l'axe Ox.

   (B) Le tracé de la courbe est symétrique par rapport à l'axe Oy.

   (C) Le tracé de la courbe est symétrique par rapport à la droite $y = x$.

   (D) Le tracé de la courbe pour $t \leq 0$ est le même que celui pour $t \geq 0$.

   (E) On ne peut rien déduire.

2. VRAI ou FAUX ?

   Soit $M(t) = (x(t), y(t))$ une courbe paramétrée dont le tracé pour $t \in [0, 1]$ est le segment de droite entre $M(0) = (0, 0)$ et $M(1) = (0, 2)$.
   Alors en $t = \frac{1}{2}$, on a $M\left(\frac{1}{2}\right) = (0, 1)$.

Réponses:

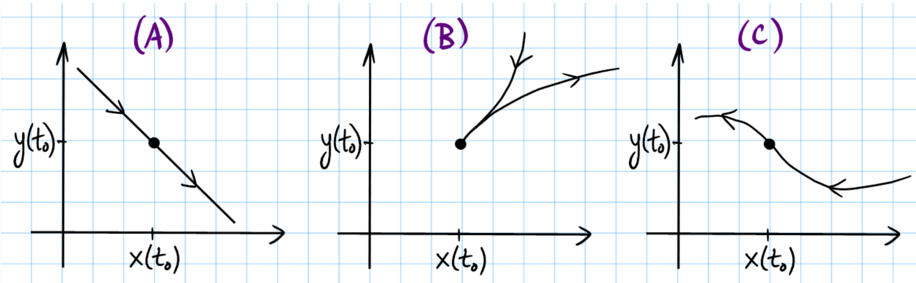
(1) D

(2) FAUX

1. VRAI ou FAUX ?

   Une courbe définie pour $\mathbb{R}\backslash\{t_0\}$ est telle que $\lim\limits_{t \to t_0^-} x(t) = 1$ et $\lim\limits_{t \to t_0^-} y(t) = -\infty$. Alors la courbe possède une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

2. Laquelle des courbes suivantes définies pour $t \in \mathbb{R}$ **ne pourrait pas** satisfaire $\dot{x}(t_0) = 0$, $\dot{y}(t_0) = 0$ et $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = -1$?



Réponses:

(1) VRAI

(2) B

1. VRAI ou FAUX ?

   Soit f une fonction continue et strictement croissante sur $[a, b]$.

   Alors sa fonction aire
   $$A(x) = \int_a^x f(t)\ dt$$
   est strictement croissante sur $[a, b]$.

2. La fonction $h(x) = g'(x) \cdot f'(g(x))$ est la dérivée de quelle fonction ?

   (A) $g(f(x))$ (B) $f(g(x))$ (C) $g(x) \cdot g(x)$ (D) $g(x) \cdot f(g(x))$

Réponses:

(1) FAUX

(2) B

1. VRAI ou FAUX ?

   Soit $f(x) = 1$ définie sur $D = [0, 1] \cup [2, 3]$. L'intégrale indéfinie $\displaystyle\int f(x)\ dx$ pour $x \in D$ est donnée par $\{x + C \mid C \in \mathbb{R}\}$.

2. VRAI ou FAUX ?

   $\cosh : \mathbb{R} \to [1, +\infty[$ est bijective.

3. VRAI ou FAUX ?

   $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Réponses:

(1) FAUX

(2) FAUX

(3) VRAI

1. Choisir le changement de variable utile pour l'intégrale

$$\int \sqrt{x^2+2x+3}\, dx.$$

(A) $x = \sqrt{2}\sin(t) - 1$

(B) $t = \dfrac{\sin(x)+1}{\sqrt{2}}$

(C) $x = \sqrt{2}\cosh(t) + 1$

(D) $x = \sqrt{2}\sinh(t) - 1$

2. VRAI ou FAUX ?

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme, $a \neq 0$. Alors $P(x)$ peut être écrit dans la forme $P(x) = \alpha\left((\beta x + \gamma)^2 + 1\right)$ si et seulement si le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

Réponses:

(1) D

(2) VRAI

1. La décomposition en éléments simples de $\dfrac{x^5+1}{(x-2)^2(x^2+3)}$ est de la forme

   (A) $\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{(x-2)^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+3}$

   (B) $S(x)+\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{Bx+C}{(x-2)^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+3}$

   (C) $S(x)+\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{(x-2)^2}+\dfrac{C}{x^2+3}$

   (D) $S(x)+\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{(x-2)^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+3}$

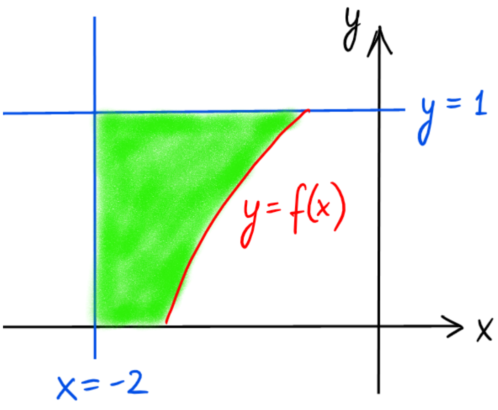
2. Une piscine est construite en forme du domaine borné limité par la courbe $y=\sin(x)$, les droites $x=0$, $x=\dfrac{3\pi}{2}$ et l'axe Ox.

   VRAI ou FAUX: L'aire de la piscine vaut 1.

Réponses:

(1) D

(2) FAUX



Soit $f(x)$ bijective. L'aire du domaine en vert ci-dessus est donnée par

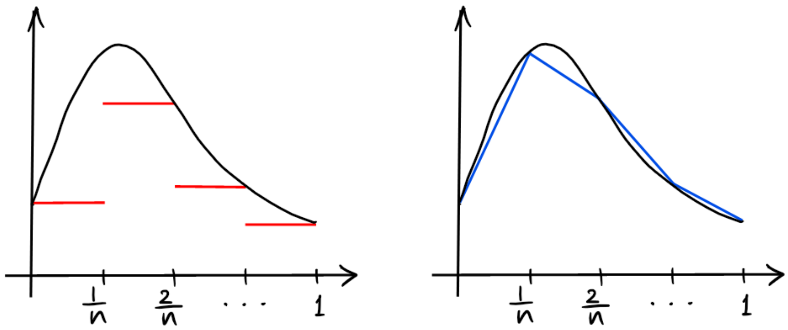
(A) $\displaystyle\int_{-2}^{0} [1 - f(x)] \; dx$

(B) $\displaystyle\int_{0}^{1} \left[-2 - f^{-1}(y)\right] \; dy$

(C) $\displaystyle\int_{0}^{1} \left[f^{-1}(y) + 2\right] \; dy$

(D) $\displaystyle\int_{0}^{1} -f^{-1}(y) \; dy$

Réponse: C



Étant donné une courbe (en noir ci-dessus), on approxime sa longueur de deux manières ci-dessus, en prenant la somme des longueurs des segments rouges et la somme des longueurs des segments bleus. Quelle approximation est mieux, lorsque $n \to +\infty$?

Réponse: l'approximation en bleu.