

Trigonométrie hyperbolique

Définitions :

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

$$\cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

Parité :

Les fonctions \sinh et \tanh sont impaires, \cosh est paire.

Formules d'addition :

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y,$$

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y,$$

$$\tanh(x + y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}.$$

Formules de bisection :

$$\sinh^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cosh x - 1}{2}, \quad \cosh^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cosh x + 1}{2},$$

$$\tanh\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cosh x - 1}{\sinh x} = \frac{\sinh x}{\cosh x + 1}.$$

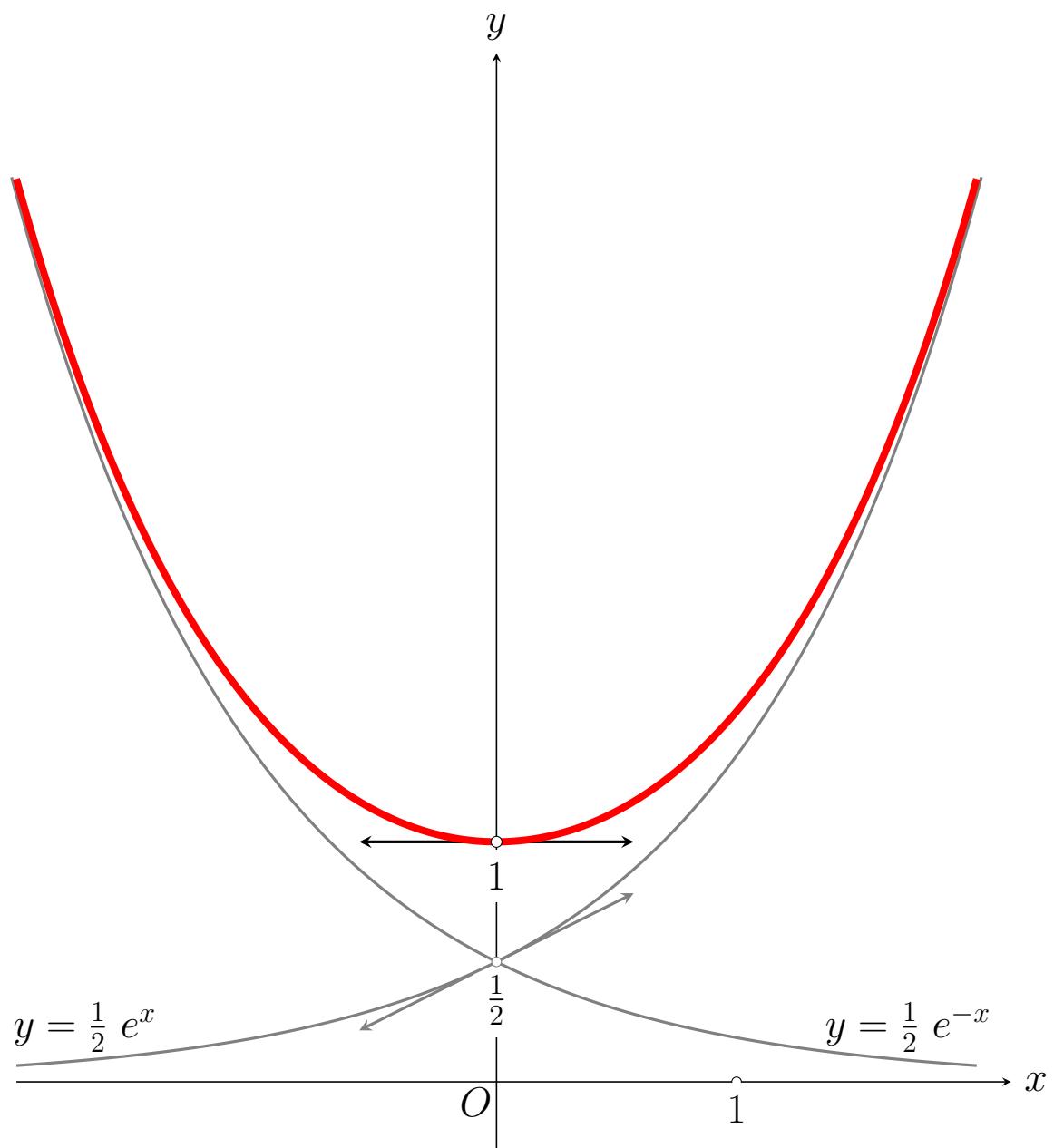
Dérivées :

$$\sinh' x = \cosh x, \quad \cosh' x = \sinh x,$$

$$\tanh' x = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x.$$

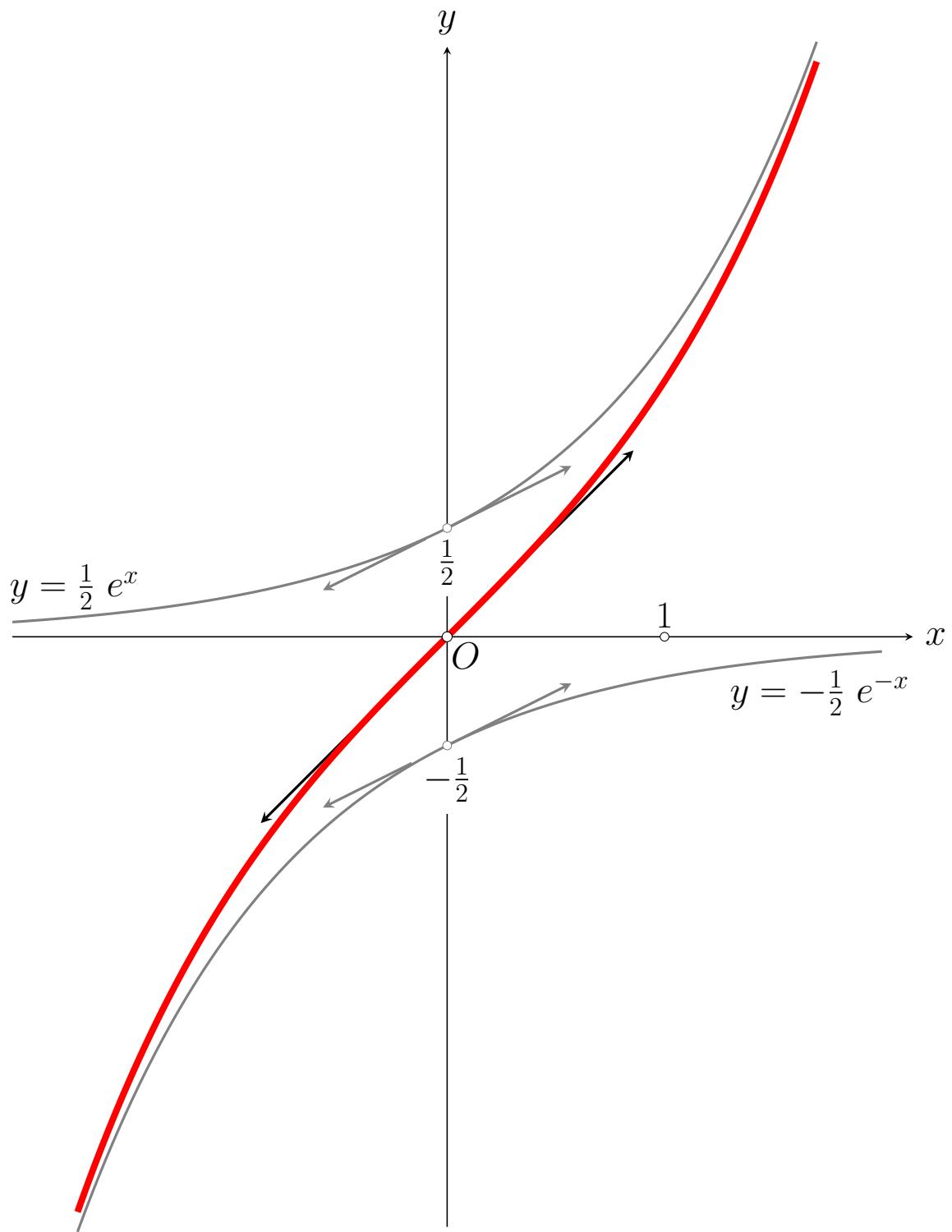
Cosinus hyperbolique

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

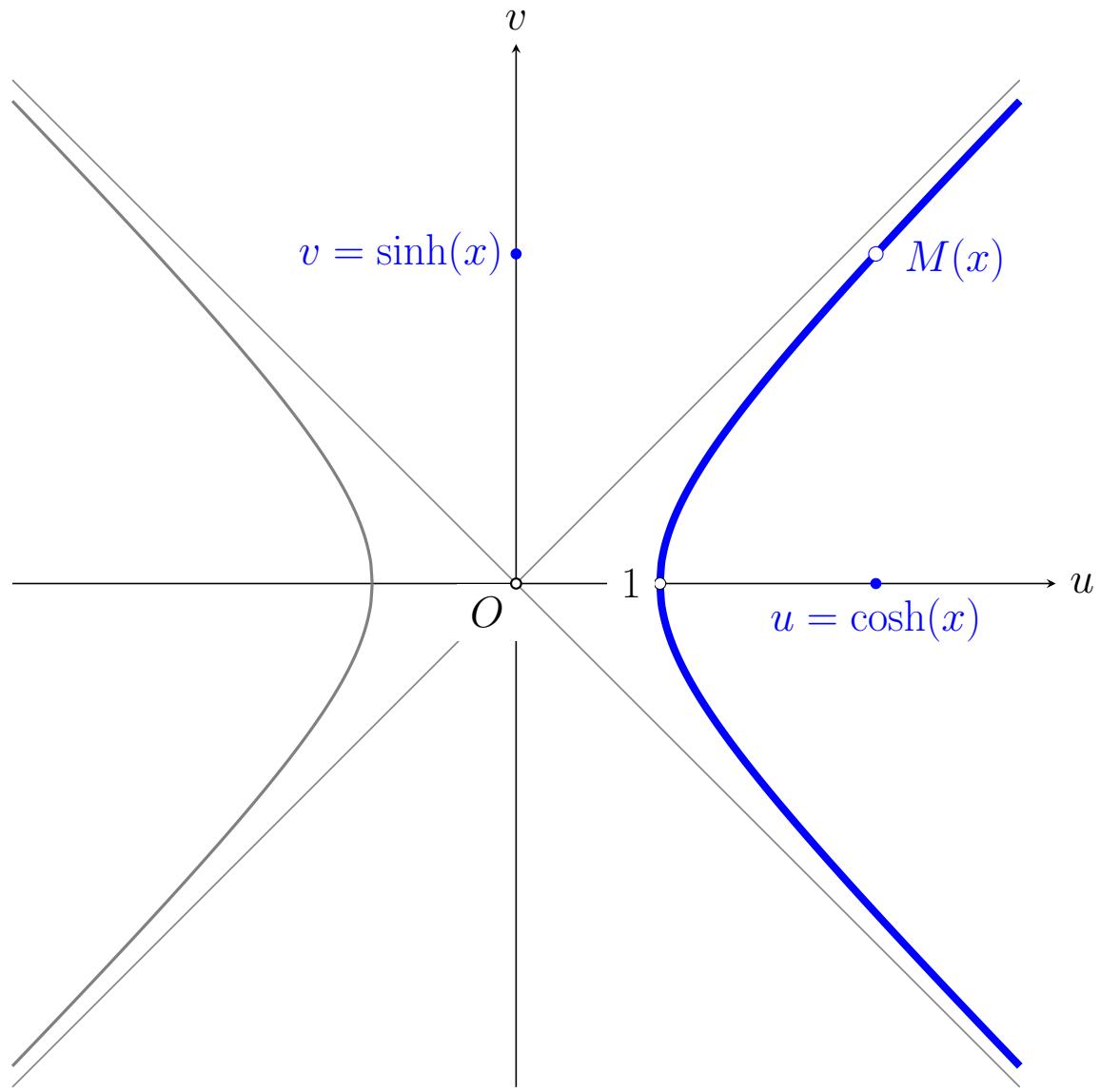


Sinus hyperbolique

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

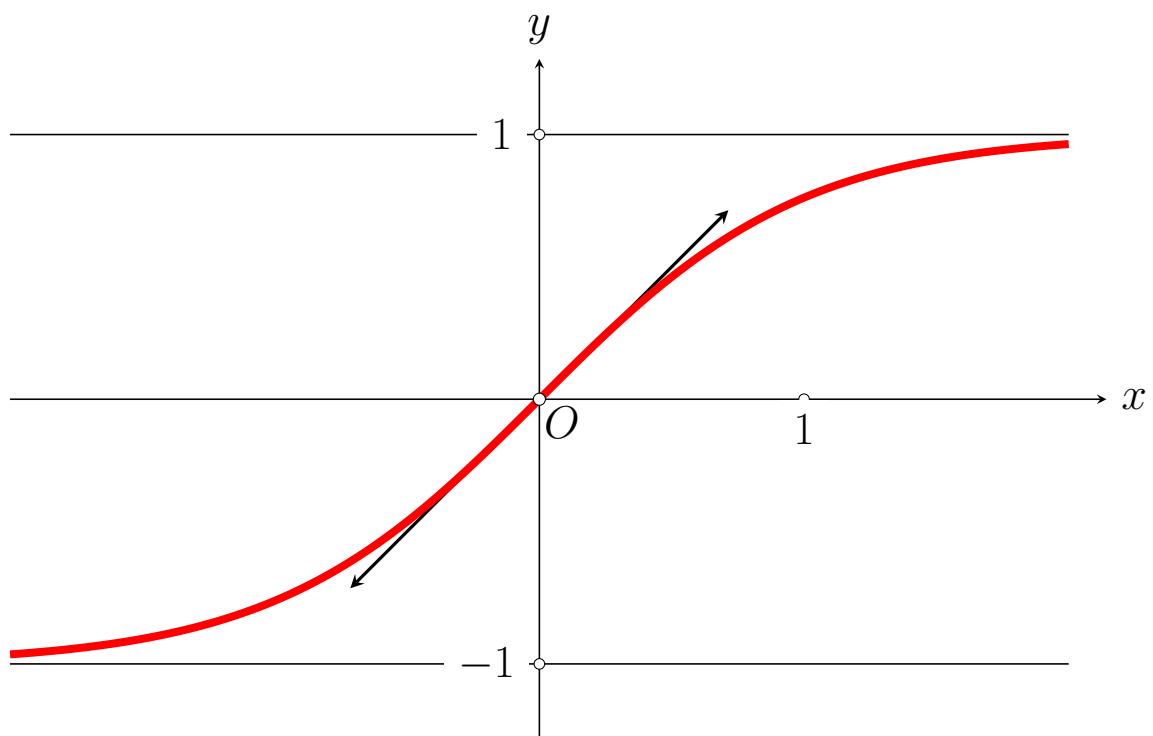


Les fonctions cosinus et sinus hyperboliques peuvent être décrites comme l'abscisse et l'ordonnée d'un point qui parcourt l'arc d'hyperbole d'équation $u^2 - v^2 = 1$, $u \geq 0$.

D'où leur dénomination et leur analogie avec les fonctions cosinus et sinus circulaires.

Tangente hyperbolique

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1.$$