

Le marchand de billes^{*}

S. Friedli (CMS, EPFL)[†]

22 octobre 2019

Depuis toute petite, Charlotte collectionnait les billes. Elle en possédait des centaines, de toutes les couleurs, de toutes les tailles. Chaque fois qu'elle en avait l'occasion, elle en cherchait des nouvelles pour augmenter sa collection.

Un jour, en vacances avec ses parents dans les rues marchandes d'une ville du sud, elle passa devant une échoppe dont l'enseigne disait *Billes en tous genres*. Sans hésiter, elle entra.

Des sacs de billes

Derrière le comptoir, un homme lisait son journal.

Charlotte: Bonjour !

Marchand: Bonjour ma petite, que puis-je faire pour toi ?

C: Je collectionne les billes, et ça m'intéresserait de voir ce que vous avez.

M: Bien-sûr.

Derrière lui, une multitude de sacs étaient accrochés au mur. Étant fait d'un épais tissus, Charlotte ne voyait pas ce qu'ils contenaient, et chacun

*Ce texte est une tentative dont le but de présenter, de manière informelle et sans utiliser de symboles mathématiques, quelques-unes des difficultés de l'analyse réelle: fini vs. infini, suite, sous-suite, suite bornée, minimum et maximum, infimum et supremum, limite.

†Suggestions, critiques et corrections: sacha.friedli@epfl.ch

était muni d'une étiquette sur laquelle elle pouvait distinguer des symboles étranges.

C: Vous les vendez par sac ou à l'unité ?

M: Je les vends par sac. Chaque sac coûte 2€.

C: Oui, mais avant, on peut quand-même voir les billes qui sont dedans ?

M: On peut voir quelques billes oui.

C: Bien. Donc j'aimerais vider quelques sacs pour voir. Après je déciderai.

M: On ne peut malheureusement pas vider les sacs.

C: Ah ? Et pourquoi ça ?

M: Parce que chaque sac contient une infinité de billes.

Sans avoir vraiment entendu ce qu'il venait de dire, elle poursuivit :

C: Oui, donc vous voulez dire qu'ils contiennent beaucoup de billes, et vous ne voulez pas que chaque enfant se mette à vider chaque sac pour choisir ses billes, c'est normal.

M: Non : on ne peut pas vider ces sacs parce que *chaque sac contient une infinité de billes*.

Charlotte remarqua pour la première fois l'étrange odeur d'encens qui plânaît dans le magasin.

C: Mais c'est pas possible. De toute façon, si un sac pouvait contenir une infinité de billes, il devrait coûter infiniment cher, ça ne fait pas de sens.

Il sourit fièrement.

M: Comme je t'ai déjà dit, tous mes sacs sont à 2€, c'est pour ça qu'ils sont très appréciés des enfants du quartier !

Elle se demandait s'il essayait de se payer sa tête.

C: Déjà, je ne vois pas comment on peut *fabriquer* une infinité de billes en un temps fini, du coup c'est pas possible. Une boutique entière encore moins, ça ne marche pas votre histoire. En plus c'est *physiquement* pas possible, même

si vous arriviez à les compresser sans les casser, vous pourriez en mettre quelques dizaines dans un de ces sacs, tout au plus.

M: Mais oublie la physique ! Et si je te disais que nous faisons toi et moi partie d'une histoire dont le but est de parler de l'infini. Si l'auteur a choisi de commencer son histoire avec des sacs, qui contiennent une infinité de billes, pourquoi pas ? Tu verras, c'est intéressant.

Agacée, elle saisit un des sacs suspendus au mur, défit la ficelle qui le maintenait fermé, puis le renversa.

C: Ah ouais ! ? C'est ça ce que vous appelez un sac infin...

Un flot de billes de toutes les couleurs jaillit du sac, se déversant bruyamment sur le comptoir en verre, puis continuaient leur course sur le sol du magasin. Les billes sortaient sans cesse du sac dans un flot continu, comme les particules d'un puissant liquide.

Plusieurs secondes s'écoulèrent dans le fracas des billes qui s'entrechoquaient. L'homme avait les bras croisés et regardait calmement Charlotte. Elle, paniquée, ne pouvait ôter ses yeux du flux ininterrompu. Elle entendait maintenant des billes lointaines rouler sur le sol jusque dans les moindre recoins de la boutique.

Malgré la quantité de billes qui sortaient du sac à chaque seconde, Charlotte n'avait pas l'impression qu'il se vidait. Son poids semblait même ne pas diminuer !

Elle devait se rendre à l'évidence : il se passait des choses pas très naturelles dans cette boutique. Elle redressa le sac, stoppant net le flux de billes, puis resta figée un moment, alors que les dernières sorties du sac terminaient leur course derrière les étagères du fond du magasin. Le sol était maintenant couvert de ces petites boules aux multiples couleurs, bien plus que toutes celles de sa collection personnelle.

M: Alors ?

Si elle ne l'avait pas vu de ses yeux, elle ne croirait jamais que toutes étaient sorties du petit sac qu'elle tenait encore à bout de bras.

C: Toutes ces billes dans le même sac... C'est pas possible.

M: Toi et tes “pas possible” !

Charlotte referma le sac, le posa sur le comptoir. Puis elle recula d'un pas et s'assit sur une chaise qui se trouvait là.

C: Attendez. Donc si le sac contenait une infinité de billes avant que je l'ouvre, il en contient toujours une infinité. Malgré ces milliers de billes qui ont innondé votre magasin en quelques instants.

M: Tout à fait.

C: Et pourquoi on ne peut pas les sortir toutes comme ça d'un seul coup ?

M: Mais parce que je n'ai pas la place pour une infinité de billes dans cette petite boutique ! Donc tout ce que tu peux faire c'est les sortir une à une. En les déversant comme tu viens de le faire c'est la même chose en plus rapide, mais elles sortent quand-même les unes après les autres.

C: Mais je peux en sortir autant que je veux ? Un million de billes ? Un milliard ?

M: Tu peux en sortir autant que tu veux. Mais tu ne quittes pas le magasin avant d'avoir tout remis dans le sac !

C: Je commence à voir. Donc on est dans une histoire, qui se passe dans votre boutique, et dans laquelle on peut trouver des choses impossibles comme des sacs qui contiennent plus de billes qu'il n'y a d'étoiles dans le ciel... Est-ce que je rêve ?

Il se baissa pour prendre une ramasseuse sous le comptoir, qu'il tendit à Charlotte.

M: Peut-être que tu rêves, mais est-ce vraiment important ? Tiens, prends cette ramasseuse. On ne fait rien de plus avant que toutes les billes soient toutes retournées dans le sac.

En commençant à ramasser les billes, elle pensa que si c'était un rêve, c'était effectivement un rêve intéressant. Une infinité de billes pour seulement 2€... Pourtant, elle eut un léger vertige en pensant que même si elle passait le reste de sa vie à en sortir les billes une à une, elle n'en connaîtrait qu'une partie infime, négligeable par rapport à cette lointaine infinité de billes qui resterait toujours au fond du sac.

Sacs infinis : mode d'emploi

Ayant terminé de remettre les billes dans le sac, elle le tendit au marchand, qui le replaça contre le mur. Elle reprit :

C: Donc ces sacs, vous ne savez pas vraiment ce qu'il y a dedans...

M: Je ne me souviens pas de tous les détails, c'est vrai. Mais j'ai mis des petites étiquettes dessus pour me souvenir de ce que chacun contient, grossso modo. Tu n'as pas besoin de comprendre ce qu'elles signifient.

C: Mais c'est vous qui avez rempli tous ces sacs ?

M: Oui.

C: Bon, mais comment vous faites ? Parce que puisque vous ne pouvez pas les remplir d'un coup, ça devrait vous prendre un temps infini de mettre une infinité de billes dans un sac.

M: J'ai ma technique...

Charlotte comprit que c'était encore un truc "pas possible", car pour remplir un sac, l'homme devrait accomplir une infinité de mouvements dans un temps fini. Mais elle commençait à s'habituer, et poursuivit.

C: Et donc moi, comme je n'ai pas vos super-pouvoirs, le seul moyen que j'ai de savoir ce qu'il y a dans un sac, c'est de sortir les billes les unes après les autres, en commençant par la première ?

M: Oui, tu peux en explorer le contenu de manière très concrète, mais c'est bille après bille.

Elle soupira.

C: J'aime les billes bleues vous savez. Donc si je voulais savoir, par exemple, si ce sac là (elle pointa du doigt un des sacs accrochés au mur) contient au moins *une* bille bleue, il faudrait que je sorte les billes une à une, peut-être pendant 25'000 ans, avant de tomber sur une bille bleue ?

M: Si tu veux le découvrir par toi-même oui.

C: Et si par malheur ce sac ne contient aucune bille bleue, je ne le saurai jamais, je continuerai à sortir ces maudites billes les unes après les autres, en ayant toujours l'espoir que la suivante soit bleue ?

M: Rappelle-toi que c'est moi qui ai rempli ces sacs, donc tu peux toujours me poser des questions, et je te dirai si tel sac contient des billes bleues ou pas.

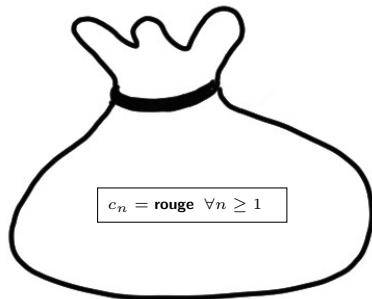
Charlotte se demanda si elle avait bien fait d'entrer dans ce magasin. Elle s'impatientait, et voulait trouver des nouvelles billes pour sa collection.

Océan rouge, océan bleu

C: Bon, je ne comprends pas grand chose à ces histoires de sacs infinis en fait. On pourrait pas plutôt en ouvrir quelques-uns ? Parce que je ne suis pas comme vous, je n'ai qu'un temps *fini* avant la fin de mes vacances, moi.

M: Tu as raison, laisse-moi te montrer un peu ce que j'ai. Avant tout, sache que dans la partie de la boutique où nous nous trouvons maintenant, toutes les billes contenues dans les sacs sont de mêmes tailles. Ce qui les différencie, c'est uniquement leur couleur.

Il se retourna, prit un des sacs accrochés sur le mur, et le posa sur le comptoir.



M: Ce sac, par exemple, est un de ceux dont le contenu est le plus simple : *il ne contient que des billes rouges*.

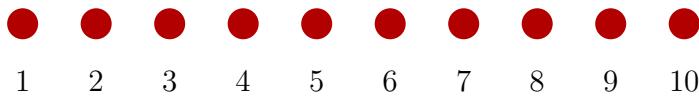
Charlotte ne comprenait rien à ce qui était écrit sur l'étiquette, qu'elle arrivait à peine à lire.

C: Que sont ces symboles ? Que veut dire " c_n " ?

M: Oublie les symboles, c'est moi qui ai mis ces petites étiquettes pour me souvenir de ce qui distingue les sacs. Le symbole " c " est pour indiquer la

couleur, et donc j'ai utilisé le symbole " c_n " pour représenter la couleur de la n ème bille du sac. " c_1 " est la couleur de la première bille, " c_2 " est la couleur de la deuxième bille, etc. Mais je répète : oublie les étiquettes.

Elle allait poser une autre question à propos de l'étiquette, mais le marchand lui fit signe de ne pas se préoccuper et plongea la main dans le sac. Il retira la première bille, qui était rouge, et la posa sur le comptoir. Puis sortit une deuxième bille rouge, tout à fait identique à la première, puis une troisième, et ainsi de suite, jusqu'à la dixième.



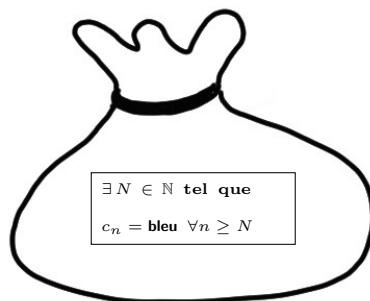
C: Ça nous fait dix billes rouges, mais ça ne me dit pas que ce sac contient une infinité de billes, ni qu'elles sont toutes rouges...

M: Je te répète que c'est moi qui ai préparé ce sac ! Et si tu ne me crois pas, alors tu peux verser un milliard de billes sur le comptoir. Mais après tu ramasses.

Il tendit le sac à Charlotte. Elle le repoussa de la main ; elle avait décidé que dorénavant elle ferait confiance au marchand.

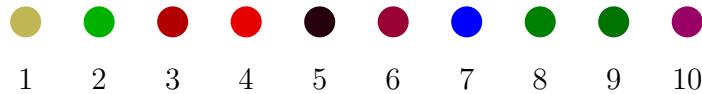
C: Je vous crois. Même si je ne pourrai jamais vraiment le vérifier, admettons que ce sac ne contient que des billes rouges. Une infinité de billes rouges.

M: Voilà qui est bien. Et si tu me fais confiance, tu apprendras plus de choses. Continuons. Ce premier sac n'était pas très intéressant, je te le concède, puisque toutes ses billes sont identiques. J'ai par contre ici (il se retourna pour prendre un autre sac) quelque chose qui devrait te plaire, toi qui aimes les billes bleues.



M: Dans ce sac, *à l'exception d'un nombre fini, toutes les billes sont bleues.*

Elle tressaillit à l'idée de pouvoir se procurer une infinité de billes bleues. Suivant le conseil du marchand, elle ignora totalement l'étiquette, saisit le sac, plongea sa main dedans, et sortit les dix premières billes.



C: Vous plaisantez ? Sur les dix premières, une seule est bleue.

M: Mais je n'ai pas dit que *toutes* les billes du sac étaient bleues. Ce que j'ai dit c'est qu'elles étaient toutes bleues, *à l'exception d'un nombre fini d'entre elles*.

C: Ah, je vois. Vous voulez dire que dans ce sac, certaines billes ne sont "pas bleues", mais seulement en nombre fini. Et donc, si je commence à sortir les billes une à une, alors après un moment j'aurai sorti suffisamment de billes pour être sûr d'avoir extrait toutes les "pas bleues", et donc le reste ne sera que des billes bleues, jusqu'à l'infini ?

M: Exactement.

C: OK, et combien de billes "pas bleues" je devrai sortir d'abord ?

M: Je ne me souviens plus exactement, ça fait longtemps que je l'ai préparé.

C: Donc vous ne pouvez pas me dire si les billes "pas bleues" sont au nombre de 10, 100, 100'000 ou 100'000'000 ?

M: J'ai oublié. Mais c'est un nombre fini.

C: Donc si je veux retirer toutes les billes "pas bleues", je n'ai aucune moyen de prévoir combien de temps ça peut me prendre ! ? Ce sac m'intéresse, mais je ne vais pas vous l'acheter si je ne suis pas certain de pouvoir un jour atteindre les billes bleues !

Il prit un air embarrassé. Mais Charlotte aimait trop le bleu : elle commença à sortir des billes les unes après les autres, jusqu'à avoir sorti 100

billes du sac. En plus de la quatrième, seulement 6 autres étaient bleues. La 100ème était verte.

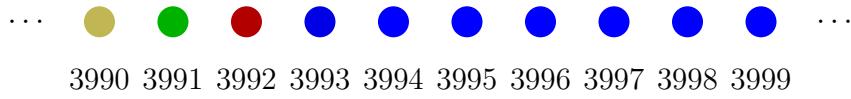
C: Ça fait quand-même beaucoup de “pas bleues”. Vous êtes sûr qu’elles sont en nombre fini ?

M: Fais-moi confiance.

Elle continua à les sortir une à une, les plaçant sur le comptoir, en les comptant dans sa tête. Les billes semblaient vraiment être de toutes les couleurs. De temps en temps une bleue apparaissait, mais la suivante était d’une autre couleur, ainsi que la suivante, etc.

Le vendeur avait repris la lecture de son journal. Après quelques minutes, le visage Charlotte s’illuminait. Soudain elle s’écria :

C: J’en suis à la 4'071ème bille, et depuis la 3'993ème, toutes sont bleues !



M: Ah voilà, c'est ça, maintenant je me souviens. J'avais d'abord commencé par remplir le sac avec environ 4'000 billes, de couleurs un peu quelconques, et ensuite j'avais complété avec une infinité de billes, uniquement des bleues.

C: Et donc maintenant toutes les suivantes seront bleues ?

M: Tu peux me croire sur parole : toutes les suivantes seront bleues.

Charlotte commença tout de suite à remettre les billes dans le sac.

C: Alors je vais vous prendre ce sac.

Elle avait l'air satisfaite. Elle pensa qu'elle pourrait donner les 3'992 premières à une de ses copines, et ne garder que le reste : un sac ne contenant qu'un océan de billes bleues.

Après quelques minutes, alors qu'elle finissait de remettre les billes dans le sac, elle rompit le silence :

C: Mais alors j'ai eu de la chance, parce que si vous aviez décidé de mettre un paquet de 400'000'000 “pas bleues”, j'y aurais passé des semaines.

M: Oui, effectivement. Mais dorénavant quand je te dirai que *toutes les billes sont bleues sauf un nombre fini*, tu n'auras qu'à me croire.

C: Oui. Mais quand-même, quand on dit un nombre "fini", ça peut être très grand... Genre aussi grand que le nombre de particules dans l'univers. Des trucs que je pourrai jamais compter de toute façon.

M: Tu as raison. Mais quand on dit "un nombre", c'est toujours *un nombre fini*, même si tu le trouves "grand".

Charlotte avait fini de remettre les billes dans le sac "aux billes essentiellement toutes bleues", et le tendit au vendeur pour qu'il le mette de côté.

Infini(s) dans l'infini

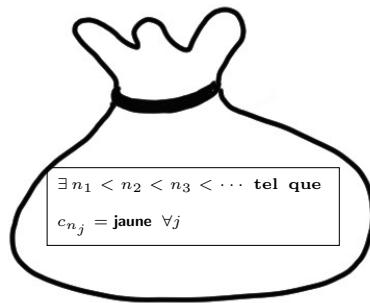
Elle recula alors de quelques pas en regardant tous les sacs encore accrochés sur le mur.

C: Ensuite, qu'est-ce que vous avez comme sacs qui pourraient encore m'intéresser ?

M: Qu'est-ce que tu aimes comme billes à part les bleues ?

C: J'aime toutes les billes.

Il prit un sac situé un peu plus haut sur la gauche et le tendit à Charlotte.



M: Tiens. Ce sac *contient une infinité de billes jaunes*.

Elle prit un air surpris.

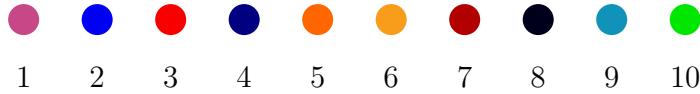
C: Ben c'est un peu comme avant : si je commence à extraire les billes les unes après les autres, à partir d'un moment elles seront toutes jaunes, et voilà.

M: C'est une façon d'avoir une infinité de billes jaunes, c'est vrai. Mais je n'ai pas dit, cette fois, que les "pas jaunes" étaient en nombre fini ; en fait, si je me souviens bien, il me semble même qu'elles sont en nombre infini.

Charlotte trouva d'abord absurde d'avoir deux infinis en un seul sac. Mais elle se souvint que parmi l'infinité des nombres entiers, il y a l'infinité des nombres pairs, et l'infinité des nombres impairs.

C: Ah. Donc si je commence à explorer le contenu du sac, je pourrais tirer une bille jaune, puis une "pas jaune", puis une jaune, puis une "pas jaune", et ainsi de suite, en alternance, comme les nombres pairs et impairs qui se suivent jusqu'à l'infini ?

M: C'est une possibilité, mais je ne me souviens pas d'avoir alterné les billes jaunes et "pas jaunes" de cette façon. Regardons un peu :



C: Ah ça commence bien, aucune bille jaune dans les 10 premières... Vous êtes sûr qu'il contient une infinité de jaunes, vous ne vous êtes pas trompé ?

M: Certain.

C: OK, donc si on continue il y a bien un moment où on tombera sur la première bille jaune. Et c'est un peu comme avant avec les billes bleues : on sait pas vraiment combien de temps ça va prendre avant de trouver la première jaune... M'enfin, supposons que la première bille jaune soit la 1000ème.

M: Je ne pense pas que tu doives aller aussi loin, mais soit, admettons.

C: Bon mais ensuite, comme le reste devra encore contenir une infinité de jaunes, je suis certaine qu'en continuant je devrai tomber une fois sur la deuxième bille jaune. Et là encore si ça se trouve je devrai retirer d'abord un million de billes pas jaunes !

M: Tout à fait.

C: Donc la deuxième bille jaune pourrait être à la 1'000'000ème position, puis la troisième à la 100'000'000'000ème position, puis la quatrième encore plus loin, etc. Donc même si il y a une infinité de billes jaunes, elles pourraient en fait utiliser très peu de place dans le sac, en comparaison avec les billes "pas jaunes" ... Pas très intuitif tout ça.

Le marchand pensa que la curiosité de Charlotte lui ferait peut-être apprécier les autres parties de sa boutique.

M: Tu sais, je pense qu'on devrait jeter un oeil à l'arrière-boutique. Certains des sacs qui s'y trouvent pourraient t'intéresser.

C: Toujours des sacs de billes ?

M: Toujours des sacs de billes.

C: Alors je veux bien. Mais pas longtemps, mes parents doivent être en train de m'attendre.

Il lui indica de la main la porte située au bout du comptoir, et lui emboîta le pas.

Monochromes mais de tailles variables

Elle fut un peu déçue : l'arrière-boutique n'était pas très différente. Sur des étagères, des sacs étaient posés dans le désordre.

C: Qu'est-ce qu'ils ont de différent ces sacs ? Vu de l'extérieur, c'est un peu pareil que ceux qu'on a vu tout à l'heure.

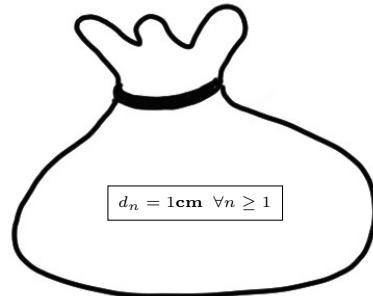
M: Comme avant, chacun contient une infinité de billes. Sauf qu'ici elles sont toutes noires.

C: Toutes noires ? Donc ces sacs sont tous pareils ? Ça n'a aucun intérêt !

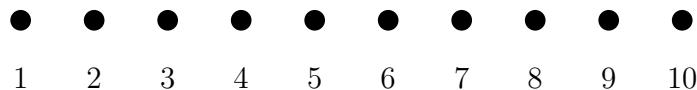
M: Au contraire, ces sacs sont très intéressants, parce que les billes qu'ils contiennent sont de tailles différentes ; elles n'ont pas toutes le même diamètre.

Charlotte réfléchit un instant à la variété de sacs que cela pouvait représenter.

M: Le seul sac dont toutes les billes ont la même taille est le suivant : *toutes ses billes ont un diamètre de 1 centimètre.*

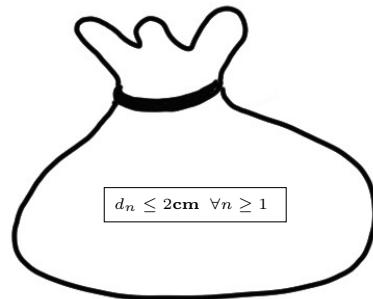


Il sortit quelques billes pour lui montrer.



C: Pas très intéressant... J'ai une question. Si les autres sacs contiennent en général des billes de tailles différentes, est-ce qu'ils peuvent contenir des billes très grosses, genre grosses comme des pastèques ?

M: Non, pour simplifier j'ai toujours utilisé des billes de tailles raisonnables. Dans ce sac par exemple (il lui tendit un autre sac), *les billes ont un diamètre qui ne dépasse jamais 2 centimètres*.

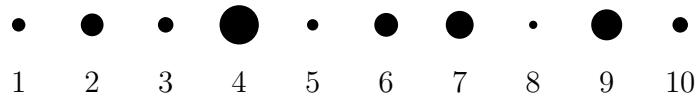


C: Vous avez quelque chose pour mesurer le diamètre des billes, genre une règle milimétrée ?

Il ouvrit un tiroir et en sortit un pied à coulisse qu'il tendit à Charlotte.



Elle commença à extraire les billes du sac, une à une, en mesurant le diamètre de chacune.



C: Elles sont effectivement de tailles assez variées, et en tout cas sur les dix premières, aucune ne dépasse 2cm. La plus grande, la quatrième, a un diamètre de 1.68cm.

À la recherche de la plus grande

Elle continua. Parmi les 200 premières billes, une seule était plus grande que la quatrième : la 96ème, qui avait un diamètre de 1.732cm. Elle accéléra le processus jusqu'à avoir sorti 5000 billes du sac, parmi lesquelles la plus grande était maintenant la 4653ème, avec un diamètre de 1.7329cm.

Elle trouva étrange de retirer autant de billes et de n'en trouver aucune avec un diamètre plus proche de 2cm.

C: Pardon, mais j'ai deux questions. La première : Est-ce que ce sac contient des billes dont le diamètre est proche de 2cm ?

M: Je ne sais plus exactement. Aucune bille ne dépasse 2cm, c'est sûr, mais il se pourrait qu'en fait aucune ne dépasse 1.8cm. Ou même 1.6cm, je ne me souviens plus.

C: Ben la 4653ème a un diamètre de 1.7329cm, donc ça peut pas être 1.6...

M: Et quelle est ta deuxième question ?

C: Je voudrais savoir si ce sac contient une bille plus grande que les autres.

Il prit un air embarrassé.

M: Je ne sais pas.

Charlotte se prit la tête entre les mains.

C: Vous ne savez pas ?! Donc je pourrais sortir encore 100'000 billes, en trouver peut-être une dont le diamètre est un peu plus grand que la 4653ème, disons égal à 1.73295cm, puis aller toujours plus loin pour trouver de temps en temps une bille encore un tout petit peu plus grande, tout ça sans qu'aucune ne dépasse 2cm, et en fait je ne saurai *jamais* si j'ai trouvé la plus grande !

Il resta silencieux, ce qui la fit soupirer en roulant les yeux vers le plafond. Elle comprit que chercher la plus grande bille, dans un sac infini, était une perte de temps.

C: C'est quand-même compliqué les sacs infinis. Parce que dans un sac fini, c'est plus simple, on peut toujours savoir si il y a ou non une bille plus grande que les autres...

Petites billes et mosaïques

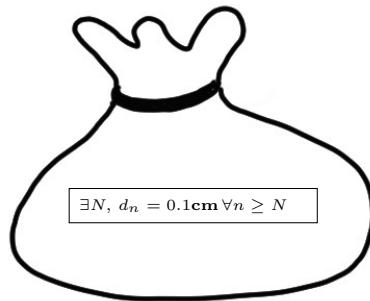
Un peu fatiguée, elle s'assit et contempla les étagères de l'arrière-boutique. Le potentiel que représentaient ces infinités de billes lui rappela une journée de bricolage à l'école. Un jour, la maîtresse avait donné à chaque enfant un gobelet rempli de toutes petites perles. Elles n'étaient pas toutes de tailles égales, et certaines étaient si petites qu'il fallait les manier avec une pincette. Ensuite, avec un peu de colle, chacun avait réalisé une mosaïque sur une feuille de papier, en collant ces perles côté à côté.

C: Vous avez des sacs avec beaucoup de billes très petites ?

M: Bien-sûr. Je n'ai pas de sac dans lequel *toutes* sont petites, mais presque toutes. Pourquoi ?

C: Avec beaucoup de petites billes, je pourrais faire une grande mosaïque. Disons que pour commencer, j'aimerais une infinité de billes de diamètre égal à un millimètre, enfin 0.1cm quoi.

Il se dirigea vers une étagère sur laquelle était accrochée une pancarte. Dessus, Charlotte pouvait lire l'inscription : "PETITES BILLES". L'homme chercha un instant parmi les sacs posés dessus, puis lui tendit un nouveau sac.



M: Ce sac devrait te satisfaire : *toutes les billes qu'il contient, à l'exception d'un nombre fini, ont un diamètre de 0.1cm.*

Elle savait maintenant ce que cela signifiait : elle devrait d'abord retirer un nombre fini de billes avant d'atteindre les billes de 0.1cm. Même si elle savait que ça pourrait prendre beaucoup de temps, elle voulut vérifier. Elle commença donc à sortir les billes les unes après les autres. Après quelques minutes, elle avait trouvé ce qu'elle voulait.

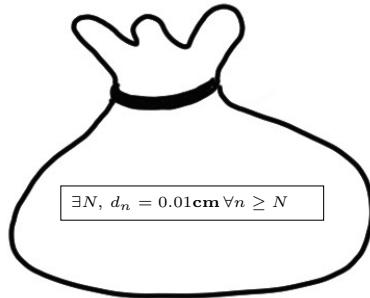
...	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	...
	249	250	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260

C: Voilà, parfait, il semblerait qu'à partir de la 254ème, toutes ont un diamètre de 0.1cm.

Elle demanda au marchand de mettre ce sac de côté. Mais elle se dit que pour faire sa mosaïque, il lui faudrait aussi des billes plus petites, pour dessiner des détails, comme les feuilles ou l'écorce des arbres.

C: Il me faudrait ensuite des billes plus petites, disons de 0.01cm. Vous avez ?

Il alla chercher plus haut sur l'étagère "PETITES BILLES" et revint avec un nouveau sac.



Cette fois elle fit confiance au marchand, et ne vérifia pas.

C: Je crois qu'avec ça c'est déjà bien. J'imagine qu'au cas où j'aie besoin de billes encore plus petites, genre de diamètre égal à 0.001cm, vous aurez ça quelque part ?

C: Très certainement. L'étagère “PETITES BILLES” ne contient que des sacs du genre, avec un grand choix de petitesses.

Toujours plus petites

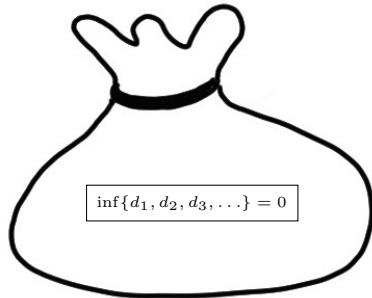
Tous les sacs de l'étagère “PETITES BILLES” contenaient des billes qui étaient toutes, à l'exception d'un nombre fini, de même taille. Cela signifiait en particulier que chacun de ces sacs devait contenir au moins une bille plus petite que les autres. Cela mena Charlotte à poser une question au marchand :

C: Est-ce que vous auriez un sac avec des billes infiniment petites ?

M: “Infiniment petit” ne veut pas dire grand chose. Une bille est une bille, c'est toujours une petite boule avec un diamètre non-nul, même si ce diamètre est très petit.

C: Oui, bon, vous voyez ce que je veux dire : un sac qui contient des billes petites, mais aussi d'autres encore plus petites, et ainsi de suite.

Il chercha un instant puis revint avec un nouveau sac :



M: Ce sac fait peut-être ce que tu veux : *il contient des billes arbitrairement petites.*

C: Donc ça veut dire que si je choisis une taille petite, par exemple 0.00324cm, le sac contiendra une bille qui a exactement cette taille ?

M: Pas tout à fait. “Arbitrairement petit” ne veut pas dire qu’il y a toutes les tailles que tu veux, mais plutôt qu’il y a toutes les tailles *plus petites* que ce que tu veux. Pour que tu comprennes, je propose qu’on utilise un autre outil de mesure.

C: Il est pas bien le pied à coulisse ?

M: Pas nécessaire pour ce que j’aimerais te faire comprendre. Imaginons que pour mesurer la petitesse d’une bille, on regarde si elle entre ou non dans une boîte dont on a choisi la taille.

Il dessina une boîte au crayon :



C: Mais on fixe quoi comme taille exactement ?

M: Ça n’a pas d’importance. On choisit une taille, petite, et on construit une boîte qui a cette taille. Une fois qu’on a construit la boîte, c’est un peu comme si on avait fixé une notion de petitesse, et on l’utilise pour tester la taille d’une bille : soit la bille est assez petite pour entrer dans la boîte,



soit elle est trop grande :



C: Je veux bien, mais juste regarder si elle entre ou pas dans la boîte ne me dit rien de précis sur la taille de la bille ! Il me semble que ça serait bien plus simple de prendre le pied à coulisse et de mesurer...

M: Encore une fois, il faut que tu comprennes que lorsqu'on dit "arbitrairement petit", on veut plutôt dire quelque chose comme "plus petit que tout ce qu'on peut fixer", donc les tailles exactes n'importent pas vraiment.

Convaincue qu'il serait bien plus naturel d'utiliser le pied à coulisse, Charlotte acquiesça en haussant légèrement les épaules.

M: Revenons à ce sac. Maintenant qu'on a ces boîtes, on peut exprimer le fait qu'il contient des billes arbitrairement petites plus précisément, comme suit : *peu importe la taille de la boîte que tu choisis, il existe toujours au moins une bille du sac qui rentre dans cette boîte.*

Elle resta silencieuse un moment.

M: Je vois que tu es un peu perplexe, alors faisons comme ça : donne-moi une taille de boîte, une taille que tu considères petite. Comme on ne considère que des boîtes cubiques, il suffit de me donner la taille du côté.

C: Je sais pas moi, 1mm c'est petit comme boîte.

M: Très bien. Alors j'affirme que *ce sac contient au moins une bille qui rentre dans une boîte de 1mm.*

C: Et donc on ne sais pas si cette bille rentre juste juste dans la boîte, ou si elle est beaucoup plus petite.

M: Peu importe, elle rentre dans la boîte. Donne-moi maintenant une taille que tu considères encore bien plus petite que 1mm.

C: Par exemple 0.001mm ?

M: 0.001mm, parfait. J'affirme que *ce sac contient au moins une bille qui rentre dans une boîte de 0.001cm.*

C: Oui mais la bille d'avant, celle qui rentrait dans ma première boîte de 1mm, si ça se trouve elle était déjà assez petite pour rentrer aussi dans cette deuxième boîte de 0.001mm !

M: C'est possible, mais ce qui est important, c'est que tu peux continuer, et choisir une taille de boîte encore plus petite.

C: Ah donc si je veux je peux choisir à chaque fois une taille de boîte qui est bien plus petite que la bille que j'ai trouvé à l'étape d'avant ?

M: Oui !

C: Ah, donc forcément, je commence à voir : effectivement ça veut dire qu'il y a des billes vraiment très petites, invisibles à l'oeil nu, et d'autres encore plus petites, etc. Mais en fait cela signifie qu'il y a aussi des billes plus petites que des atomes ?

M: Oui, puisque tu n'as qu'à imaginer une boîte 1000 fois plus petite que le diamètre d'un atome ; tu sais que le sac contient au moins une bille qui rentre dans ta boîte...

C: Pas très physique tout ça.

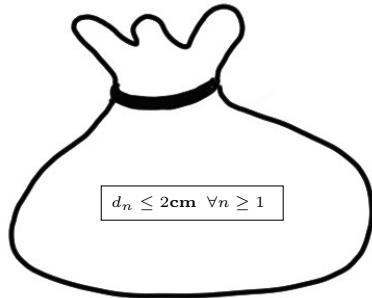
M: On a dit qu'on oubliait la physique !

La plus petite boîte

L'utilisation des boîtes pour mesurer la petitesse des billes avait convaincu Charlotte. Mais elle repensait au sac dont les billes avaient toutes un diamètre qui ne dépassait pas 2cm.

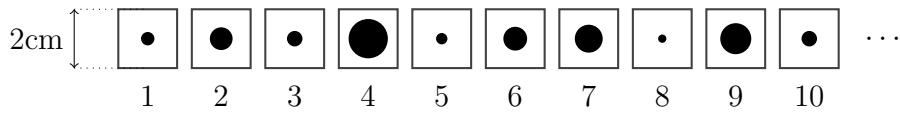
C: Pardon, est-ce qu'on pourrait reprendre le sac de tout-à-l'heure, dont les billes ne dépassent pas 2cm ?

M: Bien-sûr, le voici.



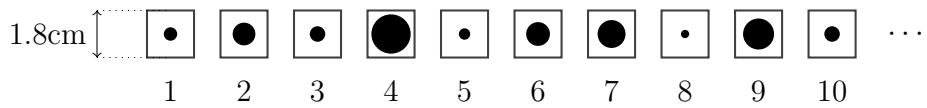
C: Maintenant qu'on a ces boîtes, on peut donc dire que chacune des billes de ce sac rentre dans une boîte de 2cm de côté ?

M: Tout à fait. Tu peux te le représenter comme ça si tu veux :



C: Mais d'après ce que vous disiez, il se pourrait que chacune rentre en fait dans une boîte plus petite, peut-être de 1.8cm de côté ?

M: Il me semble que oui.



C: Et en fait, comme vous n'êtes pas sûr, il se pourrait que chaque bille rentre en fait dans un boîte encore un peu plus petite, disons de 1.75cm. Donc ma question c'est : est-ce qu'il y a une taille de boîte "minimale" ?

M: Oui tu as raison, il existe une boîte minimale telle que toute bille du sac rentre dedans.

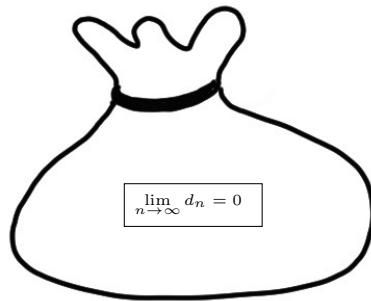
C: Ça serait vraiment bien de la connaître cette boîte minimale. Non seulement elle pourrait contenir chacune des billes du sac, mais en plus il y aurait

des billes dont la taille est très proche de la taille de la boîte. Ça nous permettrait de dire quelque chose sur les plus grandes billes du sac, celles qui rentrent “juste juste” dans la boîte minimale.

M: Écoute... La prochaine fois que je prépare un sac de ce genre, je te promets que je ferai attention, je penserai à regarder quelle est la boîte minimale correspondante.

Tendre vers zéro

Charlotte commençait à être fatiguée, et pensa qu'il serait vraiment bien de rejoindre ses parents. Mais en jetant un dernier coup d'œil à l'arrière-boutique, elle aperçut une autre étagère avec la pancarte “LIMITES”. Elle s'approcha et aperçut dessus un sac avec un symbole sur l'étiquette encore plus étrange que les précédents.



M: Qu'est-ce qu'elles ont les billes dans ce sac ?

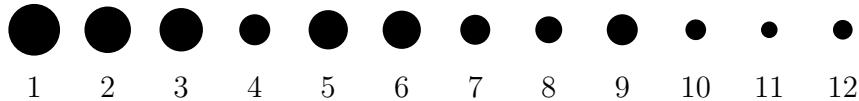
M: Bonne question ! Ce qui se passe dans ce sac est un peu plus difficile à comprendre. En résumé : dans ce sac, *le diamètre des billes tend vers zéro*.

C: Comment ça “tend vers zéro” ? Vous voulez dire que le diamètre de chaque bille rétrécit au fil du temps, pour finalement disparaître ?

M: Non non, pas du tout, je me suis mal exprimé. Chaque bille de ce sac a une taille fixée, qui ne change pas. Ce qui tend vers zéro, c'est les diamètres que tu observes en sortant les billes du sac les unes après les autres.

C: Alors c'est comme le sac d'avant : il contient des billes arbitrairement petites ?

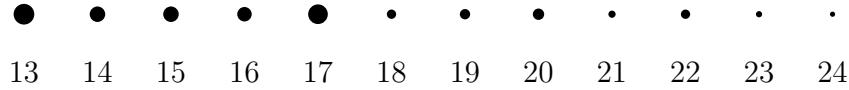
M: Oui, il contient des billes arbitrairement petites, mais c'est plus que ça. Regarde :



C: On a la vague impression que les diamètres deviennent plus petits, je suis d'accord. Pourtant, la cinquième est plus grande que la quatrième, la neuvième me semble plus grande que la huitième, la douzième semble aussi plus...

M: C'est vrai, mais je n'ai pas dit qu'une bille était nécessairement plus petite que la précédente.

Charlotte fronça les sourcils, et sortit encore des billes du sac, les déposant à la suite des premières :



C: Je suis d'accord, on a bien l'impression que "globalement", les tailles vont en diminuant. Mais on n'a ici que 24 billes, et puisque vous dites que les diamètres ne vont pas forcément en décroissant, il se pourrait très bien que de la 126ème à la 4562ème, toutes soient tout à coup beaucoup plus grandes. Donc je comprends pas encore comment je peux être sûr que ça "tend vers zéro".

M: OK. Tu veux une formulation précise, je te la donne : *peu importe la boîte que tu choisis, alors à l'exception d'un nombre fini, chaque bille du sac rentre dans cette boîte.*

Charlotte se sentit soudain très fatiguée.

C: OK, donc vous dites que si je fixe une taille de boîte, disons 0.1cm, alors si j'enlève assez de billes, à partir d'un moment le sac ne contiendra que des billes qui rentrent dans une boîte de 0.1cm. J'aimerais vérifier.

Elle construisit une boîte cubique de 0.1cm de côté, et commença à extraire les billes du sac. Une à une, elle testa chaque bille, pour distinguer celles qui rentraient dans la boîte. Elle remarqua qu'à partir de la 132ème, toutes entraient dans la boîte.

... ● ● ● • ● ● ◻ ◻ ◻ ◻ ◻ ◻ ...
126 127 128 129 130 131 132 133 134 135 136 137

C: Ça rappelle les sacs de l'étagère “PETITES BILLES”, où toutes les billes étaient petites et de la même taille à partir d'un certain point. Sauf qu'ici, à partir de la 132ème, les billes ne sont forcément de tailles constantes, elles rentrent juste dans cette boîte.

M: Oui, mais c'est plus que ça ! Continue à explorer ce sac, et tu verras que plus loin les billes deviennent encore plus petites.

C: OK, donc j'ai ce sac dont j'ai extrait les 131 premières billes. Comme on a dit, toutes les billes qui restent dedans ont un diamètre inférieur à 0.1cm. Supposons que je crée alors une boîte de 0.00001cm. Vous dites que si je continue à sortir des billes, à partir d'un moment le sac ne contiendra plus que des billes qui rentrent dans cette nouvelle boîte ?

M: Oui.

C: Mais pour atteindre ces billes encore plus petites, je devrai aller beaucoup plus loin que la 132ème place ?

M: Ah ça oui certainement. Plus tu veux des billes petites, plus tu devras aller chercher loin dans le sac.

C: Et donc vous dites que peu importe la taille que je choisirai, aussi petite que je veux mais positive, genre 0.000000000000000000000001mm, alors si je sors les billes une à une, après un “moment”, probablement énorme mais fini, chacune des billes qui reste dans le sac pourra rentrer dans une boîte de 0.00000000000000000000000000000001mm.

M: Exact.

C: Et donc, voir le diamètre “tendre vers zéro”, ça veut dire ça : on peut choisir une taille aussi petite qu’on veut, on construit une boîte qui a cette taille, et on est assuré que si on extrait un nombre de billes suffisamment grand, alors on finit toujours avec un sac dans lequel il reste une infinité de billes, chacune suffisamment petite pour rentrer dans la boîte.

Il sourit en la regardant.

M: Tu as tout compris.

Charlotte hocha de la tête en signe de satisfaction.

C: C'est pas si compliqué ces sacs infinis en fait !

Elle lui paya 6€ pour les trois sacs qu'elle avait mis de côté, le remercia pour la visite de la boutique, et sortit rejoindre ses parents qui l'attendaient. Elle avait hâte de leur montrer ses nouvelles billes.