EPFL

1

Enseignant·es: Friedli, Khukhro, Maatouk
Analyse B - MAN
26 juin 2024
Durée : 210 minutes

Ana Lise

SCIPER : **123456**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 14 questions et 16 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table et vérifiez votre nom et votre numéro SCIPER sur la première page.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  les points indiqués si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les feuilles de brouillon seront ramassées mais pas corrigées.

Trigonométrie circulaire

Formules d'addition :

$$\sin(x+y) = \sin x\, \cos y + \cos x\, \sin y \qquad \cos(x+y) = \cos x\, \cos y - \sin x\, \sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\, \tan y}$$

Formules de bissection :

$$\sin^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{2} \qquad \cos^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1+\cos x}{2} \qquad \tan^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

Expressions de $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$ en fonction de $\tan(\frac{x}{2})$:

$$\sin x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \cos x = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \tan x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1-\tan^2(\frac{x}{2})}$$

Formules de transformation somme-produit :

$$\cos x + \cos y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \cos x - \cos y = -2\sin(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \sin x - \sin y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

Trigonométrie hyperbolique

Définitions :

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Formules d'addition :

$$\sinh(x+y) = \sinh x\, \cosh y + \cosh x\, \sinh y \qquad \cosh(x+y) = \cosh x\, \cosh y + \sinh x\, \sinh y$$

$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x\, \tanh y}$$

Formules de bissection :

$$\sinh^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x - 1}{2} \qquad \cosh^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x + 1}{2} \qquad \tanh(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x - 1}{\sinh x} = \frac{\sinh x}{\cosh x + 1}$$

Dérivée de quelques fonctions

$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\arg\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\arg\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\arg\tanh x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\arg\coth x$	$\frac{1}{1-x^2}$

Première partie, questions à choix unique

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question. Une bonne réponse vaut le nombre de points indiqués. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou aucune réponse 0 point. Il n'y a pas de points négatifs.

Question 1 (3 points)
La valeur de l'intégrale

$$I = \int_1^2 \frac{1}{x(2x+3)}\,dx$$

est

☐ $I = \frac{1}{3}\ln(\frac{50}{49})$ ☐ $I = \frac{2}{5}\ln(\frac{3}{5})$ ☐ $I = \frac{2}{5}\ln(\frac{15}{7})$ ☐ $I = \frac{1}{5}\ln(\frac{13}{7})$
■ $I = \frac{1}{3}\ln(\frac{10}{7})$ ☐ $I = \frac{2}{3}\ln(\frac{11}{7})$ ☐ $I = \frac{2}{3}\ln(\frac{49}{25})$ ☐ $I = \frac{1}{3}\ln(\frac{11}{5})$

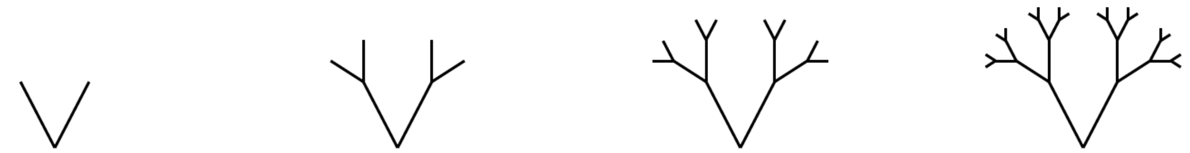
Correction : Décomposition en éléments simples:

$$\frac{1}{x(2x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x+3} = \frac{(2A+B)x+3A}{x(2x+3)} \iff A = 1/3, B = -2/3.$$

On intègre:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx - \frac{2}{3}\int_1^2 \frac{1}{2x+3}\,dx = \left[\frac{1}{3}\ln(x) - \frac{1}{3}\ln(2x+3)\right]_1^2 \\ &= \left[\frac{1}{3}\ln\left(\frac{x}{2x+3}\right)\right]_1^2 = \frac{1}{3}\left(\ln\frac{2}{7} - \ln\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{3}\ln\frac{10}{7}. \end{aligned}$$

Question 2 (3 points)
On construit un arbre à l'aide de segments par un processus itératif dont les quatre premières étapes sont représentées ci-dessous:



étape 1 étape 2 étape 3 étape 4

Chaque segment de l'étape 1 est de longueur $\ell = 1$. A l'étape $n+1$, la longueur de chaque segment rajouté est égale au tiers de la longueur des segments rajoutés à l'étape n.
Si on construisait cet arbre avec du fil de fer, quelle serait la longueur totale L de fil nécessaire lorsque $n \to \infty$?

☐ $L = 4$ ☐ $L = \frac{9}{8}$ ■ $L = 6$ ☐ $L = \frac{23}{8}$
☐ $L = 16$ ☐ $L = \frac{2}{3}$ ☐ $L = +\infty$ ☐ $L = 8$

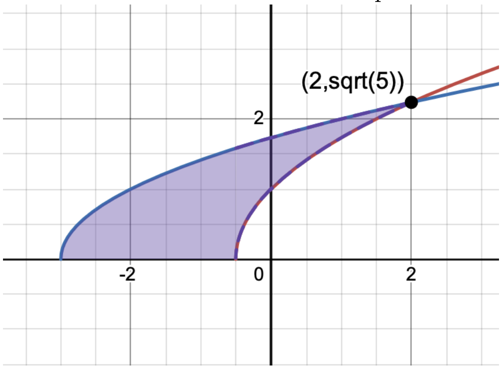
Correction : Si on appelle x_n le nombre de segments rajoutés à l'étape n, et ℓ_n la longueur de chacun de ces segments, on a $x_{n+1} = 2x_n$ et $\ell_{n+1} = \frac{1}{3}\ell_n$ pour $n \geq 1$. Donc

$$L = 2\cdot 1 + 2^2\cdot\frac{1}{3} + 2^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots = 2\left(1 + \cdot\frac{2}{3} + \cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots\right) = 2\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 6.$$

Question 3 (3 points)
Soit D le domaine borné du plan délimité par la courbe $y=\sqrt{2x+1}$, la courbe $y=\sqrt{x+3}$, et l'axe (Ox). Que vaut l'aire de D?

- ☐ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$
- ☐ $5\sqrt{3}$
- ■ $\frac{5\sqrt{5}}{3}$
- ☐ $5\sqrt{5}$
- ☐ $\frac{3\sqrt{5}}{2}$
- ☐ $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
- ☐ $\frac{5\sqrt{3}}{2}$
- ☐ $\frac{5\sqrt{5}}{2}$

Correction : Le domaine est représenté ci-dessous:



Les courbes s'intersectent au point dont l'abscisse x satisfait $\sqrt{2x+1}=\sqrt{x+3}$, donc au point $(2,\sqrt{5})$. On intègre par rapport à y, avec $x_1(y)=y^2-3$ et $x_2(y)=\frac{1}{2}\left(y^2-1\right)$:

$$A=\int_0^{\sqrt{5}}(x_2(y)-x_1(y))\,dy=\int_0^{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}-y^2+3\right)dy=\left[\frac{5}{2}y-\frac{y^3}{6}\right]_0^{\sqrt{5}}=\frac{5\sqrt{5}}{3}.$$

Question 4 (3 points)
Soit Γ le graphe de la fonction $f(x)=\dfrac{1}{3x^3}$, $x\neq 0$, et soit t la tangente à Γ issue du point $(4,0)$. Alors la pente de t est égale à

- ■ $-\frac{1}{81}$
- ☐ $-\frac{1}{4}$
- ☐ $-\frac{1}{256}$
- ☐ $-\frac{1}{125}$
- ☐ $-\frac{1}{8}$
- ☐ $-\frac{1}{25}$
- ☐ $-\frac{1}{9}$
- ☐ $-\frac{1}{16}$

Correction : Si t est la tangente à Γ issue du point $(4,0)$, nommons α l'abscisse du point de contact avec Γ $(\alpha\neq 0)$. On a donc $\dfrac{f(\alpha)-0}{\alpha-4}=f'(\alpha)$, c'est-à-dire $\dfrac{\frac{1}{3\alpha^3}-0}{\alpha-4}=-\dfrac{1}{\alpha^4}$, qui après simplification s'écrit $\dfrac{1}{3}=-\dfrac{\alpha-4}{\alpha}$. On obtient $\alpha=3$, t est donc de pente $-\frac{1}{\alpha^4}=-\frac{1}{81}$.

Question 5 (3 points)
Soient $f(x)=\cos(\frac{\pi}{2}x)$ et $g(x)=\alpha\cdot(x-1)$, où $\alpha\in\mathbb{R}$ est une constante. Pour quelle valeur de α les fonctions f et g sont-elles infiniment petites équivalentes (IPE) au voisinage de $x_0=1$?

- ☐ $\alpha=-\frac{2}{\pi}$
- ☐ $\alpha=\pi$
- ■ $\alpha=-\frac{\pi}{2}$
- ☐ $\alpha=\frac{2}{\pi}$
- ☐ $\alpha=-1$
- ☐ $\alpha=\frac{\pi}{2}$
- ☐ $\alpha=-\pi$
- ☐ $\alpha=1$

Correction : On a bien $\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}g(x)=0$. Pour que f et g soient IPE au voisinage de 1, il faut que $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=1$. Or $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\alpha(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\alpha}=\frac{-\frac{\pi}{2}}{\alpha}$, par la règle de Bernouilli-L'hôpital. Pour que cette limite vaille 1, il faut que $\alpha=-\frac{\pi}{2}$.

Question 6 (3 points)
La limite

$$\lim_{x\to 0^+} \sin(x)^{\frac{1}{\ln(2x)}}$$

vaut

- [ ] e^2
- [ ] $\sqrt{e}$
- [ ] $+\infty$
- [x] e
- [ ] e^{-1}
- [ ] 0
- [ ] 1
- [ ] e^{-2}

Correction : On a une indétermination du type 0^0. On remarque que

$$\sin(x)^{\frac{1}{\ln(2x)}} = \exp\left(\ln\left(\sin(x)\right)\cdot\frac{1}{\ln(2x)}\right) = \exp\left(\frac{\ln\left(\sin(x)\right)}{\ln(2x)}\right).$$

Or $\frac{\ln(\sin(x))}{\ln(2x)}$ est une indétermination du type $\frac{\infty}{\infty}$. Pour lever cette indétermination on applique la règle de Bernouilli-L'hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(\sin(x)\right)}{\ln(2x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\cos(x)}{\sin(x)}}{\frac{2}{2x}} = \lim_{x\to 0^+}\cos(x)\frac{x}{\sin(x)} = 1,$$

car $\lim_{x\to 0^+}\cos(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sin(x)} = 1$. Par la continuité de la fonction exponentielle, on a donc

$$\lim_{x\to 0^+}\sin(x)^{\frac{1}{\ln(2x)}} = \lim_{x\to 0^+}\exp\left(\frac{\ln\left(\sin(x)\right)}{\ln(2x)}\right) = \exp\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(\sin(x)\right)}{\ln(2x)}\right) = \exp(1) = e.$$

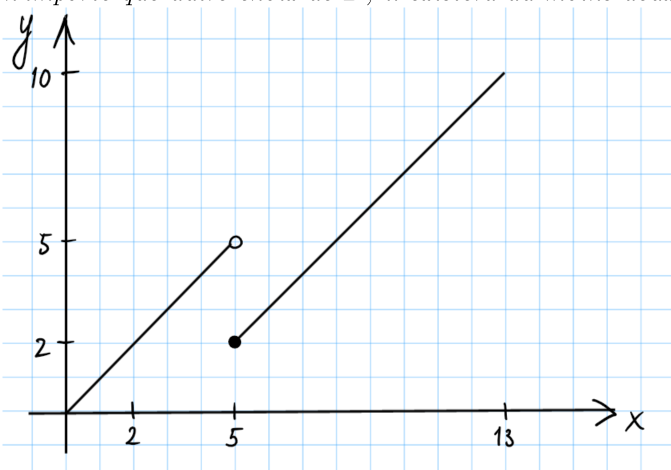
Question 7 (3 points)
Soit $f : [0,13] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \le x < 5\,, \\ x-3 & \text{si } 5 \le x \le 13\,. \end{cases}$$

Parmi les ensembles D ci-dessous, lequel rend la restriction $f : D \to \mathbb{R}$ injective?

- [ ] $D = [0,3] \cup [5,7]$
- [x] $D = [0,4] \cup [8,13]$
- [ ] $D = [0,2] \cup [5,13]$
- [ ] $D = [0,5[\cup]5,13]$
- [ ] $D = [0,6]$
- [ ] $D = [1,10]$

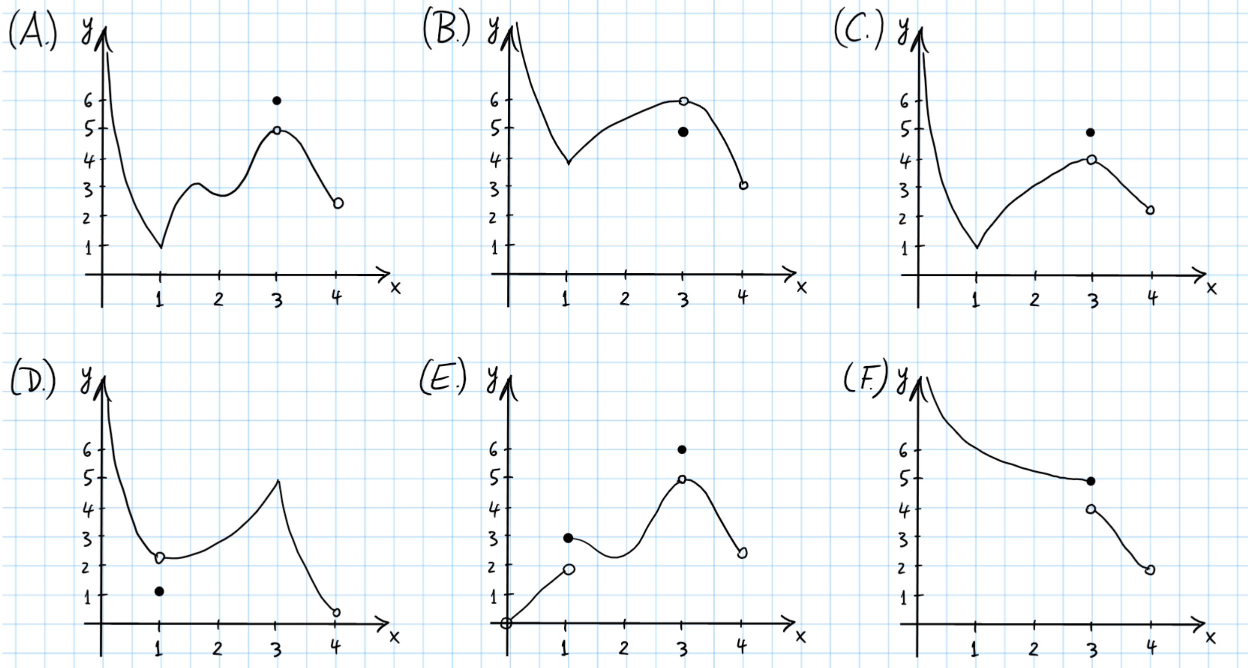
Correction : On peut vérifier, sur la représentation graphique de la fonction, que pour la restriction de f à n'importe que autre choix de D, il existera au moins deux valeurs du domaine ayant la même image par f.



Question 8 (3 points)
Soit $f :]0,4[\to \mathbb{R}$ une fonction qui

- est continue sur $]0,4[\setminus\{3\}$, mais pas continue en $x = 3$,
- n'est pas dérivable en $x = 1$ et en $x = 3$,
- possède un minimum local qui n'est pas global,
- est telle que $\lim_{x\to 3} f(x) = 5$.

Parmi les graphes (A) à (F) ci-dessous, lequel peut être le graphe de la fonction f?



- [ ] (C)
- [ ] (E)
- [ ] (D)
- [ ] (B)
- [x] (A)
- [ ] (F)

Correction : (A) est le seul graphe qui correspond à une fonction satisfaisant les quatre conditions données: (B) ne satisfait pas la condition 4, (C) ne satisfait pas les conditions 3 et 4, (D) et (E) ne satisfont pas la condition 1, et (F) ne satisfait pas les conditions 2, 3 et 4.

Question 9 (3 points)
Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble de tous les cylindres de base circulaire dont le volume est fixé et égal à $V > 0$. Considérons le cylindre de $\mathcal{C}$ dont l'aire extérieure (incluant celle des couvercles inférieur et supérieur) est minimale. Alors le rayon de la base de ce cylindre vaut

- [ ] $r = \sqrt[3]{\frac{2V}{\pi}}$
- [ ] $r = \sqrt{\frac{3V}{\pi}}$
- [ ] $r = \frac{2V}{\pi}$
- [ ] $r = \sqrt{\frac{2V}{\pi}}$
- [ ] $r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$
- [ ] $r = \frac{V}{\pi}$
- [x] $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$
- [ ] $r = \sqrt{\frac{V}{\pi}}$

Correction : Un cylindre de rayon r et hauteur h appartenant à $\mathcal{C}$ satisfait $\pi r^2 h = V$, c'est-à-dire $h = \frac{V}{\pi r^2}$. On cherche à minimiser l'aire extérieure d'un tel cylindre, donnée par $S(r) = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\frac{V}{r} + 2\pi r^2$, $r > 0$. Comme S est dérivable sur son domaine, les seules valeurs de r où elle peut atteindre un extremum doivent être des points où S' s'annule. Or $S'(r) = -\frac{2V}{r^2} + 4\pi r$ s'annule et change de signe en $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ et admet donc son unique extremum (un minimum) en ce point.

Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Excepté pour la Question 10, vos réponses doivent être soigneusement justifiées, et toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 10: *Cette question est notée sur 8 points.*

■ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8

Les questions ci-dessous ne demandent pas de justification. (*Attention*: Un dessin n'est pas considéré comme une réponse!)

(a) Donner un contre-exemple explicite de suite qui démontre que l'énoncé suivant est faux:

"Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite strictement croissante. Alors $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$."

Contre-exemple:

$$a_n = -\frac{1}{n}$$

(b) Donner un exemple explicite d'une suite $(a_n)_{n\geq 1}$ qui ne tend pas vers $+\infty$, mais qui possède la propriété suivante: pour tout $M > 0$, il existe $n \geq 1$ tel que $a_n > M$.

Exemple:

$$a_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

(c) Donner un exemple explicite d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui n'est pas continue en $x_0 = 2$, mais qui possède la propriété suivante: il existe $\delta > 0$ tel que $|x - 2| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(2)| \leq 1$.

Exemple:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 2\,, \\ \frac{1}{2} & \text{si } x > 2\,. \end{cases}$$

(d) Donner un exemple explicite de fonction continue $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ pour laquelle il n'existe aucun $c \in \,]0, 2[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(2) - f(0)}{2 - 0}$.

Exemple: $f(x) = |x - \frac{1}{2}|$.

(e) Donner un exemple explicite d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to 3} \dfrac{f(x) - 5}{x - 3} = 7$.

Exemple: $f(x) = 7x - 16$

Question 11: *Cette question est notée sur 6 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6

(a) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, et $f : \mathbb{R} \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$. Définir rigoureusement ce que signifie

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty\,.$$

(b) Soit $f(x) = \frac{1}{(3x+2)^2}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\}$. Montrer, en utilisant la définition donnée au point (a), que

$$\lim_{x \to -\frac{2}{3}} f(x) = +\infty\,.$$

Solution

(a)

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \iff \forall M\,,\, \exists \delta > 0 \text{ tel que } 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) > M,$$

où les inégalités $|x - x_0| < \delta$ et $f(x) > M$ peuvent être larges (mais $\delta > 0$ et $0 < |x - x_0|$ doivent être des inégalités strictes!)

(b) Soit $f(x) = \frac{1}{(3x+2)^2}$. On veut montrer que $\lim_{x \to -\frac{2}{3}} f(x) = +\infty$.

Soit $M > 0$. Alors

$$\begin{aligned} f(x) > M \quad &\iff \quad \frac{1}{(3x+2)^2} > M \\ &\iff \quad (3x+2)^2 < \frac{1}{M} \\ &\iff \quad |3x+2| < \frac{1}{\sqrt{M}} \\ &\iff \quad \left|x + \tfrac{2}{3}\right| < \frac{1}{3\sqrt{M}}. \end{aligned}$$

On choisit $\delta = \frac{1}{3\sqrt{M}}$ (or tout δ satisfaisant $0 < \delta < \frac{1}{3\sqrt{M}}$). Ce δ est tel que

$$0 < \left|x - \left(-\tfrac{2}{3}\right)\right| < \delta \quad \implies \quad \frac{1}{(3x+2)^2} > M,$$

ce qui montre bien que $\lim_{x \to -\frac{2}{3}} f(x) = +\infty$.

Question 12: *Cette question est notée sur 6 points.*

0 1 2 3 4 5 6

Calculer les primitives de $f(x) = x^3\sqrt{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.
Solution:
Il y a plusieurs méthodes possibles.

(a) Par le changement de variable $x = \sinh(t)$, $dx = \cosh(t)dt$. Puisque $\cosh(t)^2 - \sinh(t)^2 = 1$, et que $\cosh(t) \geq 1 > 0$,

$$\begin{aligned}
\int x^3\sqrt{x^2+1}\,dx &= \int \sinh(t)^3\sqrt{\sinh(t)^2+1}\ \cosh(t)\,dt \\
&= \int \sinh(t)^3\sqrt{\cosh(t)^2}\ \cosh(t)\,dt \\
&= \int \sinh(t)^3\cosh(t)^2\,dt \\
&= \int \sinh(t)^2\cosh(t)^2\ \sinh(t)dt \\
&= \int (\cosh(t)^2-1)\cosh(t)^2\ \sinh(t)dt\,,
\end{aligned}$$

où dans la troisième égalité on a utilisé le fait que $\sqrt{\cosh(t)^2} = |\cosh(t)| = \cosh(t)$.

Cette dernière intégrale devient, en posant $w = \cosh(t)$,

$$\begin{aligned}
\int (\cosh(t)^2-1)\cosh(t)^2\ \sinh(t)dt = \int (w^2-1)w^2\,dw = \int (w^4-w^2)\,dw \\
&= \frac{1}{5}w^5 - \frac{1}{3}w^3 + C \\
&= \frac{1}{5}\cosh(t)^5 - \frac{1}{3}\cosh(t)^3 + C \\
&= \frac{1}{5}\sqrt{x^2+1}^5 - \frac{1}{3}\sqrt{x^2+1}^3 + C\,.
\end{aligned}$$

(b) Par le changement de variable $u = x^2+1$, qui donne $du = 2x\,dx$. On a donc $x\,dx = \frac{1}{2}du$, ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\int x^3\sqrt{x^2+1}\,dx = \int x\cdot x^2\sqrt{x^2+1}\,dx &= \frac{1}{2}\int x^2\sqrt{x^2+1}\ 2xdx \\
&= \frac{1}{2}\int (u-1)\sqrt{u}\,du \\
&= \frac{1}{2}\int (u^{3/2}-u^{1/2})\,du \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}u^{5/2} - \frac{2}{3}u^{3/2}\right) + C \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}(x^2+1)^{5/2} - \frac{2}{3}(x^2+1)^{3/2}\right) + C \\
&= \frac{1}{5}(x^2+1)^{5/2} - \frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2} + C \\
&= \frac{1}{5}\sqrt{x^2+1}^5 - \frac{1}{3}\sqrt{x^2+1}^3 + C\,.
\end{aligned}$$

Remarque: de manière équivalente, on aurait pu poser le changement de variable $u = x^2$.

(c) On peut aussi intégrer par parties:

$$\begin{aligned}\int x^3\sqrt{x^2+1}\,dx &= \frac{1}{2}\int x^2 \underbrace{2x\sqrt{x^2+1}}_{=(\frac{3}{2}(x^2+1)^3/2)'}\,dx\\ &= \frac{1}{2}\left(x^2\left(\tfrac{3}{2}(x^2+1)^{3/2}\right) - \int \underbrace{(2x)}_{=(x^2)'}\tfrac{2}{3}\sqrt{x^2+1}\,dx\right)\\ &= \frac{1}{3}x^2(x^2+1)^{3/2} - \frac{1}{3}\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx\end{aligned}$$

Avec $w = x^2+1$,

$$\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx = \sqrt{w}\,dw = \frac{2}{5}w^{5/2} + C = \frac{2}{5}(x^2+1)^{5/2} + C\,.$$

En remettant tout ensemble,

$$\begin{aligned}\int x^3\sqrt{x^2+1}\,dx &= \frac{3}{4}x^2(x^2+1)^{3/2} - \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}(x^2+1)^{3/2} + C\\ &= \frac{1}{3}x^2(x^2+1)^{3/2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}(x^2+1)^{5/2} + C.\end{aligned}$$

Remarque: cette primitive est la même que celle obtenue par les autres méthodes, puisqu'on obtient, en factorisant par $\frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2}$,

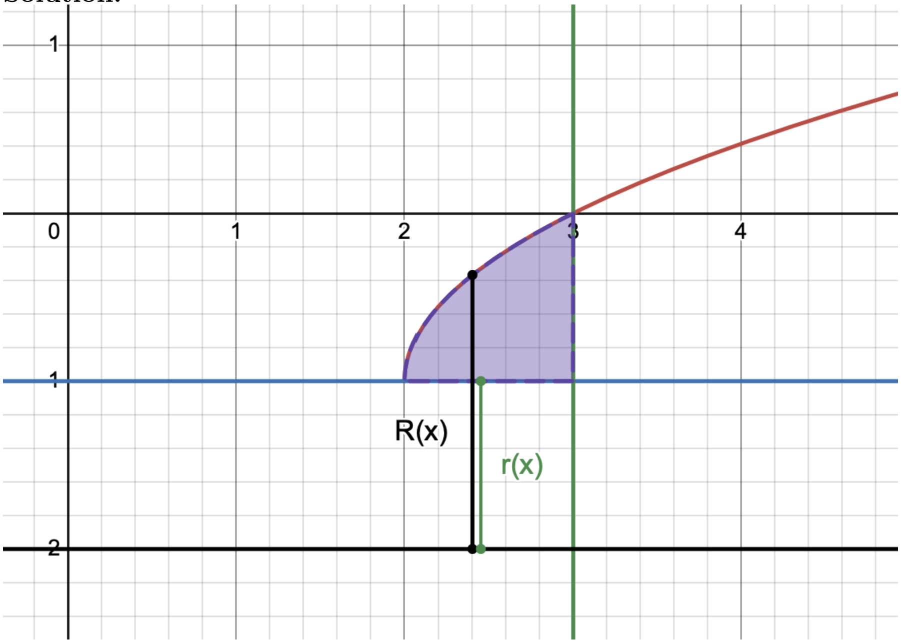
$$\begin{aligned}\frac{1}{3}x^2(x^2+1)^{3/2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}(x^2+1)^{5/2} &= \frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2}\left(x^2 - \frac{2}{5}(x^2+1)\right)\\ &= \frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2}\left(\frac{3}{5}(x^2+1) - 1\right)\\ &= \frac{1}{5}(x^2+1)^{5/2} - \frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2}.\end{aligned}$$

Question 13: *Cette question est notée sur 6 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

Soit Γ la courbe $y = \sqrt{x-2} - 1$, et R la région bornée délimitée par Γ, la droite d'équation $y = -1$ et la droite d'équation $x = 3$. Calculer le volume du solide de révolution obtenu en faisant tourner R autour de l'axe $y = -2$.

Solution:



Le volume V est donné par

$$\begin{aligned}
V &= \int_2^3 \pi \left[\left((\sqrt{x-2} - 1) - (-2) \right)^2 - (-1 - (-2))^2 \right] \, dx \\
&= \pi \int_2^3 \left((1 + \sqrt{x-2})^2 - 1 \right) \, dx \\
&= \pi \int_2^3 \left(x - 2 + 2\sqrt{x-2} \right) \, dx \\
&= \pi \left[\frac{(x-2)^2}{2} + \frac{4}{3}(x-2)^{3/2} \right]_2^3 \\
&= \frac{11\pi}{6}.
\end{aligned}$$

Question 14: *Cette question est notée sur 7 points.*

☒ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7

On considère la courbe paramétrée $M(t) = (x(t), y(t))$,

$$x(t) = \frac{1}{t-1}\,, \qquad y(t) = \frac{1}{t^2+2t-3}\,, \qquad t \in D_{\text{déf}}\,.$$

(a) Étudier les branches infinies de la courbe.

(b) Trouver, s'il y en a, les points stationnaires et les points à tangence horizontale/verticale.

Solution

(a) Remarquons que

$$x(t) = \frac{1}{t-1}\,, \qquad y(t) = \frac{1}{(t-1)(t+3)}$$

et donc $D_{\text{def}} = \mathbb{R} \setminus \{1, -3\}$.

Considérons les branches infinies.

- Puisque

$$\lim_{t\to -3\pm} x(t) = -1/4\,, \qquad \lim_{t\to -3\pm} y(t) = \mp\infty\,.$$

la courbe possède **l'asymptote verticale d'équation** $x = -1/4$.

- Ensuite, puisque

$$\lim_{t\to 1\pm} x(t) = \pm\infty\,, \qquad \lim_{t\to 1\pm} y(t) = \pm\infty\,,$$

on considère la possibilité d'une asymptote oblique. Comme

$$m = \lim_{t\to 1^\pm} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to 1^\pm} \frac{1}{t+3} = \frac{1}{4}$$

et

$$h = \lim_{t\to 1^\pm} (y(t) - (1/4)x(t)) = \lim_{t\to 1^\pm} \frac{-1}{4(t+3)} = -\frac{1}{16}\,,$$

on a **une asymptote oblique d'équation** $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{16}$.

(b) Calculons le vecteur tangent :

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{(t-1)^2} \\ \frac{-(2t+2)}{(t^2+2t-3)^2} \end{pmatrix}$$

Puisque $\dot{x}(t) \neq 0$ pour tout $t \in D_{def}$, **il n'existe aucun point stationnaire**.

Par contre, en $t = -1$,

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -1/4 \\ 0 \end{pmatrix},$$

on en déduit que la courbe **possède un point à tangence horizontale en** $t = -1$, c'est-à-dire au point $M(-1) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$.