Enseignant·es: Friedli, Khukhro, Maatouk
Analyse B - MAN
5 juillet 2023
Durée : 210 minutes

1

Bugs Bunny

SCIPER : **123456**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 13 questions et 20 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table et vérifiez votre nom et votre numéro SCIPER sur la première page.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  les points indiqués si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons sont pas à rendre mais ne seront pas corrigés.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren
☒ ☑ ■	☐	☐

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Trigonométrie circulaire

Formules d'addition :

$$\sin(x+y) = \sin x\,\cos y + \cos x\,\sin y \qquad \cos(x+y) = \cos x\,\cos y - \sin x\,\sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\,\tan y}$$

Formules de bissection :

$$\sin^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{2} \qquad \cos^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1+\cos x}{2} \qquad \tan^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

Expressions de $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$ en fonction de $\tan(\frac{x}{2})$:

$$\sin x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \cos x = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \tan x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1-\tan^2(\frac{x}{2})}$$

Formules de transformation somme-produit :

$$\cos x + \cos y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \cos x - \cos y = -2\sin(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \sin x - \sin y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

Trigonométrie hyperbolique

Définitions :

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Formules d'addition :

$$\sinh(x+y) = \sinh x\,\cosh y + \cosh x\,\sinh y \qquad \cosh(x+y) = \cosh x\,\cosh y + \sinh x\,\sinh y$$

$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x\,\tanh y}$$

Formules de bissection :

$$\sinh^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x - 1}{2} \qquad \cosh^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x + 1}{2} \qquad \tanh(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x - 1}{\sinh x} = \frac{\sinh x}{\cosh x + 1}$$

Dérivée de quelques fonctions

$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\arg\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\arg\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\arg\tanh x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\arg\coth x$	$\frac{1}{1-x^2}$

Première partie, questions à choix unique

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question. Une bonne réponse vaut le nombre de points indiqués. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou aucune réponse 0 point. Il n'y a pas de points négatifs.

Question 1 (3 points)
La limite

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n-1}-\sqrt{n+2\sqrt{n}}\right)$$

existe et est égale à

☐ $-\sqrt{2}$ ☐ 0 ☐ -3 ☐ $\frac{1}{2}$
☐ -2 ☐ $-\frac{1}{2}$ ☐ 2 ■ -1

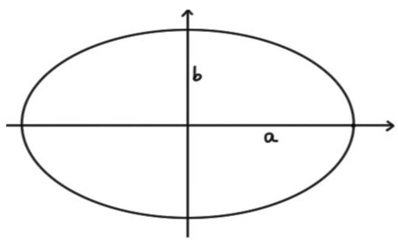
Question 2 (3 points)
L'intégrale impropre

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}\,dx$$

converge et est égale à

☐ $1-\frac{\pi}{4}$ ■ $\frac{\pi}{4}$ ☐ $1-\frac{\pi}{2}$ ☐ $\frac{\pi}{2}$

Question 3 (3 points)
Parmi tous les rectangles inscrits dans l'ellipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$,



et dont les côtés sont parallèles aux axes Ox et Oy, celui d'aire maximale a pour aire

☐ $A=\frac{1}{3}\pi ab$ ☐ $A=\frac{1}{2}\pi ab$ ☐ $A=\frac{4\sqrt{2}}{3}ab$ ☐ $A=\frac{3}{2}ab$ ■ $A=2ab$

Question 4 (3 points)
Soit Γ la courbe $y=(x+1)^2$, avec $-1\le x\le 0$. Soit R la région du plan délimitée par Γ, l'axe Ox, et l'axe Oy. Calculer le volume du solide de révolution obtenu par la rotation de R autour de l'axe Oy.

☐ $\frac{\pi}{3}$ ☐ $\frac{\pi}{4}$ ☐ $\frac{\pi}{2}$ ■ $\frac{\pi}{6}$

Question 5 (3 points)
"La fonction $f(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée $f'(x)$ est continue en x_0."
Parmi les affirmations suivantes, laquelle est équivalente à l'affirmation ci-dessus ?

- ☐ $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existe.
- ☐ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existe, et $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x_0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- ☐ $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- ■ $f'(x) := \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = f'(x_0)$.

Question 6 (3 points)
Soit Γ le graphe de $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$, et soit t la tangente à Γ issue du point $(-3, 1)$. Un seul des points ci-dessous appartient à t. Lequel ?

■ $(6, 0)$ ☐ $(-2, 1)$ ☐ $(2, \frac{1}{2})$ ☐ $(1, \frac{1}{2})$

Question 7 (3 points)
La longueur de l'arc paramétré

$$\begin{cases} x(t) = t - 1 \\ y(t) = \frac{2}{3}t^{3/2} + 3 \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 1$$

est égale à

■ $\frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$ ☐ $\frac{3}{2}(\sqrt{2} - 1)$ ☐ $\frac{1}{2}\operatorname{arg\,sinh}(1)$ ☐ $\frac{1}{2}\operatorname{arg\,sinh}(1) + \frac{\sqrt{2}}{2}$

Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 8: *Cette question est notée sur 7 points.*

■ 0 □ 1 □ 2 □ 3 □ 4 □ 5 □ 6 □ 7

(a) Pour une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, définir rigoureusement

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

(b) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$a_n := 2\sqrt{n} - 7.$$

Montrer, en utilisant la définition donnée au point (a), que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

(c) Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$b_n := 2\sqrt{n} - 6 + \sin(n).$$

En utilisant le point (b), calculer $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Solution

(a) $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \iff \forall M, \exists N \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq N \Longrightarrow a_n \geq M$.

(b) Fixons $M \in \mathbb{R}$ $a_n := 2\sqrt{n} - 7$. On a

$$\begin{aligned} a_n \geq M &\iff 2\sqrt{n} - 7 \geq M \\ &\iff 2\sqrt{n} \geq M + 7 \\ &\iff \sqrt{n} \geq \frac{M+7}{2} \\ &\iff n \geq \left(\frac{M+7}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

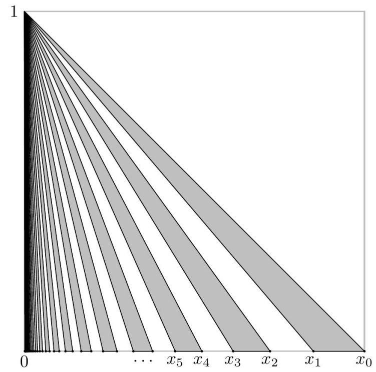
et donc pour $n \geq N := \left(\frac{M+7}{2}\right)^2$, on a $a_n \geq M$. On déduit que $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

(c) Puisque $\sin(n) \geq -1$ $\forall n$, on a, pour tout n, $b_n := 2\sqrt{n} - 6 + \sin(n) \geq 2\sqrt{n} - 6 - 1 = a_n$ pour le choix de $C = -7$. Comme $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, on a donc aussi $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ par le Théorème du gendarme (ou “chien méchant”).

Question 9: *Cette question est notée sur 7 points.*

■ 0 □ 1 □ 2 □ 3 □ 4 □ 5 □ 6 □ 7

On fixe $0 < p < 1$, et on considère la suite $x_n = p^n$, $n \geq 0$. On considère alors la région R formée des triangles grisés dans le carré 1×1 ci-dessous:



Calculer l'aire totale de R.

Solution

Chaque triangle hachuré est de hauteur égale à 1. En partant depuis la droite:

- Base triangle numéro 1: $1 - x_1 = x_0 - x_1$
- Base triangle numéro 2: $x_2 - x_3$
- Base triangle numéro 3: $x_4 - x_5$
- Base triangle numéro 4: $x_6 - x_7$
- $\vdots$
- Base triangle numéro n: $x_{2n-2} - x_{2n-1}$
- $\vdots$

Ainsi, l'aire du n-ème triangle est égale à $\frac{1}{2} \cdot (x_{2n-2} - x_{2n-1}) \cdot 1$, donc l'aire totale hachurée est

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(x_{2n-2} - x_{2n-1}) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (p^{2n-2} - p^{2n-1}) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (p^{2n-2} - p^{2n-1}) \\
&= \frac{1}{2} \left(p^0 - p + p^2 - p^3 + p^4 - p^5 + p^6 \cdots \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(1 + (-p) + (-p)^2 + (-p)^3 + (-p)^4 + (-p)^5 + \cdots \right) \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{1 - (-p)} \\
&= \frac{1}{2(1+p)} .
\end{aligned}$$

Question 10: *Cette question est notée sur 8 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8

Soit

$$f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{x^2-1}{x^2+3}$$

(a) Montrer que f est injective.

(b) Déterminer l'ensemble image de f.

(c) Modifier l'ensemble d'arrivée de f de façon à obtenir une fonction bijective, et donner sa fonction réciproque.

Solution

(a)

$$f(a) = f(b) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a^2-1}{a^2+3} = \frac{b^2-1}{b^2+3} \quad \Leftrightarrow \quad 4a^2 - 4b^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4(a-b)(a+b) = 0$$

donc si $f(a) = f(b)$, alors soit $a = b$, soit $a+b = 0$. Or si a, b sont distincts et appartiennent à $[0, +\infty[$, ils ne peuvent pas satisfaire $a + b = 0$. f est donc injective.

(Autre méthode: prouver que $f'(x) > 0$ sur $[0, +\infty[$, ce qui implique que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et donc, par un résultat du cours, injective sur cet intervalle.)

(b) L'ensemble image est l'ensemble des $y \in \mathbb{R}$ tels qu'il existe $x \in [0, +\infty[$ avec $f(x) = y$, c'est-à-dire l'ensemble des $y \in \mathbb{R}$ tels que l'équation $\frac{x^2-1}{x^2+3} = y$ admet une solution dans $[0, +\infty[$.

Or

$$\frac{x^2-1}{x^2+3} = y \Leftrightarrow (1-y)x^2 = 3y + 1.$$

- Si $y = 1$, cette équation n'admet aucune solution (il n'existe aucun x tel que $0x = 1$)
- Si $y \neq 1$, l'équation devient $x^2 = \frac{3y+1}{1-y}$. L'étude du signe de $\frac{3y+1}{1-y}$ montre que ce quotient est ≥ 0 si et seulement si $y \in [-\frac{1}{3}, 1[$.

En conclusion, $\mathrm{Im}(f) = [-\frac{1}{3}, 1[$.

(c) La fonction restreinte

$$\tilde{f} : [0, +\infty[\longrightarrow \left[-\frac{1}{3}, 1\right[$$
$$x \longmapsto \frac{x^2-1}{x^2+3}$$

est bijective, puisque f est injective et qu'on a restreint l'ensemble d'arrivée à $\mathrm{Im}(f) = [-\frac{1}{3}, 1[$. Sa fonction réciproque $\tilde{f}^{-1} : \mathrm{Im}(f) \longrightarrow [0, +\infty[$ associe à y l'unique $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $\tilde{f}(x) = y$. Or pour tout $y \in [-\frac{1}{3}, 1[$,

$$\tilde{f}(x) = y \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x^2+3} = y \Leftrightarrow x^2 = \frac{3y+1}{1-y} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{3y+1}{1-y}},$$

puisque $x \geq 0$. On a donc

$$\tilde{f}^{-1}(x) = \sqrt{\frac{3x+1}{1-x}}.$$

Question 11: *Cette question est notée sur 6 points.*

■ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6

Calculer la limite suivante, **sans utiliser** la règle de Bernoulli–l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\left(1-\cos(x)\right)-\frac{1}{2}\left(1-\cos(2x)\right)}{x^4}.$$

Solution

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{2\left(1-\cos(x)\right)-\frac{1}{2}\left(1-\cos(2x)\right)}{x^4} &= \lim_{x\to 0} \frac{2-2\cos(x)-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\cos^2(x)-\sin^2(x))}{x^4} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2-2\cos(x)-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\cos^2(x)-1+\cos^2(x))}{x^4} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2(x)-2\cos(x)+1}{x^4} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(\cos(x)-1)^2}{x^4} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(x^2/2)^2}{x^4} (\text{on utilise l'IPE } 1-\cos(x) \sim \frac{x^2}{2}) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{4x^4} \\
&= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Question 12: *Cette question est notée sur 11 points.*

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

Les deux questions ci-dessous sont indépendantes.

(a) Montrer que la courbe

$$\begin{cases} x(t) &= t^2 + t^3 \\ y(t) &= 2t^2 - 3t^3 \end{cases}$$

possède un point stationnaire en $t = 0$, puis esquisser l'allure de la courbe au voisinage de ce point.

(b) Trouver les branches infinies de la courbe donnée par

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{t} \\ y(t) = \dfrac{1}{e^t - 1} \end{cases} \qquad t \in D_{\text{def}} .$$

(Remarque: On ne demande pas d'esquisser la courbe.)

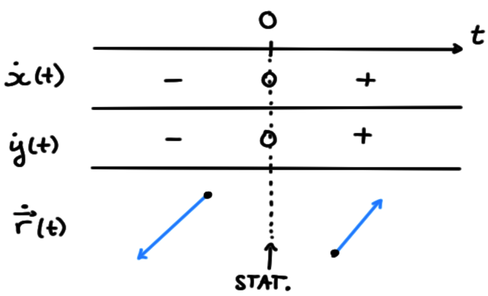
Solution

(a) On étudie $\dot{\vec{r}}(t) = \binom{\dot{x}(t)}{\dot{y}(t)}$:

$$\dot{x}(t) = 2t + 3t^2 = t(2+3t)$$
$$\dot{y}(t) = 4t - 9t^2 = t(4-9t)$$

On a donc $\dot{\vec{r}}(0) = \vec{0}$, ce qui montre bien que Γ possède un point stationnaire en $t = 0$.

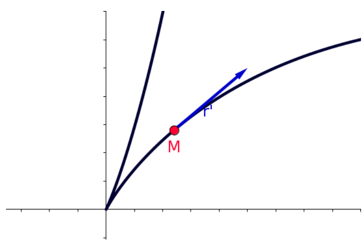
De plus, l'étude du signe des dérivées donne, au voisinage de $t = 0$:



Finalement,

$$\lim_{t\to 0} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{4-9t}{2+3t} = 2 .$$

L'esquisse:



(b) Puisque $\lim_{t\to 0^\pm} x(t) = \pm\infty$, $\lim_{t\to 0^\pm} y(t) = \pm\infty$, on étudie la courbe au voisinage de $t = 0$. On commence par

$$m = \lim_{t\to 0^\pm} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to 0^\pm} \frac{t}{e^t - 1} \overset{BH}{=} \lim_{t\to 0^\pm} \frac{1}{e^t} = 1\,,$$

puis

$$\begin{aligned} h = \lim_{t\to 0^\pm} (y(t) - x(t)) &= \lim_{t\to 0^\pm} \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t}\right) \\ &= \lim_{t\to 0^\pm} \left(\frac{t - e^t + 1}{t(e^t - 1)}\right) \\ &\overset{BH}{=} \lim_{t\to 0^\pm} \left(\frac{1 - e^t}{e^t + te^t - 1}\right) \\ &\overset{BH}{=} \lim_{t\to 0^\pm} \left(\frac{-e^t}{2e^t + te^t}\right) \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc la droite d'équation $y = x - \frac{1}{2}$ est asymptote oblique.

Question 13: *Cette question est notée sur 8 points.*

■0 □1 □2 □3 □4 □5 □6 □7 □8

Sur $]1, +\infty[$, résoudre l'équation différentielle ci-dessous, avec la condition initiale donnée.

$$y' - \frac{1}{x}y = \frac{1}{x-1}, \qquad y(2) = -2\ln 2\,.$$

Solution

1. **Equation homogène**
   L'équation est de la forme
   $$y'(x) + p(x)y(x) = q(x)\,,$$
   et l'équation homogène associée est de la forme
   $$y'(x) + p(x)y(x) = 0.$$
   La première étape est de trouver une primitive de $p(x) = -\frac{1}{x}$, par exemple
   $$P(x) = -\ln|x| = -\ln(x).$$
   Toutes les solutions du problème homogène sont donc de la forme
   $$y_h(x) = Ke^{-P(x)} = Kx\,, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

2. **Solution particulière de l'équation inhomogène**: Il y a plusieurs façons de procéder.

   (a) **(Facteur intégrant)** On cherche une solution particulière en utilisant le facteur intégrant: on multiplie les deux côtés de l'équation par $e^{P(x)} = \frac{1}{x}$, pour obtenir
   $$(e^{P(x)}y(x))' = \frac{1}{x(x-1)}.$$
   Pour intégrer le côté droit, on utilise la décomposition en éléments simples
   $$\begin{aligned}\int \frac{1}{x(x-1)}\,dx = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1}\right)dx &= -\ln|x| + \ln|x-1| + C\\ &= -\ln(x) + \ln(x-1) + C\\ &= \ln\frac{x-1}{x} + C\end{aligned}$$
   qui donne
   $$y(x) = e^{-P(x)}\left(\ln\frac{x-1}{x} + C\right) = x\left(\ln\frac{x-1}{x} + C\right)$$
   On peut choisir $C = 0$ pour obtenir la solution particulière $y_p(x) = x\ln\frac{x-1}{x}$. On a donc la solution générale de l'équation différentielle inhomogène:
   $$y(x) = Kx + x\ln\frac{x-1}{x}.$$

   (b) **(Variation de la constante)** On cherche une solution particulière de l'équation inhomogène en faisant varier la constante:
   $$y(x) = K(x)x\,.$$
   On a alors $y'(x) = K'(x)x + K(x)$, et en injectant dans l'équation de départ, et en simplifiant, on obtient
   $$K'(x) = \frac{1}{x(x-1)},$$

qui mène (voir la variante précédente) à

$$K(x) = -\ln(x) + \ln(x-1) + C$$

On peut choisir $C = 0$ pour obtenir la solution particulière $y_p(x) = x \ln \frac{x-1}{x}$. On a donc la solution générale de l'équation différentielle inhomogène:

$$y(x) = Kx + x \ln \frac{x-1}{x}.$$

3. Condition initiale:
Avec la condition initiale pour $y(2)$, on trouve

$$-2\ln 2 = 2K + 2\ln\frac{1}{2} = 2K - 2\ln 2,$$

et donc $K = 0$. La solution de l'équation différentielle qui satisfait cette condition initiale est donc

$$y(x) = x \ln \frac{x-1}{x}.$$