

**EPFL**

Enseignant·es: Friedli, Khukhro, Maatouk

Analyse B - MAN

5 juillet 2023

Durée : 210 minutes

**1**

# Bugs Bunny

SCIPER: **123456**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 13 questions et 20 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table et vérifiez votre nom et votre numéro SCIPER sur la première page.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera:
  - les points indiqués si la réponse est correcte,
  - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - 0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les feuilles de brouillon seront ramassées mais pas corrigées.

Respectez les consignes suivantes   Observe this guidelines   Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse   select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse   NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse   Correct an answer Antwort korrigieren
<input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
ce qu'il ne faut PAS faire   what should NOT be done   was man NICHT tun sollte		



## Trigonométrie circulaire

Formules d'addition :

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y & \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \tan(x+y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}\end{aligned}$$

Formules de bissection :

$$\begin{aligned}\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{1 - \cos x}{2} & \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{1 + \cos x}{2} & \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}\end{aligned}$$

Expressions de  $\sin x$ ,  $\cos x$  et  $\tan x$  en fonction de  $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$  :

$$\begin{aligned}\sin x &= \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} & \cos x &= \frac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} & \tan x &= \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}\end{aligned}$$

Formules de transformation somme-produit :

$$\begin{aligned}\cos x + \cos y &= 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) & \cos x - \cos y &= -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ \sin x + \sin y &= 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) & \sin x - \sin y &= 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\end{aligned}$$

## Trigonométrie hyperbolique

Définitions :

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Formules d'addition :

$$\begin{aligned}\sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y & \cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \\ \tanh(x+y) &= \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}\end{aligned}$$

Formules de bissection :

$$\sinh^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cosh x - 1}{2} \quad \cosh^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cosh x + 1}{2} \quad \tanh\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cosh x - 1}{\sinh x} = \frac{\sinh x}{\cosh x + 1}$$

## Dérivée de quelques fonctions

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sinh x$	$\cosh x$	$\arg \sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\cosh x$	$\sinh x$	$\arg \cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$\arg \tanh x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\text{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$	$\arg \coth x$	$\frac{1}{1-x^2}$

**Première partie, questions à choix unique**

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question. Une bonne réponse vaut le nombre de points indiqués. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou aucune réponse 0 point. Il n'y a pas de points négatifs.

**Question 1 (3 points)**

La limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{n-1} - \sqrt{n+2\sqrt{n}} \right)$$

existe et est égale à

- $-\sqrt{2}$   
  $-2$

- 0  
  $-\frac{1}{2}$

- 3  
 2

- $\frac{1}{2}$   
 -1

**Question 2 (3 points)**

L'intégrale impropre

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx$$

converge et est égale à

- $1 - \frac{\pi}{4}$

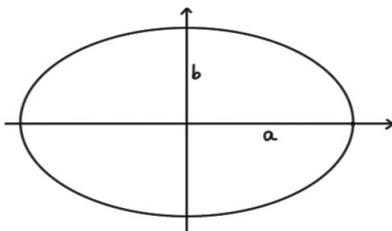
- $\frac{\pi}{4}$

- $1 - \frac{\pi}{2}$

- $\frac{\pi}{2}$

**Question 3 (3 points)**

Parmi tous les rectangles inscrits dans l'ellipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,



et dont les côtés sont parallèles aux axes  $Ox$  et  $Oy$ , celui d'aire maximale a pour aire

- $A = \frac{1}{3}\pi ab$   
  $A = \frac{1}{2}\pi ab$   
  $A = \frac{4\sqrt{2}}{3}ab$   
  $A = \frac{3}{2}ab$   
  $A = 2ab$

**Question 4 (3 points)**

Soit  $\Gamma$  la courbe  $y = (x+1)^2$ , avec  $-1 \leq x \leq 0$ . Soit  $R$  la région du plan délimitée par  $\Gamma$ , l'axe  $Ox$ , et l'axe  $Oy$ . Calculer le volume du solide de révolution obtenu par la rotation de  $R$  autour de l'axe  $Oy$ .

- $\frac{\pi}{3}$

- $\frac{\pi}{4}$

- $\frac{\pi}{2}$

- $\frac{\pi}{6}$

**Question 5** (3 points)

“La fonction  $f(x)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et sa dérivée  $f'(x)$  est continue en  $x_0$ .”

Parmi les affirmations suivantes, laquelle est équivalente à l'affirmation ci-dessus ?

- $\lim_{h \rightarrow 0} f(x + h) = f(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , et  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$  existe.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existe, et  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = f'(x_0)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x + h) - f'(x)}{h}$  existe pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , et  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .
- $f'(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$  existe pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , et  $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = f'(x_0)$ .

**Question 6** (3 points)

Soit  $\Gamma$  le graphe de  $f(x) = \frac{1}{x}$  sur  $]0, +\infty[$ , et soit  $t$  la tangente à  $\Gamma$  issue du point  $(-3, 1)$ . Un seul des points ci-dessous appartient à  $t$ . Lequel ?

- $(6, 0)$
- $(-2, 1)$
- $(2, \frac{1}{2})$
- $(1, \frac{1}{2})$

**Question 7** (3 points)

La longueur de l'arc paramétré

$$\begin{cases} x(t) = t - 1 \\ y(t) = \frac{2}{3}t^{3/2} + 3 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1$$

est égale à

- $\frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$
- $\frac{3}{2}(\sqrt{2} - 1)$
- $\frac{1}{2} \arg \sinh(1)$
- $\frac{1}{2} \arg \sinh(1) + \frac{\sqrt{2}}{2}$



## Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

**Question 8:** *Cette question est notée sur 7 points.*

<sub>0</sub>     <sub>1</sub>  <sub>2</sub>  <sub>3</sub>  <sub>4</sub>  <sub>5</sub>     <sub>6</sub>  <sub>7</sub>

- (a) Pour une suite réelle  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , définir rigoureusement

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty.$$

- (b) Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par

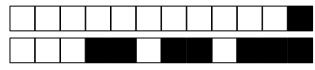
$$a_n := 2\sqrt{n} - 7.$$

Montrer, en utilisant la définition donnée au point (a), que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ .

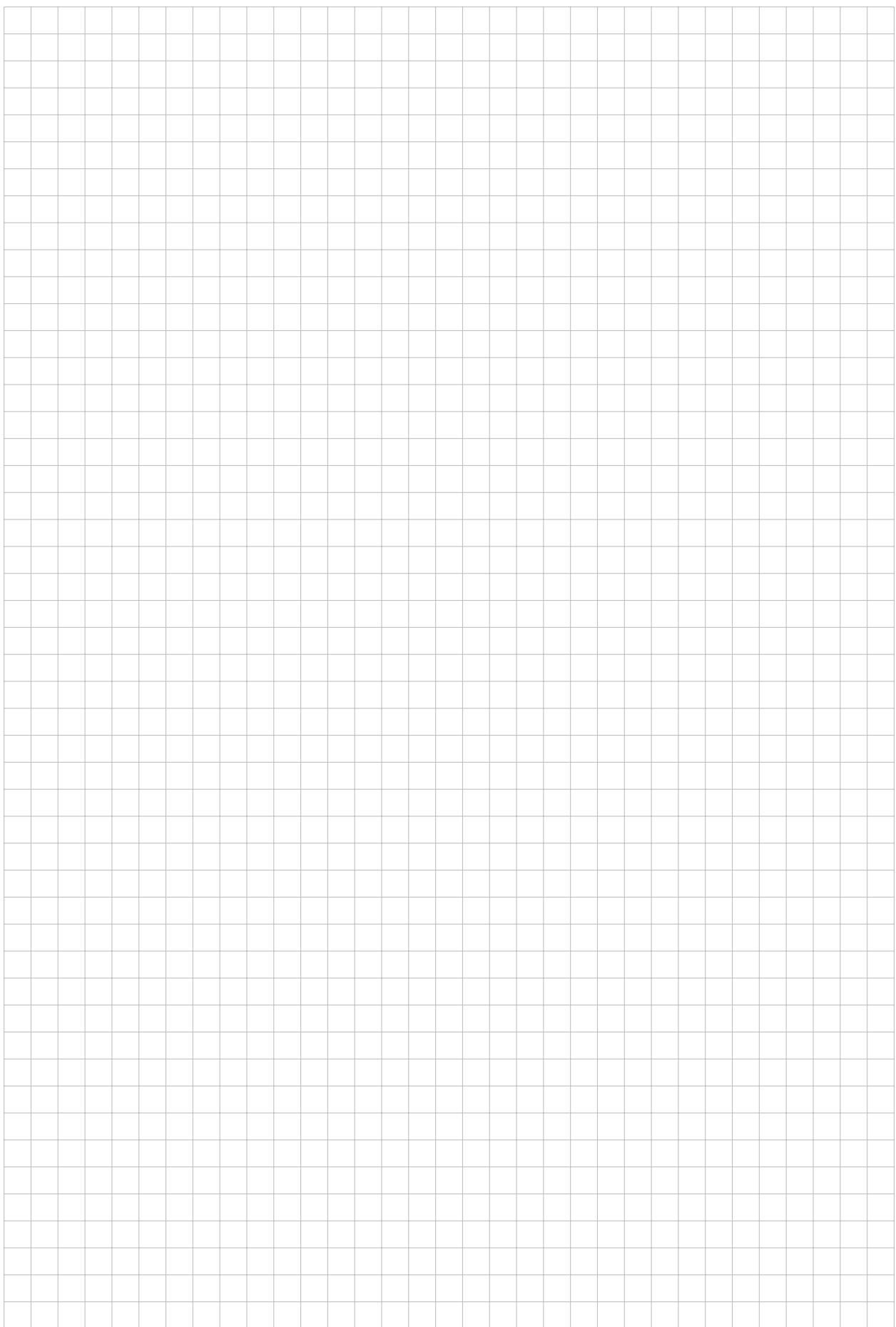
- (c) Soit  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par

$$b_n := 2\sqrt{n} - 6 + \sin(n).$$

En utilisant le point (b), calculer  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .



+1/6/55+

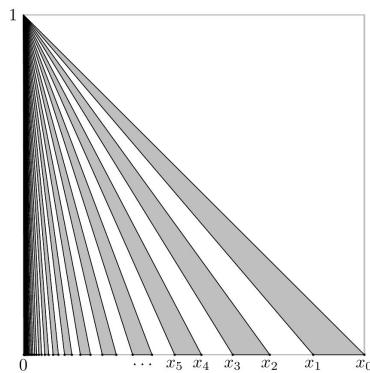




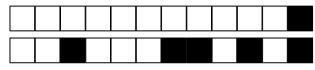
**Question 9:** *Cette question est notée sur 7 points.*

0       1       2       3       4       5       6       7

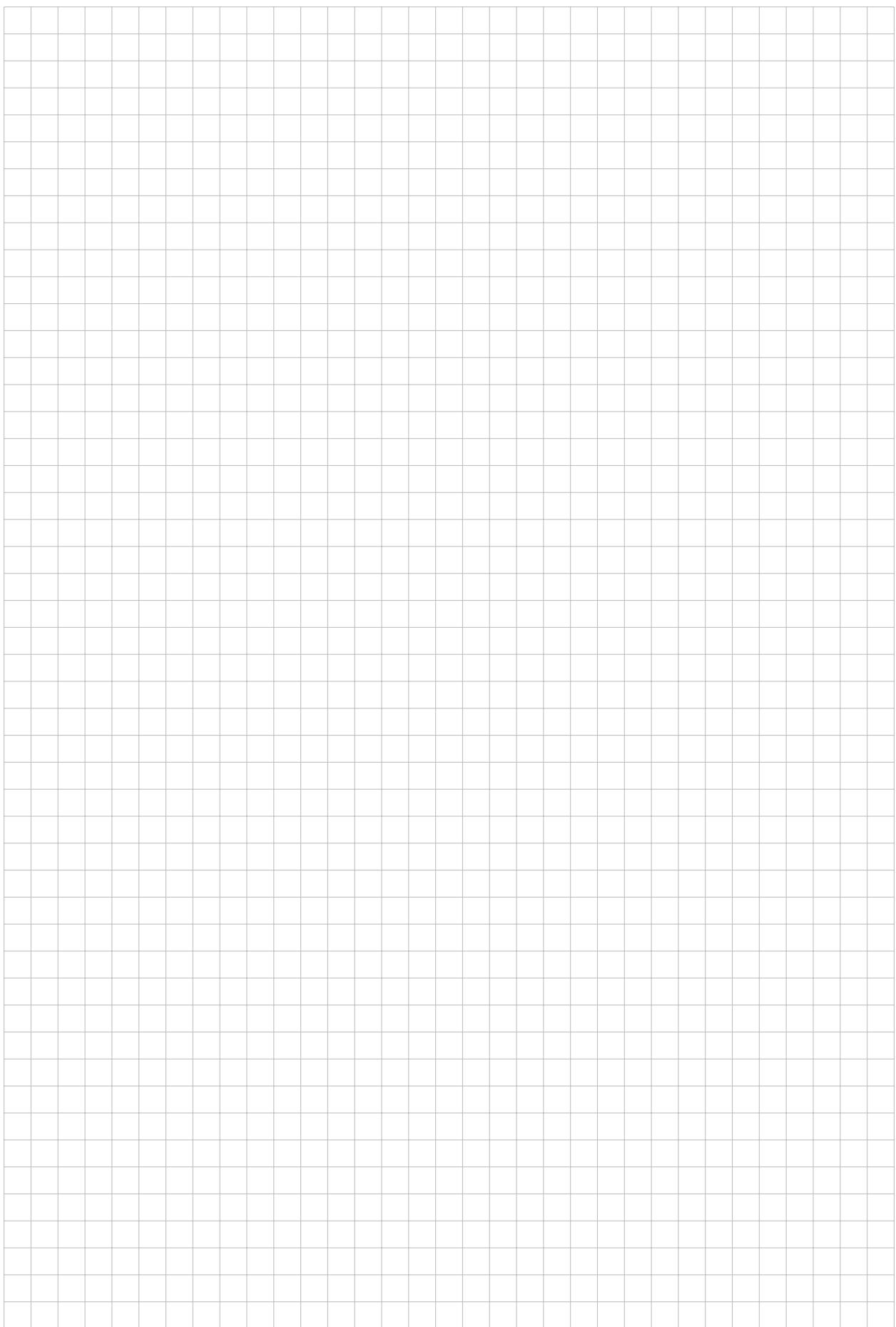
On fixe  $0 < p < 1$ , et on considère la suite  $x_n = p^n$ ,  $n \geq 0$ . On considère alors la région  $R$  formée des triangles grisés dans le carré  $1 \times 1$  ci-dessous:



Calculer l'aire totale de  $R$ .



+1/8/53+





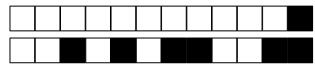
**Question 10:** Cette question est notée sur 8 points.

0     1     2     3     4     5     6     7     8

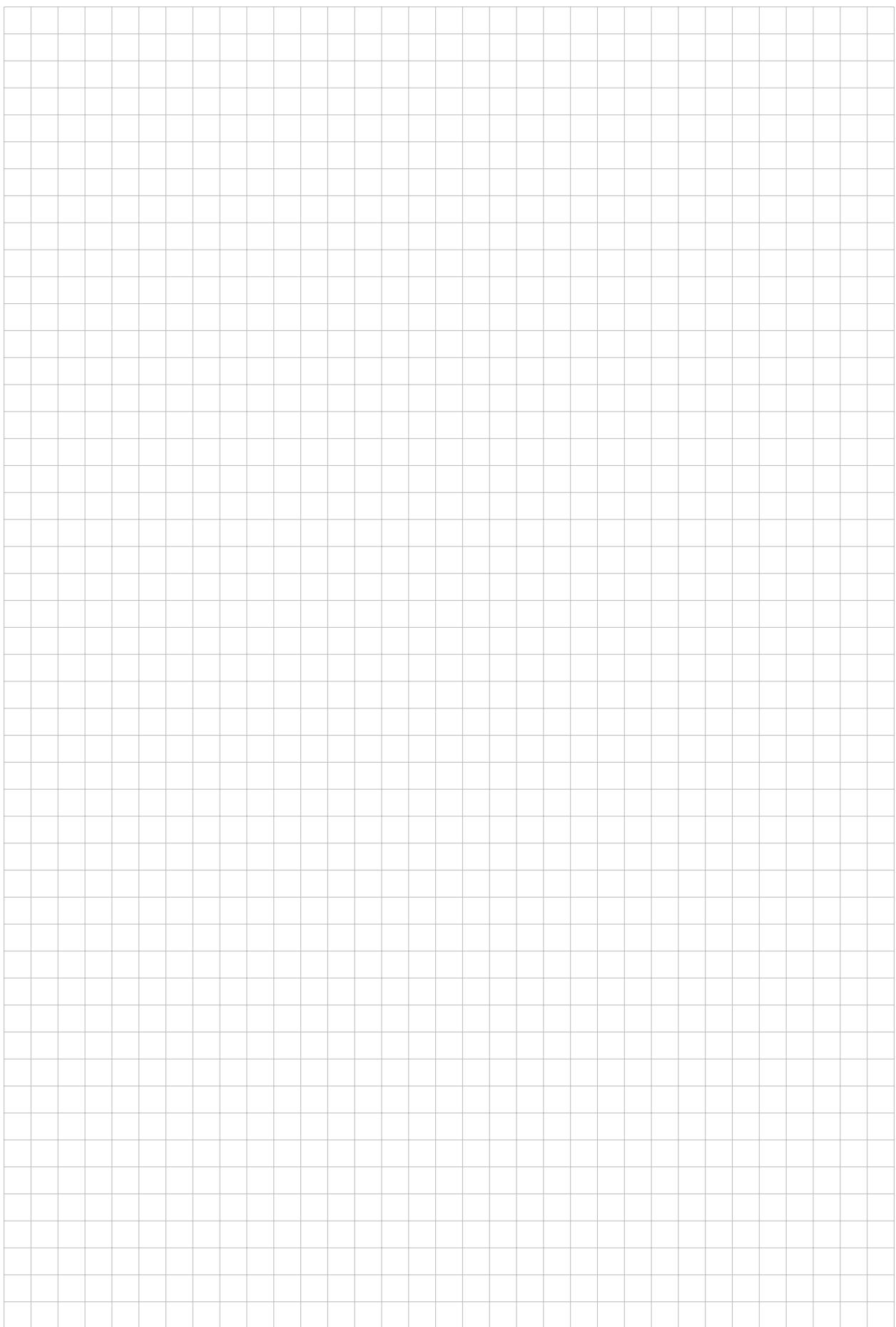
Soit

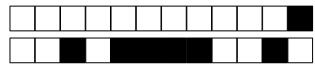
$$\begin{aligned} f : [0, +\infty[ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3} \end{aligned}$$

- Montrer que  $f$  est injective.
- Déterminer l'ensemble image de  $f$ .
- Modifier l'ensemble d'arrivée de  $f$  de façon à obtenir une fonction bijective, et donner sa fonction réciproque.



+1/10/51+





+1/11/50+

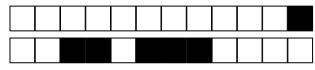


**Question 11:** Cette question est notée sur 6 points.

0     1     2     3     4     5     6

Calculer la limite suivante, **sans utiliser** la règle de Bernoulli-l'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos(x)) - \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))}{x^4}.$$



+1/13/48+



**Question 12:** Cette question est notée sur 11 points.

 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

Les deux questions ci-dessous sont indépendantes.

- (a) Montrer que la courbe

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + t^3 \\ y(t) = 2t^2 - 3t^3 \end{cases}$$

possède un point stationnaire en  $t = 0$ , puis esquisser la courbe au voisinage de ce point.

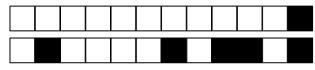
- (b) Trouver les branches infinies de la courbe donnée par

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{t} \\ y(t) = \frac{1}{e^t - 1} \end{cases} \quad t \in D_{\text{def}}.$$

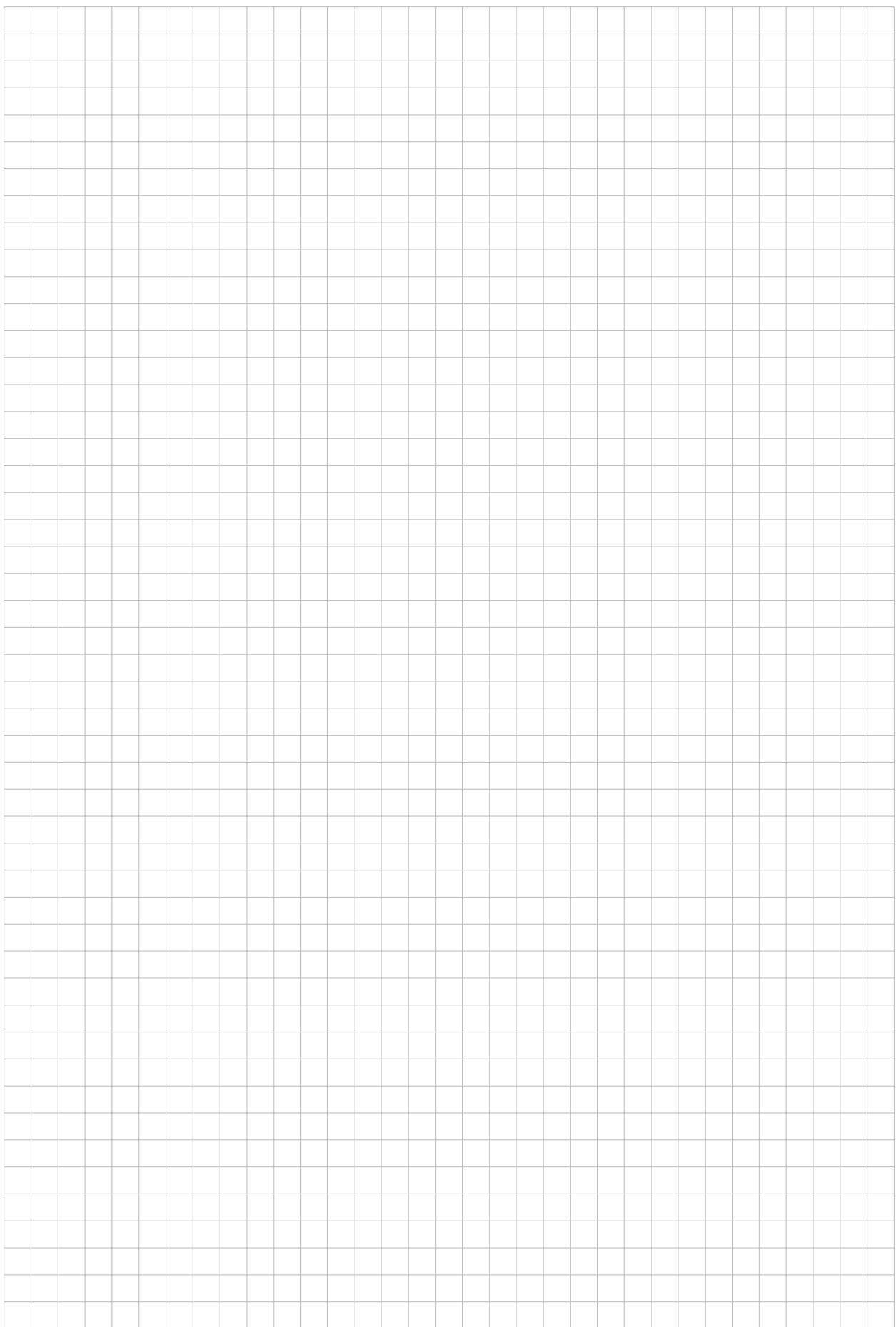
(Remarque: On ne demande pas d'esquisser la courbe.)

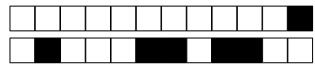


+1/15/46+

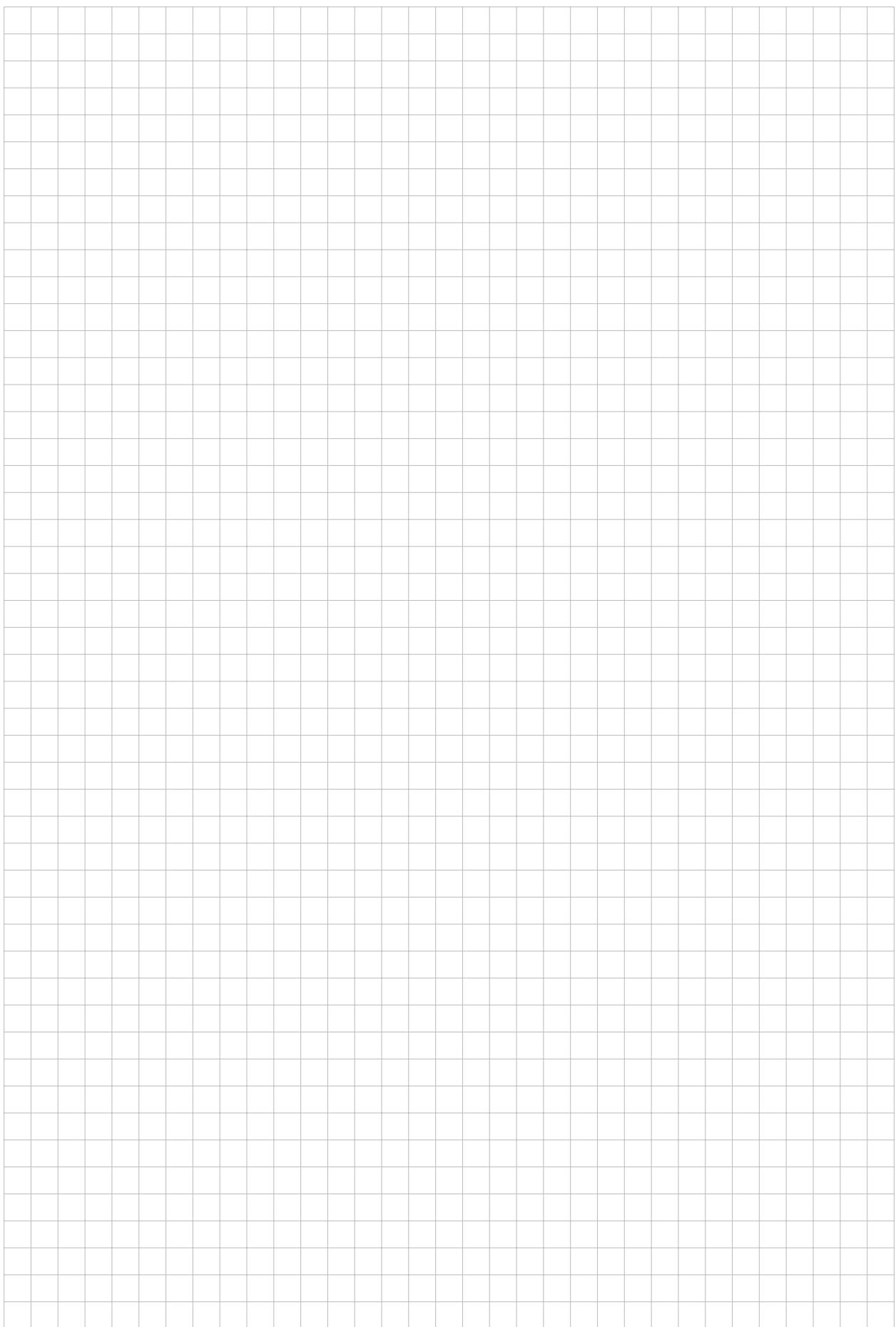


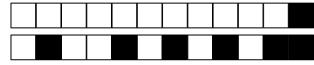
+1/16/45+





+1/17/44+





**Question 13:** Cette question est notée sur 8 points.

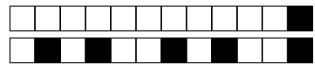
0     1     2     3     4     5     6     7     8

Sur  $]1, +\infty[$ , résoudre l'équation différentielle ci-dessous, avec la condition initiale donnée.

$$y' - \frac{1}{x}y = \frac{1}{x-1}, \quad y(2) = -2 \ln 2.$$



+1/19/42+



+1/20/41+

