

Examen 2022 - corrigé QCM.

Question 1 (2 points)

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot f(x) = -\infty.$$

Laquelle des affirmations suivantes est toujours vraie?

- (1) ☒ Il existe un voisinage de $+\infty$ dans lequel f ne s'annule pas
(2) ☐ f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$
(3) ☐ Il existe une constante $c < 0$ telle que f tend vers c lorsque x tend vers $+\infty$
(4) ☐ f ne tend pas vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$

(2) n'est pas toujours vrai :

par exemple, si $f(x) = -1 \quad \forall x$,
on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty$

mais $f(x) \not\rightarrow -\infty$.

(3) n'est pas toujours vrai :

par exemple, si $f(x) = \sin(x) - 2$,
on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \underbrace{(\sin(x) - 2)}_{\leq -1}$
 $= -\infty$

mais $f(x)$ n'a pas de limite.

(4) n'est pas toujours vrai :

par exemple, si $f(x) = \frac{-1}{\sqrt{x}}$,
on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{x}}\right)$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\sqrt{x})$
 $= -\infty$

mais $f(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow \infty$.

La réponse est donc (1).

Question 2 (3 points)

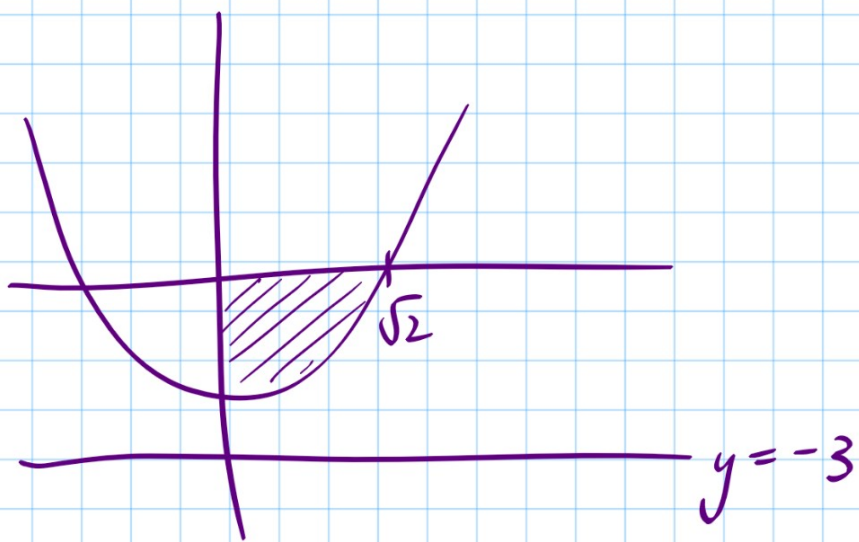
Soit R la région du plan délimitée par la courbe $y = x^2 - 2$, l'axe Ox et l'axe Oy , et contenue dans le 4ème quadrant ($x \geq 0$ et $y \leq 0$). Soit S le solide engendré par la rotation de R autour de la droite d'équation $y = -3$. Alors le volume de S est égal à

☐ $\frac{52}{15}\pi\sqrt{2}$

☐ $\frac{37}{15}\pi\sqrt{2}$

☐ $\frac{47}{15}\pi\sqrt{2}$

☒ $\frac{88}{15}\pi\sqrt{2}$



$$\int_0^{\sqrt{2}} \pi 3^2 - \pi (3 + f(x))^2 dx$$

$$= \pi \int_0^{\sqrt{2}} 9 - 9 - 6f(x) - f(x)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^{\sqrt{2}} -6x^2 + 12 - (x^2 - 2)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^{\sqrt{2}} -6x^2 + 12 - x^4 + 4x^2 - 4 dx$$

$$= \pi \int_0^{\sqrt{2}} -x^4 - 2x^2 + 8 dx$$

$$= \pi \left(-\frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + 8x \right) \Big|_0^{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{15} (-12 - 20 + 8 \cdot 15)$$

$$= \frac{88\pi\sqrt{2}}{15}$$

Question 3 (2 points)

On sait que l'intégrale définie $\int_{\pi/2}^{\pi} \sin(x) dx$ est égale à $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{S}_n$, où $\bar{S}_n$ est la somme de Darboux supérieure associée à la subdivision de l'intervalle en n sous-intervalles de longueurs égales. Parmi les sommes ci-dessous, laquelle est l'expression correcte de $\bar{S}_n$?

☒ $\frac{\pi}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2n}\right)$

☐ $\frac{\pi}{2n} \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2n}\right)$

☐ $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k}{n}\right)$

☐ $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{k}{n}\right)$

$\sin(x)$ est décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

On a donc

$$\bar{S}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\frac{\pi}{2n}}_{\text{longueur de sous-intervalle}} \cdot \underbrace{\max \left\{ \sin(x) : \frac{\pi}{2} + k \frac{\pi}{2n} \leq x \leq \frac{\pi}{2} + (k+1) \frac{\pi}{2n} \right\}}_{\text{valeur maximale de } \sin(x) \text{ sur le } k\text{-ième sous-intervalle}}$$

$$= \frac{\pi}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{\pi}{2} + k \frac{\pi}{2n}\right).$$

Question 4 (3 points)

L'intégrale définie $\int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx$ est égale à

☐ $\frac{1}{5}$

☐ $\frac{4}{15}$

☐ $\frac{1}{15}$

☐ $\frac{1}{3}$

☒ $\frac{2}{15}$

☐ $\frac{3}{5}$

$$\int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx$$

$$x = \sin(t)$$

$$\frac{dx}{dt} = \cos(t)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(t) \sqrt{1-\sin^2(t)} \cos(t) dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(t) \cos^2(t) dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) \cos^2(t) \sin(t) dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1-\cos^2(t)] \cos^2(t) \sin(t) dt$$

$$= \int_1^0 -(1-u^2) u^2 du$$

$$u = \cos(t)$$

$$\frac{du}{dt} = -\sin(t)$$

$$= \int_0^1 u^2 - u^4 du$$

$$= \left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} \right) \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$$

Question 5 (3 points)

Parmi tous les cônes de base circulaire inscrits dans une sphère de rayon R , quelle est la hauteur de celui dont le volume est maximal?

☐ $\frac{3}{2}R$

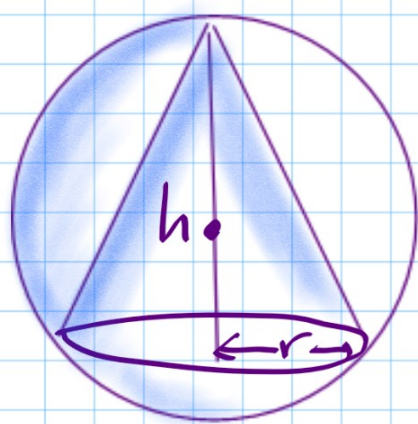
☐ $\frac{5}{4}R$

☐ $\frac{5}{3}R$

☐ $\frac{7}{6}R$

☒ $\frac{4}{3}R$

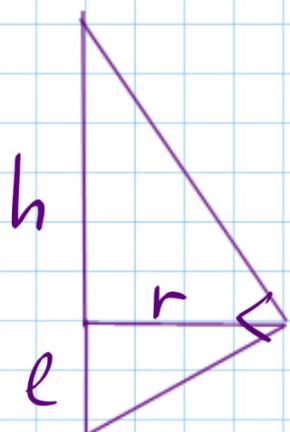
☐ $\frac{4}{5}R$



$h :=$ hauteur, $r :=$ rayon de base

volume du cône $=: V =$

$$\frac{1}{3} \pi r^2 h$$



$$h + l = 2R \Rightarrow l = 2R - h$$

$$\frac{r}{h} = \frac{l}{r} \Rightarrow r^2 = h \cdot l = h(2R - h)$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \pi h^2 (2R - h) = \frac{2}{3} \pi R h^2 - \frac{1}{3} \pi h^3$$

$$V' = \frac{4}{3} \pi R h - \pi h^2$$

$$= \pi h \left(\frac{4}{3} R - h \right)$$

$$V' = 0 \Leftrightarrow h = 0 \text{ ou } h = \frac{4R}{3}$$

$\Rightarrow$ max local et global en $\frac{4R}{3}$

(V est nul sur le bord du domaine).

Question 6 (3 points)

Soit Γ la courbe $y = x^3 - x$, et soit t la tangente à Γ issue du point $(0, -16)$.

Parmi les points suivants, un seul se trouve sur t ; lequel?

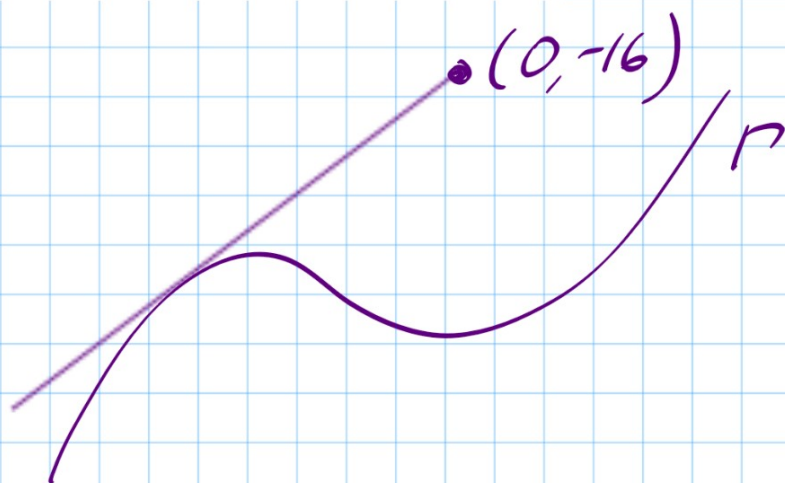
☐ $(\frac{1}{2}, -11)$

☐ $(\frac{1}{2}, -12)$

☒ $(\frac{1}{2}, -\frac{21}{2})$

☐ $(\frac{1}{2}, -\frac{23}{2})$

$\Gamma: y = x^3 - x =: f(x)$



$t: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
 $= (3x_0^2 - 1)(x - x_0) + x_0^3 - x_0$

$(0, -16)$ sur t :

$$-16 = (3x_0^2 - 1)(-x_0) + x_0^3 - x_0$$

$$= -3x_0^3 + x_0 + x_0^3 - x_0$$

$$2x_0^3 = 16$$

$$x_0 = 2.$$

$\Rightarrow t: y = 11(x - 2) + 8 - 2$
 $y = 11x - 16$

Le point $(\frac{1}{2}, -\frac{21}{2})$ se trouve sur t :

$$-\frac{21}{2} = 11 \cdot \frac{1}{2} - 16 \quad \checkmark$$