Enseignants: Friedli, Maatouk, Woringer
Analyse B - CMS
29 juin 2022
Durée : 210 minutes

1

Bugs Bunny

SCIPER : **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 24 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  le nombre de points indiqués si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- **Attention:** les feulles de brouillon ne seront pas ramassées; **aucune feuille supplémentaire** ne sera distribuée.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Trigonométrie circulaire

Formules d'addition :

$$\sin(x+y) = \sin x\,\cos y + \cos x\,\sin y \qquad \cos(x+y) = \cos x\,\cos y - \sin x\,\sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\,\tan y}$$

Formules de bissection :

$$\sin^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{2} \qquad \cos^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1+\cos x}{2} \qquad \tan^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

Expressions de $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$ en fonction de $\tan(\frac{x}{2})$:

$$\sin x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \cos x = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \tan x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1-\tan^2(\frac{x}{2})}$$

Formules de transformation somme-produit :

$$\cos x + \cos y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \cos x - \cos y = -2\sin(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \sin x - \sin y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

Trigonométrie hyperbolique

Définitions :

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Formules d'addition :

$$\sinh(x+y) = \sinh x\,\cosh y + \cosh x\,\sinh y \qquad \cosh(x+y) = \cosh x\,\cosh y + \sinh x\,\sinh y$$

$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x\,\tanh y}$$

Formules de bissection :

$$\sinh^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x - 1}{2} \qquad \cosh^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x + 1}{2} \qquad \tanh(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x - 1}{\sinh x} = \frac{\sinh x}{\cosh x + 1}$$

Dérivée de quelques fonctions

$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\arg\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\arg\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\arg\tanh x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\arg\coth x$	$\frac{1}{1-x^2}$

Première partie, questions à choix unique

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 (2 points)
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{x\to+\infty} x \cdot f(x) = -\infty.$$

Laquelle des affirmations suivantes est toujours vraie?

- ■ Il existe un voisinage de $+\infty$ dans lequel f ne s'annule pas
- ☐ f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$
- ☐ Il existe une constante $c < 0$ telle que f tend vers c lorsque x tend vers $+\infty$
- ☐ f ne tend pas vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$

Question 2 (3 points)
Soit R la région du plan délimitée par la courbe $y = x^2 - 2$, l'axe Ox et l'axe Oy, et contenue dans le 4ème quadrant ($x \geq 0$ et $y \leq 0$). Soit S le solide engendré par la rotation de R autour de la droite d'équation $y = -3$. Alors le volume de S est égal à

☐ $\frac{52}{15}\pi\sqrt{2}$ ☐ $\frac{37}{15}\pi\sqrt{2}$ ☐ $\frac{47}{15}\pi\sqrt{2}$ ■ $\frac{88}{15}\pi\sqrt{2}$

Question 3 (2 points)
On sait que l'intégrale définie $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \sin(x)\,dx$ est égale à $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \overline{S}_n$, où $\overline{S}_n$ est la somme de Darboux supérieure associée à la subdivision de l'intervalle en n sous-intervalles de longueurs égales. Parmi les sommes ci-dessous, laquelle est l'expression correcte de $\overline{S}_n$?

■ $\displaystyle\frac{\pi}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\Big(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi k}{2n}\Big)$ ☐ $\displaystyle\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n}\sin\Big(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi k}{2n}\Big)$

☐ $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\Big(\frac{k}{n}\Big)$ ☐ $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\Big(\frac{\pi}{2}+\frac{k}{n}\Big)$

Question 4 (3 points)
L'intégrale définie $\displaystyle\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$ est égale à

☐ $\frac{1}{5}$ ☐ $\frac{4}{15}$ ☐ $\frac{1}{15}$ ☐ $\frac{1}{3}$ ■ $\frac{2}{15}$ ☐ $\frac{3}{5}$

Question 5 (3 points)
Parmi tous les cônes de base circulaire inscrits dans une sphère de rayon R, quelle est la hauteur de celui dont le volume est maximal?

☐ $\frac{3}{2}R$ ☐ $\frac{5}{4}R$ ☐ $\frac{5}{3}R$ ☐ $\frac{7}{6}R$ ■ $\frac{4}{3}R$ ☐ $\frac{4}{5}R$

Question 6 (3 points)
Soit Γ la courbe $y = x^3 - x$, et soit t la tangente à Γ issue du point $(0, -16)$.
Parmi les points suivants, un seul se trouve sur t; lequel?

☐ $(\frac{1}{2}, -11)$ ☐ $(\frac{1}{2}, -12)$ ■ $(\frac{1}{2}, -\frac{21}{2})$ ☐ $(\frac{1}{2}, -\frac{23}{2})$

Deuxième partie, questions ouvertes

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 7: *Cette question est notée sur 5 points.*

(a) Pour une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et un réel L, définir rigoureusement

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L\,.$$

(b) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, définie par

$$a_n = \ln(2 - \tfrac{1}{n})\,, \qquad n \geq 1\,.$$

Montrer, à l'aide de la définition de limite donnée au point précédent, que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ln(2)\,.$$

Solution

(a) Par définition,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \iff \forall\epsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}^* \text{ t.q. } n \geq N \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon.$$

(b) Fixons $\epsilon > 0$. Puisque $1 - \frac{1}{2n} < 1$,

$$|a_n - \ln(2)| = \big|\ln\big(1 - \tfrac{1}{2n}\big)\big| = -\ln\big(1 - \tfrac{1}{2n}\big)\,,$$

on a

$$|a_n - \ln(2)| \leq \epsilon$$

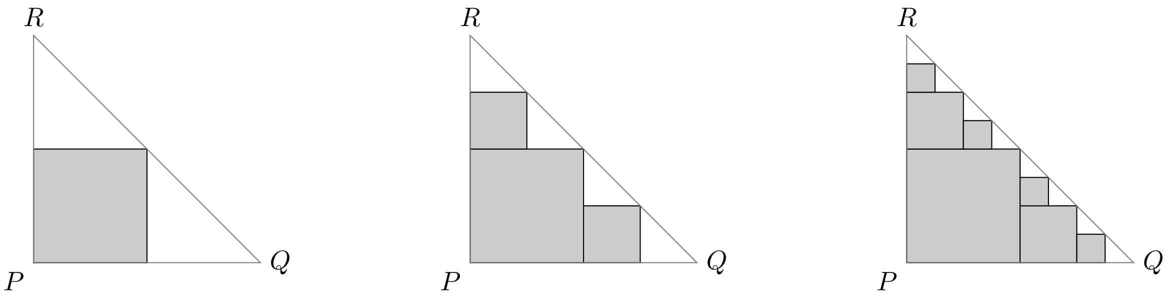
si et seulement si

$$-\ln\big(1 - \tfrac{1}{2n}\big) \leq \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2n} \leq 1 - e^{-\epsilon} \quad \Leftrightarrow \quad n \geq \frac{1}{2(1 - e^{-\epsilon})}$$

On peut donc prendre n'importe quel $N \geq \frac{1}{2(1-e^{-\epsilon})}$.

Question 8 : *Cette question est notée sur 5 points.*

Dans le plan cartésien, on considère le triangle T dont les sommets sont $P = (0, 0)$, $Q = (1, 0)$, $R = (0, 1)$. On approxime T par des unions successives de carrés, les trois premières étant représentées ci-dessous:



A_1 A_2 A_3

Soit A_n l'aire totale de l'union de carrés utilisée à l'étape n.

(a) Pour tout $n \geq 1$, exprimer A_n comme une somme d'aires de carrés, puis calculer explicitement A_n.

(b) En déduire l'aire du triangle T.

Solution

(a) On a

$$\begin{aligned} A_1 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2, \\ A_2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{4}\right)^2, \\ A_3 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{8}\right)^2. \end{aligned}$$

Pour un n quelconque,

$$\begin{aligned} A_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2^2}\right)^2 + 2^2\left(\frac{1}{2^3}\right)^2 + \cdots + 2^{n-1}\left(\frac{1}{2^n}\right)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\left(\frac{1}{2^k}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k+2}} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right). \end{aligned}$$

(b) L'aire de T est donc égale à

$$\text{Aire}(T) = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2}.$$

Question 9 : *Cette question est notée sur 5 points.*

Soit $f :]0,\pi[\cup]\pi,2\pi[\to \mathbb{R}$, définie par

$$f(x) = \frac{\cos(x)+1}{\sin^2(x)}\,.$$

(a) Montrer que f peut être prolongée par continuité en $x_0 = \pi$, et écrire la prolongée (que l'on notera $\widetilde{f}$) explicitement.

(b) Montrer que $\widetilde{f}$ est dérivable en $x_0 = \pi$ et donner l'équation de la droite tangente au graphe de $\widetilde{f}$ en ce point.

Solution

(a) On doit étudier $\lim_{x\to\pi} f(x)$.

En posant $x = \pi + y$,

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(\pi) &= \lim_{x\to\pi} \frac{\cos(x)+1}{\sin^2(x)} \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{-\cos(y)+1}{\sin^2(y)} \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{y^2/2}{y^2} = \frac{1}{2}\,.\end{aligned}$$

Donc la prolongée $\widetilde{f} :]0,2\pi[\to\mathbb{R}$ existe, et est donnée par

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x)+1}{\sin^2(x)} & \text{si } x \neq \pi\,, \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = \pi\,. \end{cases}$$

(b) On étudie la limite du rapport de Newton

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{\widetilde{f}(\pi+h)-\widetilde{f}(\pi)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(\pi+h)-\frac{1}{2}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\cos(\pi+h)+1}{\sin^2(\pi+h)} - \frac{1}{2}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-\cos(h)+1}{\sin^2(h)} - \frac{1}{2}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2(-\cos(h)+1)-\sin^2(h)}{2h\sin^2(h)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos^2(h)-2\cos(h)+1}{2h^3} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(\cos(h)-1)^2}{2h^3} = 0\end{aligned}$$

Donc $\widetilde{f}$ est dérivable en $x_0 = \pi$, et $\widetilde{f}'(\pi) = 0$. Ainsi, l'équation de la droite tangente en $x_0 = \pi$ est donnée par $\boxed{y = \frac{1}{2}}$.

Question 10 : *Cette question est notée sur 8 points.*

Soit Γ l'arc paramétré

$$x(t) = \frac{t^2+3}{t-1}\,, \qquad y(t) = \frac{t^2}{t-1}\,, \qquad t \in \mathbb{R}\setminus\{1\}\,.$$

(a) Faire l'étude de Γ, en déterminant les branches infinies, ainsi que les points à tangence horizontale/verticale.

(b) Donner le tableau de variation des fonctions coordonnées $x(t)$ et $y(t)$, puis en déduire une esquisse précise de Γ dans un repère orthonormé (1 unité = 1 carré).

Solution

Branches infinies: Étudions le comportement de $x(t)$ et $y(t)$ aux bornes de l'ensemble de définition.

- Lorsque $t \to -\infty$,

  $$\lim_{t\to-\infty} x(t) = \lim_{t\to-\infty} \frac{t^2+3}{t-1} = -\infty,$$
  $$\lim_{t\to-\infty} y(t) = \lim_{t\to-\infty} \frac{t^2}{t-1} = -\infty\,.$$

  Or puisque

  $$\lim_{t\to-\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to-\infty} \frac{t^2+3}{t^2} = 1$$

  et

  $$\lim_{t\to-\infty} y(t) - 1\cdot x(t) = \lim_{t\to-\infty} \frac{-3}{t-1} = 0\,.$$

  on conclut que Γ admet, lorsque $t\to-\infty$, une asymptote oblique d'équation $\boxed{y = x}$.

- Lorsque $t \to +\infty$, les mêmes calculs donnent

  $$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty, \text{ et } \lim_{t\to-\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = 1, \lim_{t\to-\infty} y(t) - x(t) = 0,$$

  donc Γ admet, lorsque $t\to+\infty$ la même asymptote oblique d'équation $\boxed{y = x}$.

- Lorsque $t \to 1^-$,

  $$\lim_{t\to1^-} x(t) = \lim_{t\to1^-} y(t) = -\infty.$$

  Or puisque

  $$\lim_{t\to1^-} \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{1}{4}$$

  et

  $$\lim_{t\to1^-} y(t) - \frac{1}{4}x(t) = \lim_{t\to1^-} \frac{3(t+1)}{4} = \frac{3}{2}\,,$$

  on conclut que Γ admet, lorsque $t\to1^-$, une asymptote oblique d'équation $\boxed{y = \frac{x}{4}+\frac{3}{2}}$.

- Lorsque $t\to1^+$, $\lim_{t\to1^+} x(t) = \lim_{t\to1^+} y(t) = +\infty$, et les mêmes calculs que précédemment donnent la même asymptote oblique d'équation $\boxed{y = \frac{x}{4}+\frac{3}{2}}$.

Vecteur tangent et points remarquables: On étudie le vecteur tangent, en calculant

$$x'(t) = \frac{(t+1)(t-3)}{(t-1)^2}\,, \qquad y'(t) = \frac{t(t-2)}{(t-1)^2}\,,$$

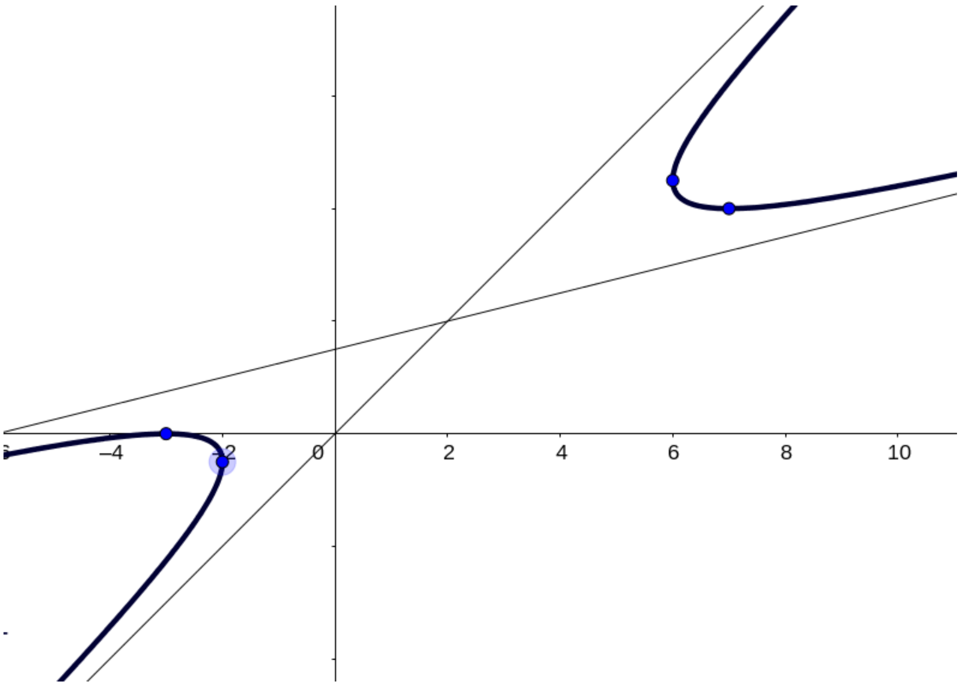
dont les signes sont les suivants:

		-1		0		1		2		3	
$x'(t)$	+	0		−		‖		−		0	+
$y'(t)$	+		+	0	−	‖	−	0	+		+
		VERTIC.		HORIZ.				HORIZ.		VERTIC.	

De là on tire que Γ possède

- un point à tangence verticale en $M(-1) = (-2, -\frac{1}{2})$,
- un point à tangence horizontale en $M(0) = (-3, 0)$,
- un point à tangence horizontale en $M(2) = (7, 4)$,
- un point à tangence verticale en $M(3) = (6, \frac{9}{2})$.

Esquisse de Γ:



Question 11 : *Cette question est notée sur 4 points.*

Calculer l'intégrale indéfinie

$$\int e^{-x} \cdot \ln(e^{2x}+4)\, dx$$

Solution

En intégrant par parties,

$$\begin{aligned}\int e^{-x} \ln(e^{2x}+4)\, dx &= (-e^{-x}) \ln(e^{2x}+4) - \int (-e^{-x}) \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+4}\, dx \\ &= (-e^{-x}) \ln(e^{2x}+4) + 2 \int \frac{e^{x}}{e^{2x}+4}\, dx\end{aligned}$$

Mais avec $u = e^x$ et donc $dx = \frac{du}{u}$,

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{x}}{e^{2x}+4}\, dx &= \int \frac{1}{u^2+4}\, du \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{(u/2)^2+1}\, du \\ &= \frac{1}{2} \arctan(u/2) + C \\ &= \frac{1}{2} \arctan(e^x/2) + C\,.\end{aligned}$$

On conclut:

$$\int e^{-x} \ln(e^{2x}+4)\, dx = (-e^{-x}) \ln(e^{2x}+4) + \arctan(e^x/2) + C\,.$$

Question 12 : *Cette question est notée sur 7 points.*

(a) Donner la solution générale de l'équation différentielle linéaire du premier ordre homogène suivante:

$$y' + \tanh(x) \cdot y = 0\,.$$

(b) Donner la solution générale de l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre homogène suivante,

$$y'' - \tanh(x) \cdot y' + (\tanh^2(x) - 1) \cdot y = 0\,,$$

sachant que $y_1(x) = \cosh(x)$ est une solution de cette équation.

Solution

(a) Comme

$$\int \tanh(x)dx = \int \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}dx = \ln(\cosh(x)) + C,$$

la solution générale de l'équation différentielle linéaire du premier ordre homogène est

$$y(x) = C\exp(-\ln(\cosh(x))) = \frac{C}{\cosh(x)},\ C \in \mathbb{R}.$$

(b) On cherche une deuxième solution de la forme $y_2 = c(x)\cosh(x)$. Ceci implique

$$\begin{aligned} y_2'(x) &= c'(x)\cosh(x) + c(x)\sinh(x)\,, \\ y_2''(x) &= c''(x)\cosh(x) + 2c'(x)\sinh(x) + c(x)\cosh(x) \end{aligned}$$

et donc

$$y_2'' - \tanh(x)y_2' + (\tanh^2(x) - 1)y_2 = c''(x)\cosh(x) + c'(x)\sinh(x).$$

En imposant que y_2 soit solution de l'équation différentielle, on a donc

$$c''(x)\cosh(x) + c'(x)\sinh(x) = 0\,,$$

qui est équivalente à

$$c''(x) + c'(x)\tanh(x) = 0.$$

$c'(x)$ est donc solution de l'équation du point précédent. Un choix possible est par exemple $c'(x) = \frac{1}{\cosh(x)}$. Comme

$$\int \frac{1}{\cosh(x)}dx = \int \frac{\cosh(x)}{1 + \sinh^2(x)}dx = \arctan(\sinh^2(x)) + C,$$

on peut par exemple prendre $c(x) = \arctan(\sinh^2(x))$. La solution générale de l'équation différentielle est donc

$$y(x) = \cosh(x)\left(A + B\arctan(\sinh^2(x))\right), \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$