



Enseignants: Friedli, Maatouk, Woringer

Analyse B - CMS

29 juin 2022













Durée : 210 minutes

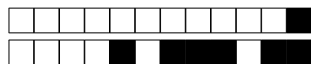
# Bugs Bunny

SCIPER : 999999

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 24 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  - le nombre de points indiqués si la réponse est correcte,
  - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - 0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- **Attention:** les feuilles de brouillon ne seront pas ramassées; **aucune feuille supplémentaire** ne sera distribuée.

Respectez les consignes suivantes   Observe this guidelines   Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse   select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse   NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse   Correct an answer Antwort korrigieren
  		 
ce qu'il ne faut <b>PAS</b> faire   what should <b>NOT</b> be done   was man <b>NICHT</b> tun sollte		
     		



## Trigonométrie circulaire

Formules d'addition :

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y & \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \tan(x+y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}\end{aligned}$$

Formules de bissection :

$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{2} \quad \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos x}{2} \quad \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

Expressions de  $\sin x$ ,  $\cos x$  et  $\tan x$  en fonction de  $\tan(\frac{x}{2})$  :

$$\sin x = \frac{2 \tan(\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})} \quad \cos x = \frac{1 - \tan^2(\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})} \quad \tan x = \frac{2 \tan(\frac{x}{2})}{1 - \tan^2(\frac{x}{2})}$$

Formules de transformation somme-produit :

$$\begin{aligned}\cos x + \cos y &= 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) & \cos x - \cos y &= -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ \sin x + \sin y &= 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) & \sin x - \sin y &= 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\end{aligned}$$

## Trigonométrie hyperbolique

Définitions :

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Formules d'addition :

$$\begin{aligned}\sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y & \cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \\ \tanh(x+y) &= \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}\end{aligned}$$

Formules de bissection :

$$\sinh^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cosh x - 1}{2} \quad \cosh^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cosh x + 1}{2} \quad \tanh\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cosh x - 1}{\sinh x} = \frac{\sinh x}{\cosh x + 1}$$

## Dérivée de quelques fonctions

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sinh x$	$\cosh x$	$\arg \sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\cosh x$	$\sinh x$	$\arg \cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$\arg \tanh x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$	$\arg \coth x$	$\frac{1}{1-x^2}$



## Première partie, questions à choix unique

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

### Question 1 (2 points)

Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  telle que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot f(x) = -\infty.$$

Laquelle des affirmations suivantes est toujours vraie?

- ☐ Il existe un voisinage de  $+\infty$  dans lequel  $f$  ne s'annule pas
- ☐  $f$  tend vers  $-\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$
- ☐ Il existe une constante  $c < 0$  telle que  $f$  tend vers  $c$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$
- ☐  $f$  ne tend pas vers 0 lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$

### Question 2 (3 points)

Soit  $R$  la région du plan délimitée par la courbe  $y = x^2 - 2$ , l'axe  $Ox$  et l'axe  $Oy$ , et contenue dans le 4ème quadrant ( $x \geq 0$  et  $y \leq 0$ ). Soit  $S$  le solide engendré par la rotation de  $R$  autour de la droite d'équation  $y = -3$ . Alors le volume de  $S$  est égal à

- ☐  $\frac{52}{15}\pi\sqrt{2}$       ☐  $\frac{37}{15}\pi\sqrt{2}$       ☐  $\frac{47}{15}\pi\sqrt{2}$       ☐  $\frac{88}{15}\pi\sqrt{2}$

### Question 3 (2 points)

On sait que l'intégrale définie  $\int_{\pi/2}^{\pi} \sin(x) dx$  est égale à  $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}_n$ , où  $\overline{S}_n$  est la somme de Darboux supérieure associée à la subdivision de l'intervalle en  $n$  sous-intervalles de longueurs égales. Parmi les sommes ci-dessous, laquelle est l'expression correcte de  $\overline{S}_n$ ?

- ☐  $\frac{\pi}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2n}\right)$       ☐  $\frac{\pi}{2n} \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2n}\right)$
- ☐  $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k}{n}\right)$       ☐  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{k}{n}\right)$

### Question 4 (3 points)

L'intégrale définie  $\int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx$  est égale à

- ☐  $\frac{1}{5}$       ☐  $\frac{4}{15}$       ☐  $\frac{1}{15}$       ☐  $\frac{1}{3}$       ☐  $\frac{2}{15}$       ☐  $\frac{3}{5}$

### Question 5 (3 points)

Parmi tous les cônes de base circulaire inscrits dans une sphère de rayon  $R$ , quelle est la hauteur de celui dont le volume est maximal?

- ☐  $\frac{3}{2}R$       ☐  $\frac{5}{4}R$       ☐  $\frac{5}{3}R$       ☐  $\frac{7}{6}R$       ☐  $\frac{4}{3}R$       ☐  $\frac{4}{5}R$



**Question 6** (3 points)

Soit  $\Gamma$  la courbe  $y = x^3 - x$ , et soit  $t$  la tangente à  $\Gamma$  issue du point  $(0, -16)$ .

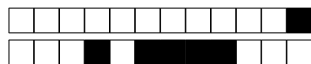
Parmi les points suivants, un seul se trouve sur  $t$ ; lequel?

☐  $(\frac{1}{2}, -11)$

☐  $(\frac{1}{2}, -12)$

☐  $(\frac{1}{2}, -\frac{21}{2})$

☐  $(\frac{1}{2}, -\frac{23}{2})$



## Deuxième partie, questions ouvertes

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

**Question 7:** *Cette question est notée sur 5 points.*

- (a) Pour une suite réelle  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et un réel  $L$ , définir rigoureusement

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L.$$

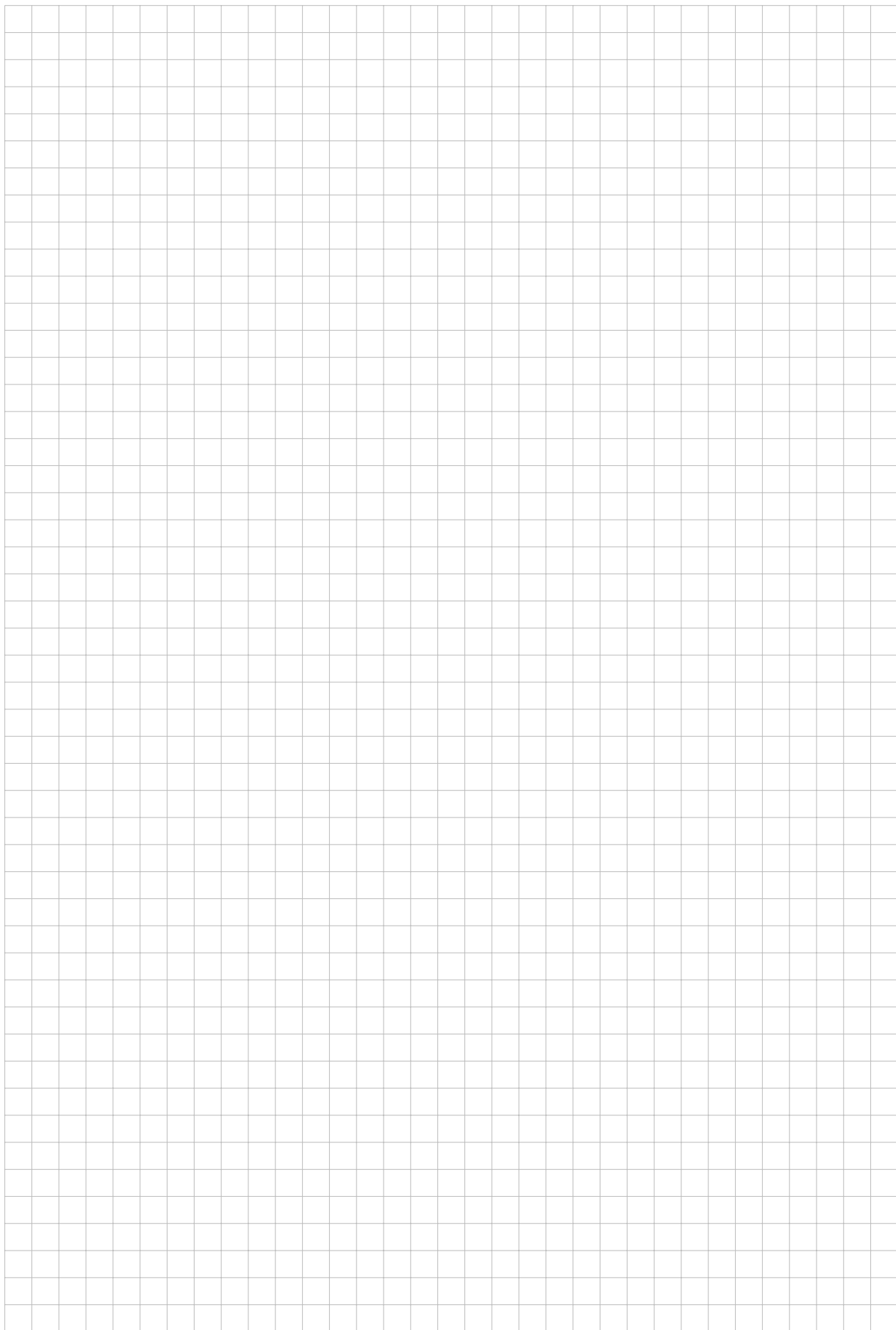
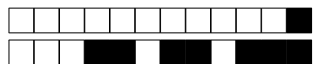
- (b) Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , définie par

$$a_n = \ln\left(2 - \frac{1}{n}\right), \quad n \geq 1.$$

Montrer, à l'aide de la définition de limite donnée au point précédent, que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ln(2).$$

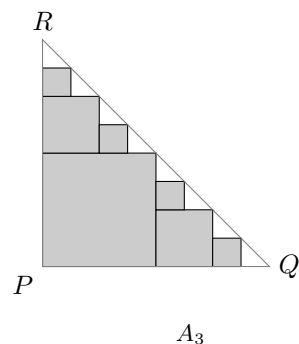
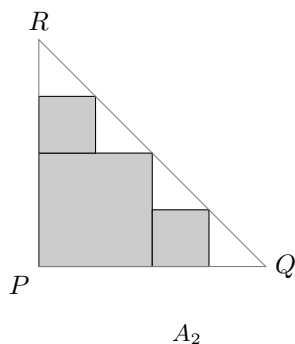
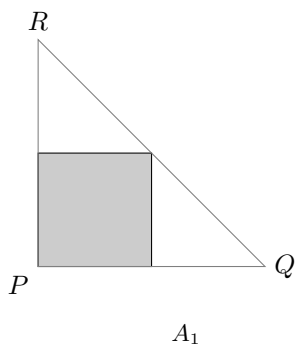






**Question 8 :** *Cette question est notée sur 5 points.*

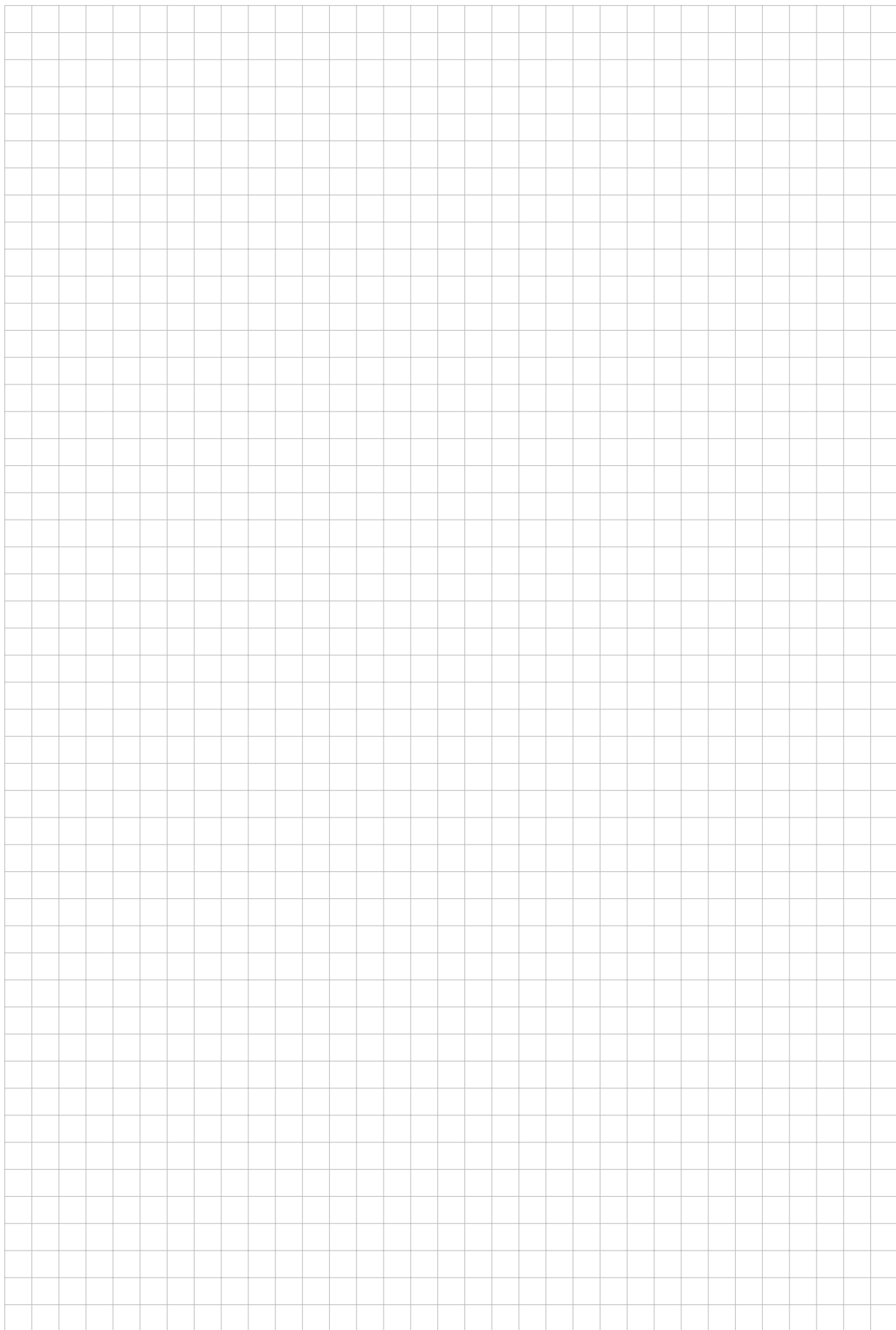
Dans le plan cartésien, on considère le triangle  $T$  dont les sommets sont  $P = (0,0)$ ,  $Q = (1,0)$ ,  $R = (0,1)$ . On approxime  $T$  par des unions successives de carrés, les trois premières étant représentées ci-dessous:



Soit  $A_n$  l'aire totale de l'union de carrés utilisée à l'étape  $n$ .

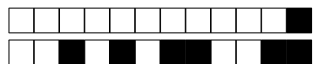
- Pour tout  $n \geq 1$ , exprimer  $A_n$  comme une somme d'aires de carrés, puis calculer explicitement  $A_n$ .
- En déduire l'aire du triangle  $T$ .











**Question 9 :** *Cette question est notée sur 5 points.*

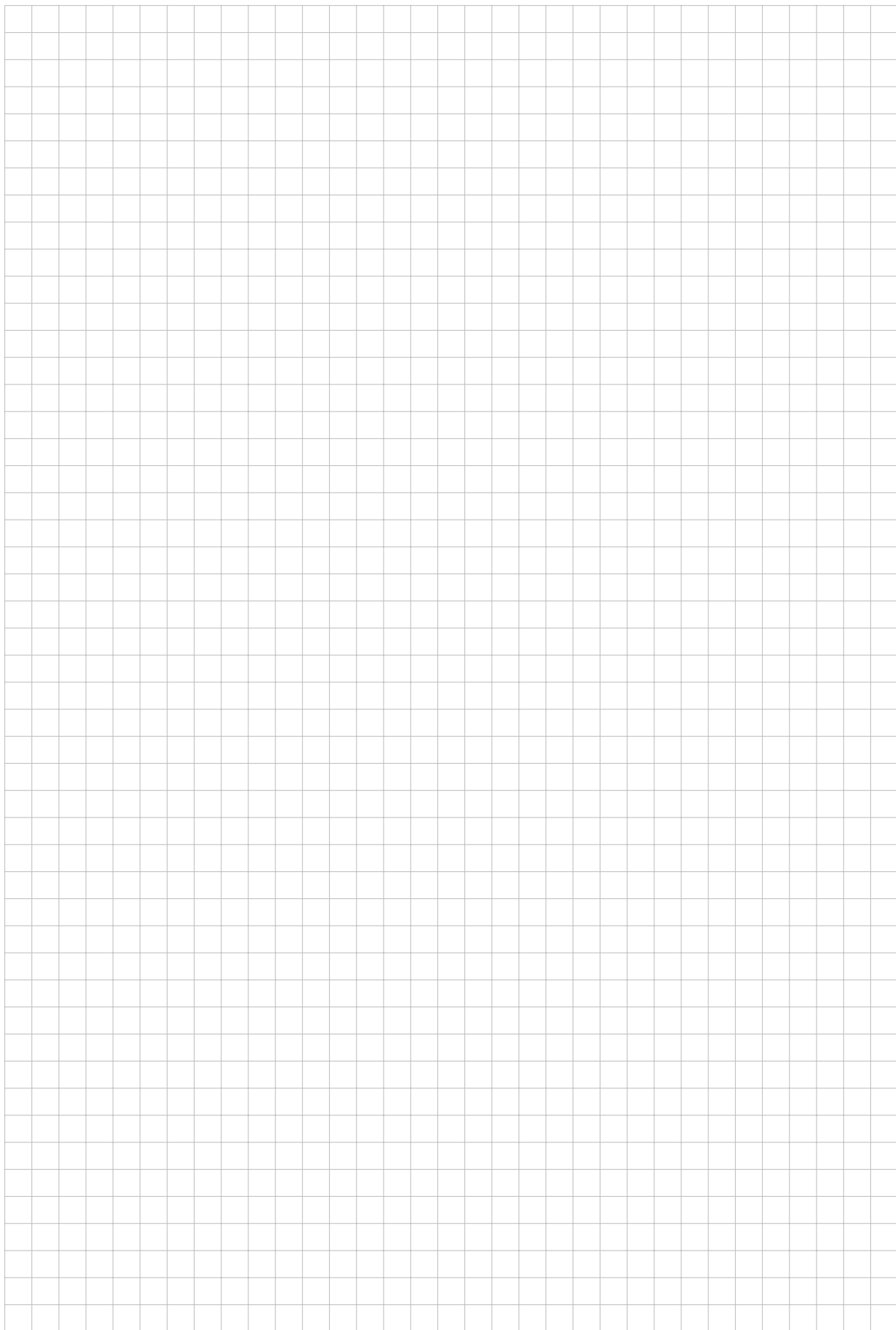
Soit  $f : ]0, \pi[ \cup ]\pi, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}$ , définie par

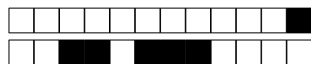
$$f(x) = \frac{\cos(x) + 1}{\sin^2(x)}.$$

- (a) Montrer que  $f$  peut être prolongée par continuité en  $x_0 = \pi$ , et écrire la prolongée (que l'on notera  $\tilde{f}$ ) explicitement.
- (b) Montrer que  $\tilde{f}$  est dérivable en  $x_0 = \pi$  et donner l'équation de la droite tangente au graphe de  $\tilde{f}$  en ce point.









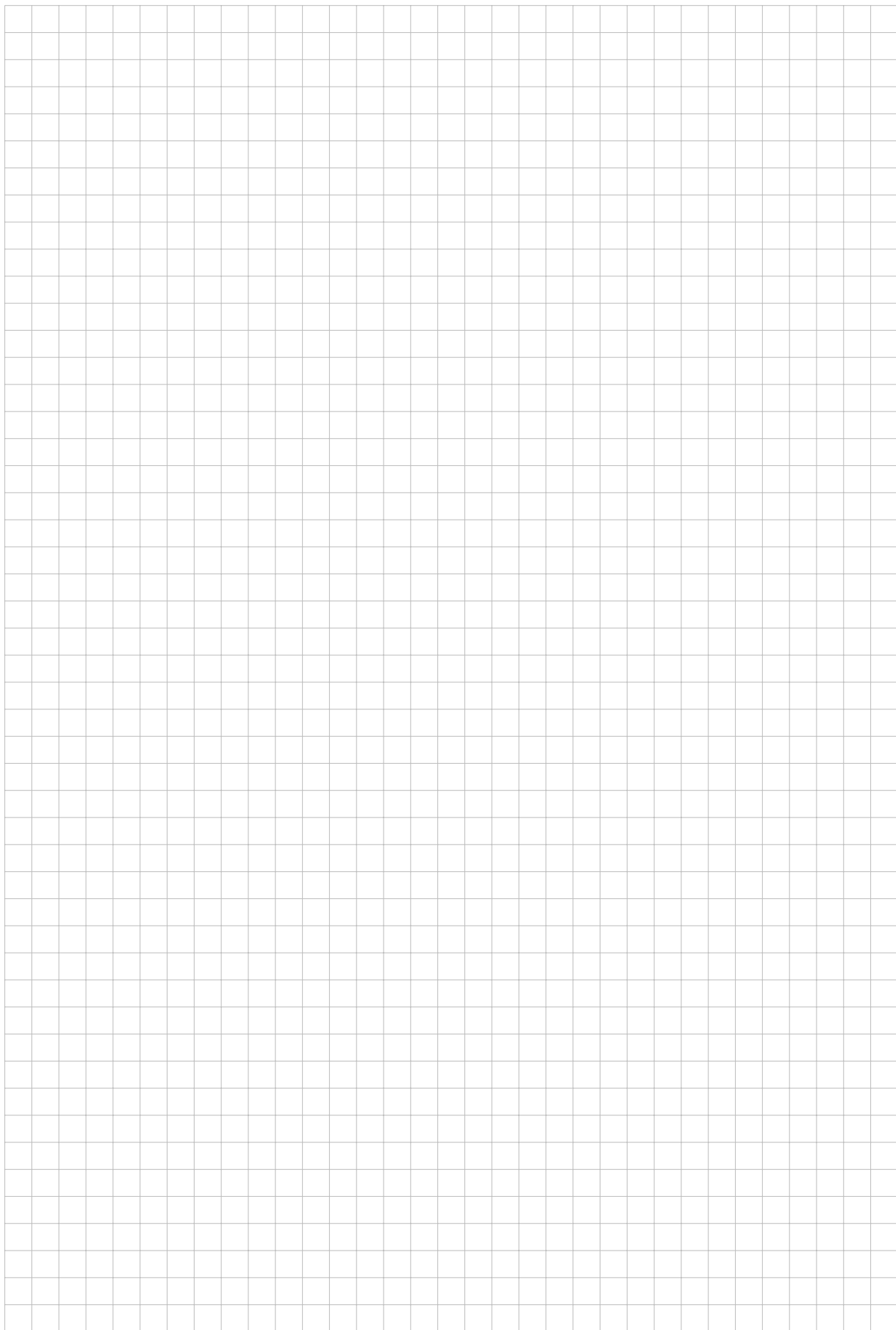
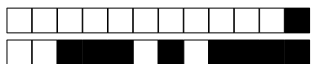
**Question 10 :** *Cette question est notée sur 8 points.*

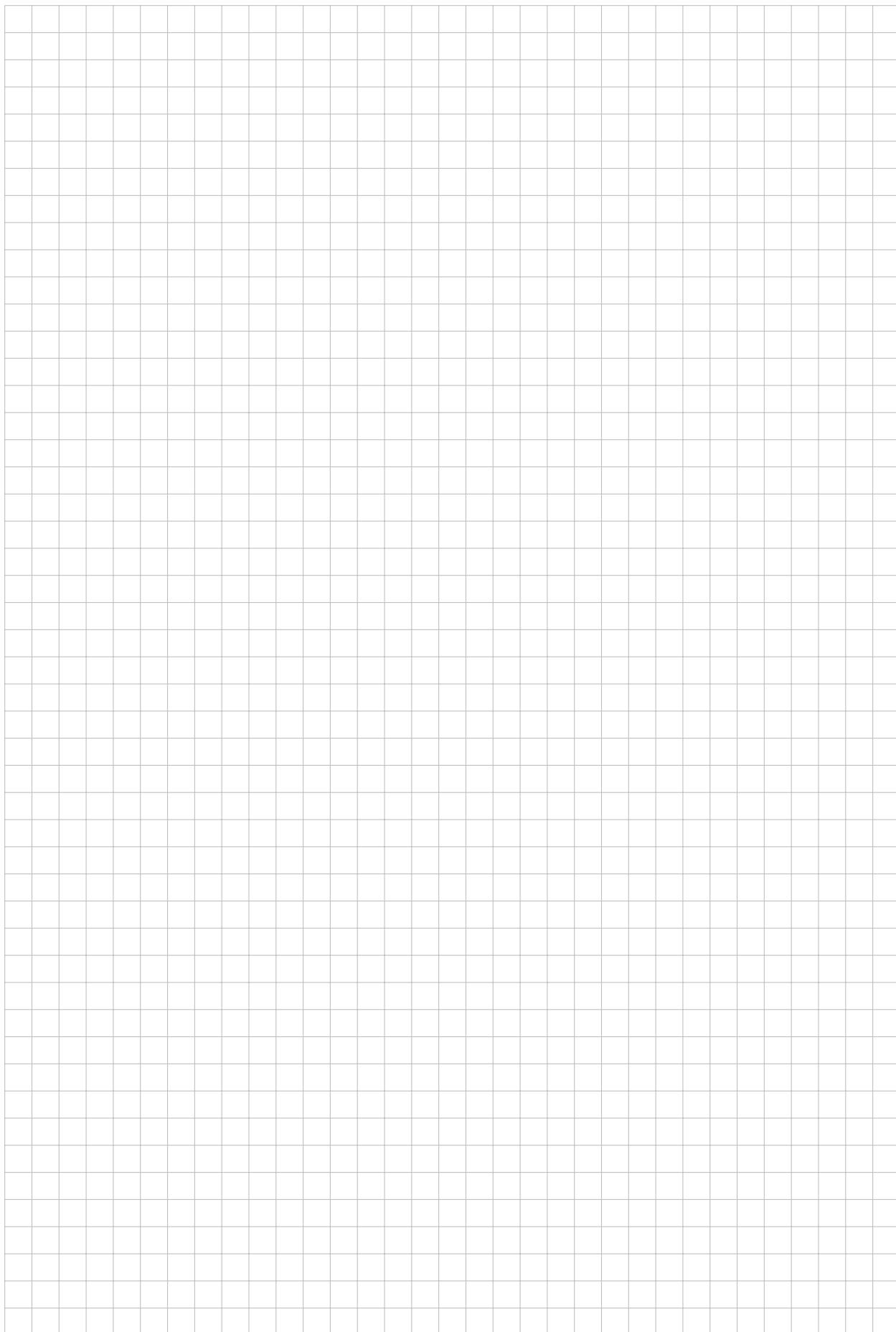
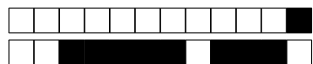
Soit  $\Gamma$  l'arc paramétré

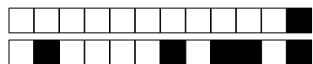
$$x(t) = \frac{t^2 + 3}{t - 1}, \quad y(t) = \frac{t^2}{t - 1}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

- (a) Faire l'étude de  $\Gamma$ , en déterminant les branches infinies, ainsi que les points à tangence horizontale/verticale.
- (b) Donner le tableau de variation des fonctions coordonnées  $x(t)$  et  $y(t)$ , puis en déduire une esquisse précise de  $\Gamma$  dans un repère orthonormé (1 unité = 1 carré).

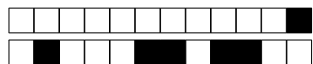








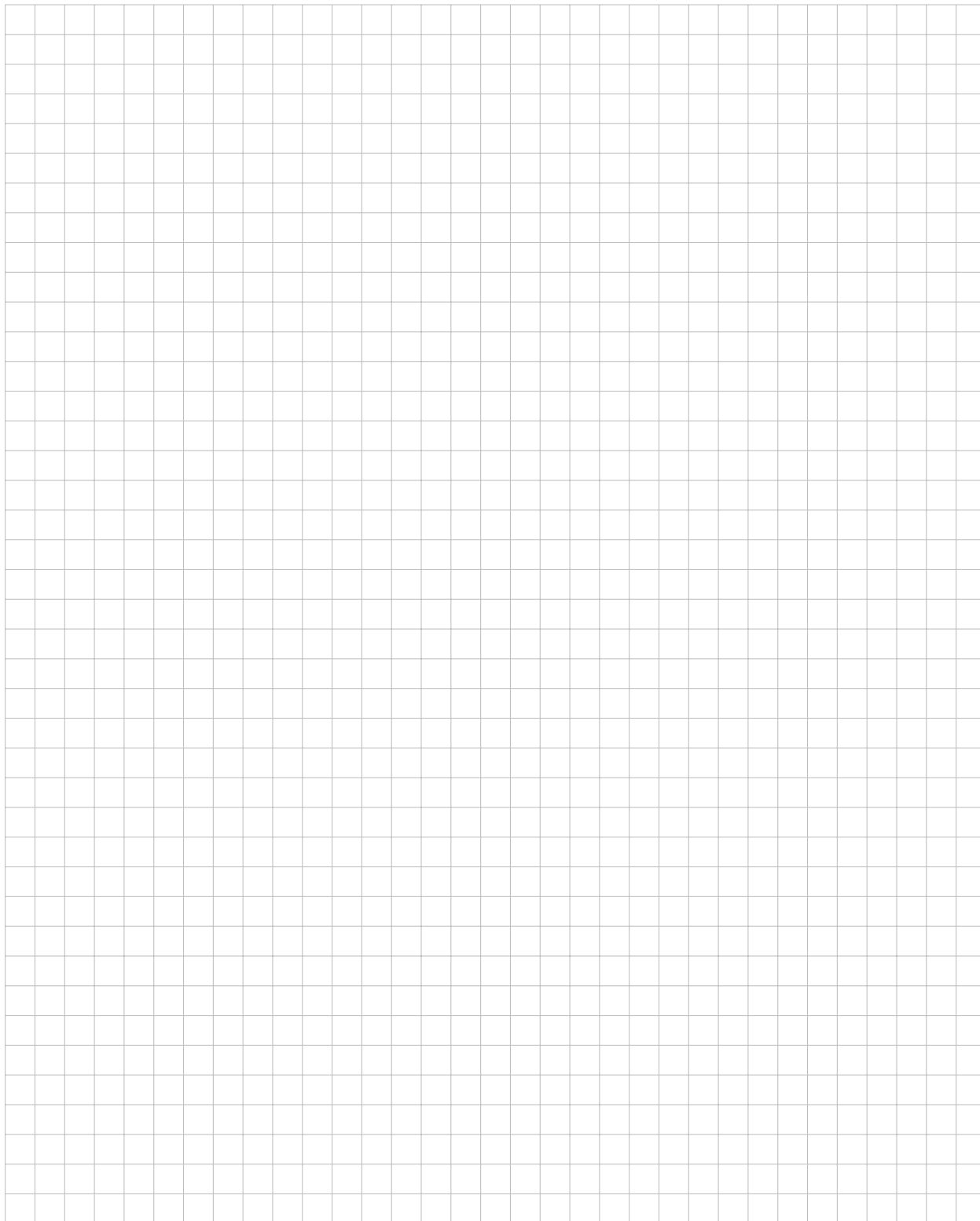


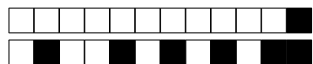


**Question 11 :** *Cette question est notée sur 4 points.*

Calculer l'intégrale indéfinie

$$\int e^{-x} \cdot \ln(e^{2x} + 4) dx$$







**Question 12 :** *Cette question est notée sur 7 points.*

- (a) Donner la solution générale de l'équation différentielle linéaire du premier ordre homogène suivante:

$$y' + \tanh(x) \cdot y = 0.$$

- (b) Donner la solution générale de l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre homogène suivante,

$$y'' - \tanh(x) \cdot y' + (\tanh^2(x) - 1) \cdot y = 0,$$

sachant que  $y_1(x) = \cosh(x)$  est une solution de cette équation.

