EPFL

1

Enseignants : Friedli, Maatouk, Woringer
Math 1B - MAN
26 juin 2019
Durée : 180 minutes

Student One

SCIPER : **111111**

Signature :

Indications

- Durée de l'examen : **180 minutes**.
- Posez votre **carte d'étudiant** sur la table.
- Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page.
- Ce document est imprimé recto-verso, il contient 28 pages.
- Ne pas séparer les feuilles.
- Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.
- La réponse à chaque question doit être **justifiée** et rédigée **à l'encre** sur la place réservée à cet effet à la suite de la question.
- Si la place prévue pour une question ne suffit pas, vous pouvez demander des feuilles supplémentaires aux surveillants. Chaque feuille ne peut être utilisée que pour **cette seule question**. Il convient de **coller l'un des codes-barre fourni en haut de la feuille supplémentaire et l'autre, identique, en bas de la dernière page de la question**.
- Les feuilles de brouillon sont à rendre mais **ne seront pas** corrigées ; des feuilles de brouillon supplémentaires peuvent être demandées en cas de besoin auprès des surveillants.
- Aucune documentation, ni machine à calculer ne sont autorisées.
- Veuillez **signer** votre examen.

Trigonométrie circulaire

Formules d'addition :

$$\sin(x+y)=\sin x\,\cos y+\cos x\,\sin y \qquad \cos(x+y)=\cos x\,\cos y-\sin x\,\sin y$$

$$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\,\tan y}$$

Formules de bissection :

$$\sin^2(\tfrac{x}{2})=\frac{1-\cos x}{2} \qquad \cos^2(\tfrac{x}{2})=\frac{1+\cos x}{2} \qquad \tan^2(\tfrac{x}{2})=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

Expressions de $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$ en fonction de $\tan(\frac{x}{2})$:

$$\sin x=\frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \cos x=\frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \tan x=\frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1-\tan^2(\frac{x}{2})}$$

Formules de transformation somme-produit :

$$\cos x+\cos y=2\cos(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \cos x-\cos y=-2\sin(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

$$\sin x+\sin y=2\sin(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \sin x-\sin y=2\cos(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

Trigonométrie hyperbolique

Définitions :

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \qquad \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \qquad \tanh x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \qquad \cosh^2 x-\sinh^2 x=1$$

Formules d'addition :

$$\sinh(x+y)=\sinh x\,\cosh y+\cosh x\,\sinh y \qquad \cosh(x+y)=\cosh x\,\cosh y+\sinh x\,\sinh y$$

$$\tanh(x+y)=\frac{\tanh x+\tanh y}{1+\tanh x\,\tanh y}$$

Formules de bissection :

$$\sinh^2(\tfrac{x}{2})=\frac{\cosh x-1}{2} \qquad \cosh^2(\tfrac{x}{2})=\frac{\cosh x+1}{2} \qquad \tanh(\tfrac{x}{2})=\frac{\cosh x-1}{\sinh x}=\frac{\sinh x}{\cosh x+1}$$

Dérivée de quelques fonctions

$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\text{arccot}\, x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\arg\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\arg\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\arg\tanh x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\arg\coth x$	$\frac{1}{1-x^2}$

Question 1 : *Cette question est notée sur 9 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 *Réservé au correcteur*

a) Donner la définition de $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L\,, \quad L \in \mathbb{R}\,.$

b) Montrer à l'aide de la définition que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\ln(x)} = 0\,.$

c) Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{\ln^2(x) + 1} \cdot \sin\left(\frac{1}{\ln(x)}\right).$

Corrigé

a) Par définition, $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0\,, \quad \exists\, \delta > 0 \quad \text{tel que} \quad x_0 < x < x_0 + \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon\,.$$

Barème : 2 points pour la définition correcte

b) Soit $\varepsilon > 0$ donné. Montrons qu'il existe $\delta > 0$ tel que $0 < x < \delta \;\Rightarrow\; \left|\frac{1}{\ln(x)} - 0\right| < \varepsilon\,.$

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{\ln(x)} - 0\right| < \varepsilon \quad &\Leftrightarrow \quad \left|\frac{1}{\ln(x)}\right| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{\ln(x)} < \varepsilon\,, \quad (\delta \leq 1\,,\ \ln(x) < 0) \\ &\Leftrightarrow \quad \ln(x) < -\frac{1}{\varepsilon} \\ &\Leftrightarrow \quad 0 < x < e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\,, \quad \text{car} \;\; \exp \;\; \text{est strictement croissante.} \end{aligned}$$

Donc tout $\delta \leq e^{-\frac{1}{\varepsilon}}$, $(\delta \leq 1)$, convient.

Barème : 4 points
- ∗ 1 point pour la contrainte définie par ε
- ∗ 1 point pour $\ln(x) < 0$
- ∗ 1,5 points pour $0 < x < e^{-\frac{1}{\varepsilon}}$
- ∗ 0,5 point pour donner δ

c) $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{\ln^2(x) + 1} \cdot \sin\left(\frac{1}{\ln(x)}\right) = \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{\ln^2(x) + 1} \cdot \dfrac{1}{\ln(x)}\,, \quad$ car $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\ln(x)} = 0\,,$

$$= \lim_{x \to 0^+} |\ln(x)| \cdot \sqrt{1 + \tfrac{1}{\ln^2(x)}} \cdot \frac{1}{\ln(x)} = \lim_{x \to 0^+} -\ln(x) \cdot \sqrt{1 + \tfrac{1}{\ln^2(x)}} \cdot \frac{1}{\ln(x)}\,,$$

car sur un voisinage à droite de $x = 0$, $\ln(x)$ est négatif.

D'autre part, la fonction $\sqrt{x}$ est continue en $x = 1$, donc on a

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{\ln^2(x) + 1} \cdot \sin\left(\tfrac{1}{\ln(x)}\right) = \lim_{x \to 0^+} -\sqrt{1 + \tfrac{1}{\ln^2(x)}} = -1\,.$$

Barème : 3 points
- ∗ 0,5 point pour constater que cette limite est une FI de type "$\infty \cdot 0$"
- ∗ 1 point pour gérer le sinus : $\sin(y) \sim y \;(y \to 0)$ ou $\lim_{y \to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1$
- ∗ 1 point pour sortir $\ln(x)$ de la racine
- ∗ 0,5 point pour conclure

Remarque : si le total des points est $n,5$ pts, $n = 0, 1, \cdots, 8$, alors arrondir le total à $n + 1$.

Question 2 : *Cette question est notée sur 9 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 *Réservé au correcteur*

On empile des boîtes B_1, B_2, B_3, ... Chaque boîte B_n est un parallélépipède rectangle dont la base est un carré d'aire A_n et dont la hauteur est h_n, $n \in \mathbb{N}^*$.
On suppose que $A_1 = 4$, $h_1 = 1$ et que pour tout $n \geq 1$, on a $A_{n+1} = \dfrac{A_n}{2}$ et $h_{n+1} = \beta\, h_n$ $(\beta > 0)$.

a) Calculer la valeur de β pour laquelle le volume total de la pile est égal à $V = 6$.

b) Pour la valeur de β trouvée en a), calculer la hauteur totale H de la pile.

c) Pour quelles valeurs de β la pile a-t-elle un volume total fini et une hauteur totale infinie ?

Corrigé

a) Soit v_n le volume de la $n-$ième boîte : $v_1 = A_1 \cdot h_1$, $v_2 = A_2 \cdot h_2 = \dfrac{A_1}{2} \cdot \beta\, h_1 = v_1 \cdot \dfrac{\beta}{2}$,

$$v_3 = v_2 \cdot \frac{\beta}{2} = v_1 \cdot \left[\frac{\beta}{2}\right]^2, \ \cdots \ , \ v_n = v_1 \cdot \left[\frac{\beta}{2}\right]^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Soit V_n le volume de l'empilement des n premières boîtes : $V_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} v_1 \cdot \left[\tfrac{\beta}{2}\right]^{k-1}$.

L'expression de V_n est le terme général d'une série géométrique de premier terme $v_1 = 4$ et de raison $r = \frac{\beta}{2}$:

$$V_n = B_1 \cdot \sum_{k=1}^{n} \left[\tfrac{\beta}{2}\right]^{k-1} = v_1 \cdot \frac{1 - \left[\frac{\beta}{2}\right]^n}{1 - \frac{\beta}{2}} = 4 \ \frac{1 - \left[\frac{\beta}{2}\right]^n}{1 - \frac{\beta}{2}}.$$

On exige que cette série géométrique converge :

c'est le cas si et seulement si $|r| = \frac{\beta}{2} < 1$, $(\beta \in]\,0\,,\,2\,[\,)$ et dans ce cas, on a

$$V = \lim_{n\to\infty} V_n = B_1 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left[\tfrac{\beta}{2}\right]^{k-1} = B_1 \cdot \left[1 + \tfrac{\beta}{2} + \left[\tfrac{\beta}{2}\right]^2 + \left[\tfrac{\beta}{2}\right]^3 + \cdots\right] = \frac{B_1}{1 - \frac{\beta}{2}} = \frac{4}{1 - \frac{\beta}{2}}$$

et qu'elle converge vers $V = 6$: $\dfrac{4}{1 - \frac{\beta}{2}} = 6 \ \Leftrightarrow \ \beta = \dfrac{2}{3}$, $\left(\frac{2}{3} \in]\,0\,,\,2\,[\,\right)$.

Barème : 5 points
- ∗ 0,5 point pour v_1, 0,5 point pour v_2, 1,5 points pour v_n
- ∗ 2 points pour l'expression de V
- ∗ 0,5 point pour β

b) Soit H_n la hauteur de la pile constituée des n premières boîtes : $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} h_k = \sum_{k=1}^{n} h_1 \cdot \beta^{k-1}$.

L'expression de H_n est le terme général d'une série géométrique de premier terme $h_1 = 1$ et de raison β :

$$H_n = h_1 \cdot \sum_{k=1}^{n} \beta^{k-1} = h_1 \cdot \frac{1 - \beta^n}{1 - \beta} = \frac{1 - \beta^n}{1 - \beta}.$$

Cette série géométrique converge car $|\beta| = \dfrac{2}{3} < 1$ et elle converge vers $H = \dfrac{1}{1-\beta} = 3$.

Barème : 2 points
- ∗ 0,5 point pour le critère de convergence
- ∗ 1,5 points pour la valeur de H

c) La série géométrique décrivant le volume de la pile converge si et seulement si $\beta \in]\,0\,,\,2\,[$.

Celle qui représente la hauteur de la tour est de raison β, elle diverge si et seulement si $|\beta| \geq 1$.

Le volume total de la pile est fini et sa hauteur est infinie si et seulement si $\beta \in [\,1\,,\,2\,[$.

Barème : 2 points

* 1 point pour la convergence du volume
* 1 point pour la divergence de la hauteur

Remarque : si le total des points est $n,5$ pts, $n = 0, 1, \cdots, 8$, alors arrondir le total à $n+1$.

Question 3 : *Cette question est notée sur 8 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 *Réservé au correcteur*

Soit f définie sur $\left[\frac{1}{2}\,,+\infty\right[$ par $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{2x-1}}{x-1}$, si $x\neq 1$ et $f(1)=-1$.

a) Montrer que f est dérivable en $x_0=1$ en utilisant la définition de la dérivabilité.

b) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x\geq 1 \\ ax^2+b & \text{si } x<1\,. \end{cases}$

Déterminer les paramètres $a,b\in\mathbb{R}$ de sorte que g soit dérivable en $x_0=1$.
Justifier rigoureusement votre réponse.

Corrigé

a) La fonction f est dérivable en $x=1$ si et seulement si $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ existe.

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1-\sqrt{2(1+h)-1}}{(1+h)-1}-(-1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h+1-\sqrt{2h+1}}{h^2} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(h+1)^2-(2h+1)}{h^2\left(h+1+\sqrt{2h+1}\right)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h^2}{h^2\left(h+1+\sqrt{2h+1}\right)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h+1+\sqrt{2h+1}} \\
&= \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

La fonction f est donc dérivable en $x=1$ et $f'(1)=\dfrac{1}{2}$.

Barème : 4 points
* 1 point pour le critère de dérivabilité
* 1 point pour écrire le rapport de Newton
* 1 point pour l'amplification par le conjugué (ou BH)
* 1 point pour la conclusion

b) • La fonction g doit être continue en $x_0=1$.

$$\lim_{x\to 1^-} g(x)=a+b\,,\qquad g(1)=f(1)=-1\qquad \textbf{et}\qquad \lim_{x\to 1^+} g(x)=f(1)=-1\,,$$

car f est continue en $x=1$ car dérivable en ce point.
La fonction g est donc continue en $x_0=1$ si et seulement si $a+b=-1$.

• Etudions la dérivabilité de g en $x=1$:

$*$ f est dérivable en $x=1$ et $f'(1)=\frac{1}{2}$, donc g est dérivable à droite en $x=1$ et $g'(1^+)=\frac{1}{2}$.

* Sous l'hypothèse de continuité de g en $x = 1$, on a $g(x) = ax^2 + b$ si $x \leq 1$. g est donc dérivable à gauche en $x = 1$ et $g'(1^-) = 2ax\big|_{x=1} = 2a$.
* g est dérivable en $x = 1$ si et seulement si $\left\{ \begin{array}{l} a + b = -1 \\ 2a = \frac{1}{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{1}{4} \\ b = -\frac{5}{4} \end{array} \right.$.

Barème : 4 points
* 1,5 points pour la continuité
* 2 points pour la dérivabilité
* 0,5 point pour la conclusion

Remarque : si le total des points est $n, 5$ pts, $n = 0, 1, \cdots, 7$, alors arrondir le total à $n + 1$.

Question 4 : *Cette question est notée sur 10 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ☐10 *Réservé au correcteur*

Etudier les branches infinies de l'arc paramétré Γ défini par

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = \frac{1}{t} \\ y(t) = \ln\left[\cosh\left(\frac{1}{t}\right)\right], \end{cases} \qquad t \in D_{\text{def}}.$$

Corrigé

La trajectoire Γ est symétrique par rapport à l'axe Oy, car $x(t)$ est impair et $y(t)$ est pair.

On étudie les limites aux "points frontières" de $D_{\text{def}} = \mathbb{R}^*$.

- Lorsque $t \to \pm\infty$, $x(t) \to 0$ et $y(t) \to 0$, en effet

  $$\lim_{t\to\pm\infty} \ln\left[\cosh\left(\tfrac{1}{t}\right)\right] = \ln\left[\lim_{t\to\pm\infty} \cosh\left(\tfrac{1}{t}\right)\right] = \ln\left[\cosh\left(\lim_{t\to\pm\infty} \tfrac{1}{t}\right)\right] = \ln\left[\cosh(0)\right] = \ln(1) = 0,$$

  car les fonctions cosh et ln sont continues.

  Le point courant $M(t)$ tend vers $(0,0)$, l'arc Γ n'admet pas de branches infinies lorsque $t \to \pm\infty$.

  Barème : 1,5 points pour dire ce qui se passe lorsque $t \to \pm\infty$

- Lorsque $t \to 0^+$, $x(t) \to +\infty$ et $y(t) \to +\infty$, on recherche une éventuelle asymptote oblique :

  $$* \lim_{t\to 0^+} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln\left[\cosh\left(\frac{1}{t}\right)\right]}{\frac{1}{t}} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{\sinh\left(\frac{1}{t}\right)}{\cosh\left(\frac{1}{t}\right)} \cdot \left[-\frac{1}{t^2}\right]}{-\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to 0^+} \tanh\left(\tfrac{1}{t}\right) = 1.$$

  $$* \lim_{t\to 0^+} \left[y(t) - x(t)\right] = \lim_{t\to 0^+} \left[\ln\left[\cosh\left(\tfrac{1}{t}\right)\right] - \tfrac{1}{t}\right] = \lim_{t\to 0^+} \left[\ln\left[\frac{e^{\frac{1}{t}} + e^{-\frac{1}{t}}}{2}\right] - \frac{1}{t}\right]$$

  $$= \lim_{t\to 0^+} \left[\ln\left[e^{\frac{1}{t}} \cdot \frac{1+e^{-\frac{2}{t}}}{2}\right] - \frac{1}{t}\right] = \lim_{t\to 0^+} \left[\frac{1}{t} + \ln\left[\frac{1+e^{-\frac{2}{t}}}{2}\right] - \frac{1}{t}\right] = \lim_{t\to 0^+} \left[\ln\left[\frac{1+e^{-\frac{2}{t}}}{2}\right]\right],$$

  or $\lim_{t\to 0^+} e^{-\frac{2}{t}} = 0$, donc $\lim_{t\to 0^+} \left[y(t) - x(t)\right] = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$.

  Donc Γ admet, lorsque $t \to 0^+$, une asymptote oblique d'équation $y = x - \ln 2$.

  Barème : 6 points
  * 1 point pour la limite de $x(t)$ et de $y(t)$
  * 2 points pour la limite de $\frac{y(t)}{x(t)}$
  * 3 points pour la limite de $y(t) - x(t)$

- Par symétrie, Γ admet, lorsque $t \to 0^-$, une asymptote oblique d'équation $y = -x - \ln 2$.

  Barème : 2,5 points pour refaire la même chose ou pour utiliser la symétrie de la trajectoire Γ

Remarque : si le total des points est $n,5$ pts, $n = 0, 1, \cdots, 9$, alors arrondir le total à $n+1$.

Question 5 : *Cette question est notée sur 7 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 *Réservé au correcteur*

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{x}+1} e^{-t^2+5t}\, dt\,, \qquad x > 0\,.$$

Déterminer x de sorte que $f(x)$ soit maximale. Justifier rigoureusement votre réponse.

Corrigé

On étudie le signe de la dérivée de $f(x)$.

Soit $G(t)$ une primitive de $g(t) = e^{-t^2+5t}$,

$$f(x) = G(\sqrt{x}+1) - G(\sqrt{x})$$

On en déduit l'expression de $f'(x)$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left[G(\sqrt{x}+1) - G(\sqrt{x})\right]' \\
&= G'(\sqrt{x}+1)\cdot(\sqrt{x}+1)' - G'(\sqrt{x})\cdot(\sqrt{x})' \\
&= g(\sqrt{x}+1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} - g(\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}\left[e^{-(\sqrt{x}+1)^2+5(\sqrt{x}+1)} - e^{-x+5\sqrt{x}}\right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}\left[e^{-x-2\sqrt{x}-1+5\sqrt{x}+5} - e^{-x+5\sqrt{x}}\right] \\
&= \frac{e^{-x+5\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\left[e^{-2\sqrt{x}+4} - 1\right].
\end{aligned}$$

Le signe de $f'(x)$ est égal au signe de $\left[e^{-2\sqrt{x}+4} - 1\right]$ car $\dfrac{e^{-x+5\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} > 0\,,\ \forall x > 0\,.$

$$e^{-2\sqrt{x}+4} - 1 \geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad e^{-2\sqrt{x}+4} \geq 1 \quad\Leftrightarrow\quad e^{-2\sqrt{x}+4} \geq e^0 \quad\Leftrightarrow\quad -2\sqrt{x}+4 \geq 0$$

car la fonction exponentielle est croissante,

$$f'(x) \geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad -2\sqrt{x}+4 \geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad x \leq 4\,.$$

Signe de $f'(x)$:

x	0		4	
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$

La fonction f atteint donc son maximum en $x = 4$.

Barème : 7 points

- $\ast$ 1,5 points pour écrire $f(x)$ à l'aide d'une primitive de e^{-t^2+5t}
- $\ast$ 1,5 points pour la dérivée de la fonction composée
- $\ast$ 1,5 points pour factoriser $f'(x)$
- $\ast$ 1,5 points pour étudier le signe de $f'(x)$
- $\ast$ 1 point pour le critère du maximum et la conclusion

Remarque : si le total des points est $n,5$ pts, $n = 0, 1, \cdots, 6$, alors arrondir le total à $n+1$.

Question 6 : *Cette question est notée sur 8 points.*

$\square_0$ $\square_1$ $\square_2$ $\square_3$ $\square_4$ $\square_5$ $\square_6$ $\square_7$ $\square_8$	*Réservé au correcteur*

Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{4e^x - 5}{e^{2x} - 2\,e^x + 5}\,.$$

Corrigé

- Changement de variable : $u = e^x\,, \qquad du = e^x\,dx\,, \qquad dx = \frac{1}{u}\,du\,.$

$$\int \frac{4e^x - 5}{e^{2x} - 2\,e^x + 5}\,dx = \int \frac{4u - 5}{u^2 - 2\,u + 5}\cdot\frac{1}{u}\,du = \int \frac{4u - 5}{u\,(u^2 - 2\,u + 5)}\,du\,.$$

- Décomposition en éléments simples

$$\frac{4u - 5}{u\,\underbrace{(u^2 - 2\,u + 5)}_{\Delta<0}} = \frac{A}{u} + \frac{B\,u + C}{u^2 - 2\,u + 5}\,, \qquad A, B, C \in \mathbb{R}\,.$$

Recherche des coefficients A, B et C

- ◦ par évaluation :
  - ∗ multiplication par x, puis évaluation en $x = 0$: $A = -1$,
  - ∗ multiplication par x, puis $x \to \infty$: $A + B = 0$, $B = 1$,
  - ∗ évaluation en $x = +1$: $A + \frac{B+C}{4} = -\frac{1}{4}$, $C = 2$.
- ◦ ou par identification :

$$\frac{4u - 5}{u\,(u^2 - 2\,u + 5)} = \frac{A}{u} + \frac{B\,u + C}{u^2 - 2\,u + 5} = \frac{A\,(u^2 - 2\,u + 5) + u\,(B\,u + C)}{u\,(u^2 - 2\,u + 5)}\,,$$

$$\frac{4u - 5}{u\,(u^2 - 2\,u + 5)} = \frac{(A + B)\,u^2 + (C - 2A)\,u + 5A}{u\,(u^2 - 2\,u + 5)} \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} A + B = 0 \\ C - 2A = 4 \\ 5A = -5 \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} A = -1 \\ B = 1 \\ C = 2 \end{array}\right.$$

$$\frac{4u - 5}{u\,(u^2 - 2\,u + 5)} = -\frac{1}{u} + \frac{u + 2}{u^2 - 2\,u + 5}\,.$$

- Intégration de l'élément simple de deuxième espèce

$$\frac{u + 2}{u^2 - 2\,u + 5} = \frac{1}{2}\,\frac{2u - 2}{u^2 - 2\,u + 5} + \frac{3}{u^2 - 2\,u + 5}\,,$$

avec $$\frac{3}{u^2 - 2\,u + 5} = \frac{3}{(u - 1)^2 + 4} = \frac{3}{4}\,\frac{1}{\left(\frac{u-1}{2}\right)^2 + 1} = \frac{3}{2}\,\frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{u-1}{2}\right)^2 + 1}\,.$$

$$\int \frac{(u + 2)\,du}{u^2 - 2\,u + 5} = \frac{1}{2}\int \frac{(2u - 2)\,du}{u^2 - 2\,u + 5} + \frac{3}{2}\int \frac{\frac{1}{2}\,du}{\left(\frac{u-1}{2}\right)^2 + 1} = \frac{1}{2}\,\ln(u^2 - 2\,u + 5) + \frac{3}{2}\,\arctan\left(\tfrac{u-1}{2}\right) + C\,.$$

- Conclusion

$$\int f(x)\,dx = -\ln|u| + \frac{1}{2}\ln(u^2 - 2\,u + 5) + \frac{3}{2}\arctan\left(\tfrac{u-1}{2}\right) + C\,,$$

$$\int f(x)\,dx = -x + \frac{1}{2}\ln(e^{2x} - 2\,e^{x} + 5) + \frac{3}{2}\arctan\left(\tfrac{e^x-1}{2}\right) + C\,.$$

Barème : 8 points

- ∗ 2 points pour le changement de variable
- ∗ 2 points pour la décomposition en éléments simples
- ∗ 3 points pour l'intégration de l'élément simple de deuxième espèce
  - ∘ 1 point pour la partie logarithme
  - ∘ 2 points pour la partie arctangente
- ∗ 1 point pour le retour en x et pour la constante d'intégration C

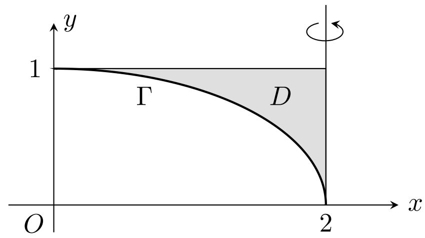
Remarque : si le total des points est $n,5$ pts, $n = 0, 1, \cdots, 7$, alors arrondir le total à $n+1$.

Question 7 : *Cette question est notée sur 7 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 *Réservé au correcteur*

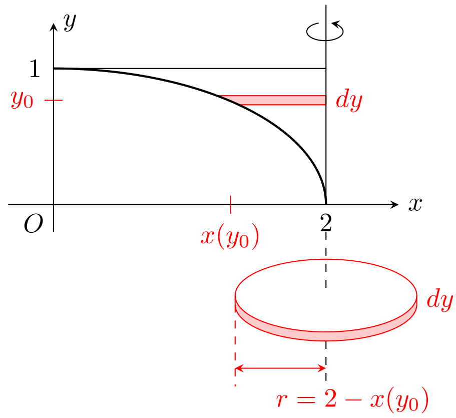
On considère le domaine D décrit ci-joint, limité par l'arc d'ellipse Γ d'équation $x^2+4y^2=4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, et les droites d'équations $x=2$ et $y=1$.

Calculer le volume du corps de révolution engendré par la rotation de ce domaine D autour de l'axe d'équation $x=2$.



Corrigé

La section de ce corps de révolution par le plan d'équation $y=y_0$, perpendiculaire à l'axe de rotation, est un disque de rayon $r=2-x(y_0)$. L'aire de ce disque vaut



$$A(y_0)=\pi\, r^2=\pi\,[2-x(y_0)]^2\,,$$

avec $\quad x(y_0)=\sqrt{4-4y_0^2}=2\sqrt{1-y_0^2}\,.$

$$A(y_0)=4\pi\left[1-\sqrt{1-y_0^2}\right]^2=4\pi\left[1-2\sqrt{1-y_0^2}+1-y_0^2\right],$$

$$A(y_0)=4\pi\left[2-y_0^2-2\sqrt{1-y_0^2}\right].$$

On en déduit le volume V du corps de révolution : $V=\int_0^1 A(y)\,dy=4\pi\int_0^1\left[2-y^2-2\sqrt{1-y^2}\right]dy\,.$

Calcul de $\int_0^1\sqrt{1-y^2}\,dy$ par changement de variable. On pose $y=\sin(t)$ et on obtient :

$$\int_0^1\sqrt{1-y^2}\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t)\,[\cos(t)\,dt\,]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(t)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt=\frac{t}{2}+\frac{\sin(2t)}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}\,.$$

$$V=4\pi\int_0^1\left[2-y^2\,\right]dy-8\pi\int_0^1\sqrt{1-y^2}\,dy=4\pi\left[2y-\frac{y^3}{3}\right]_0^1-2\pi^2=\frac{20\,\pi}{3}-2\pi^2\,.$$

Barème : 7 points

- ∗ 3 points pour la modélisation
  - ◦ 1 point pour le rayon du disque
  - ◦ 1 point pour $A(y_0)$
  - ◦ 1 point pour l'expression de V
- ∗ 4 points pour l'intégration
  - ◦ 2 points pour l'intégration de la racine (ou argument géométrique)
  - ◦ 2 points pour la conclusion

Remarque : si le total des points est $n,5$ pts, $n=0,1,\cdots,6$, alors arrondir le total à $n+1$.

Question 8 : *Cette question est notée sur 7 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7	*Réservé au correcteur*

On considère le domaine D du plan délimité par la droite d'équation $x = 1$ et par les graphes des deux fonctions suivantes :

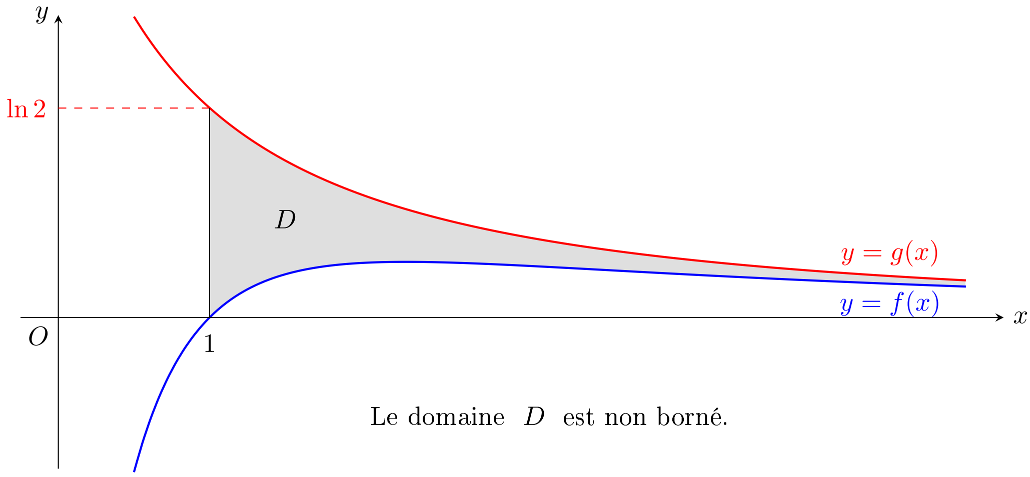
$$f(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \ln(x) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \ln(x+1)\,, \quad x \geq 1\,.$$

a) Esquisser le domaine D (on ne demande pas une étude complète des fonctions f et g).

b) Calculer l'aire A de ce domaine.

Corrigé

a) $\forall\, x \geq 1\,, \quad g(x) > f(x)\,, \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0 \qquad$ et $\qquad f(1) = 0\,, \quad g(1) = \ln 2\,.$



Le domaine D est non borné.

b) Calcul de l'aire de ce domaine

$$A = \int_1^{+\infty} [\,g(x) - f(x)\,]\, dx = \lim_{L\to+\infty} \int_1^L [\,g(x) - f(x)\,]\, dx\,.$$

Recherche d'une primitive de $f - g$:

$$\int [\,g(x) - f(x)\,]\, dx = \int \frac{1}{x^2}\, [\,\ln(x+1) - \ln(x)\,]\, dx = \int \frac{1}{x^2} \cdot \ln\left[\tfrac{x+1}{x}\right] dx = \int \frac{1}{x^2} \cdot \ln\left[1 + \tfrac{1}{x}\right] dx\,.$$

Et en posant $u = 1 + \dfrac{1}{x}\,,\ du = -\dfrac{1}{x^2}\, dx\,,$ on obtient

$$\int \frac{1}{x^2} \cdot \ln\left[1 + \tfrac{1}{x}\right] dx = -\int \ln(u)\, du\,,$$

que l'on intègre par parties :

$$\int \ln(u)\, du = \int \underset{\uparrow}{1} \cdot \underset{\downarrow}{\ln(u)}\, du = u \cdot \ln(u) - \int u \cdot \frac{1}{u}\, du = u \cdot \ln(u) - u + C\,.$$

$$\int [\,g(x) - f(x)\,]\, dx = -\left(1 + \tfrac{1}{x}\right) \cdot \left[\,\ln\left(1 + \tfrac{1}{x}\right) - 1\,\right] + C\,.$$

Evaluation puis passage à la limite :

$$\int_1^L [\,g(x) - f(x)\,]\,dx = -\left(1+\tfrac{1}{L}\right)\cdot\left[\,\ln\left(1+\tfrac{1}{L}\right)-1\,\right] + 2\cdot[\,\ln(2)-1\,]\,.$$

$$\lim_{L\to+\infty}\int_1^L [\,g(x) - f(x)\,]\,dx = 2\cdot[\,\ln(2)-1\,] - \lim_{L\to+\infty}\left(1+\tfrac{1}{L}\right)\cdot\left[\,\ln\left(1+\tfrac{1}{L}\right)-1\,\right],$$

$$A = 2\,\ln(2) - 1\,.$$

Barème : 7 points

- ∗ 2 points pour l'esquisse
- ∗ 1,5 points pour l'expression de A
- ∗ 2,5 points pour l'intégration
  - ◦ 0,5 point pour la différence des logarithmes
  - ◦ 1 point pour le changement de variable
  - ◦ 1 point pour l'intégration par parties
- ∗ 1 point pour l'évaluation et le passage à la limite

Remarque : si le total des points est $n,5$ pts, $n = 0, 1, \cdots, 6$, alors arrondir le total à $n+1$.

Question 9 : *Cette question est notée sur 10 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ☐10 *Réservé au correcteur*

a) Résoudre l'équation différentielle avec condition initiale suivante :

$$y'(x) + \tan(x) \cdot y(x) = \sin(2x)\,, \qquad y(0) = 1\,. \qquad (\textit{6 points})$$

b) Déterminer une équation différentielle linéaire inhomogène du deuxième ordre à coefficients constants admettant comme solutions toutes les fonctions :

$$y(x) = \frac{\cos(x)}{2} + A\,e^x \cdot \cos(2x) + B\,e^x \cdot \sin(2x)\,, \quad A, B \in \mathbb{R}\,. \qquad (\textit{4 points})$$

Corrigé

a) • Résolution de l'équation différentielle sans condition initiale

∘ Une méthode

∗ Résolution de l'équation homogène : $y'(x) + \tan(x) \cdot y(x) = 0\,, \quad x \in D_{\tan}$

$$\ln|\,y(x)\,| = \int -\tan(x)\,dx = \int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\,dx\,, \qquad \ln|\,y(x)\,| = \ln|\cos(x)\,| + C\,,$$

$$y(x) = A \cdot \cos(x)\,, \quad A \in \mathbb{R}\,.$$

∗ Recherche d'une solution particulière de l'équation inhomogène : variation de la constante

$$y_P(x) = A(x) \cdot \cos(x)\,, \quad y_P'(x) = A'(x) \cdot \cos(x) - A(x) \cdot \sin(x)\,,$$

$$y_P'(x) + \tan(x) \cdot y_p(x) = \sin(2x) \;\Rightarrow\; A'(x) \cdot \cos(x) - A(x) \cdot \sin(x) + \tan(x) \cdot A(x) \cdot \cos(x) = \sin(2x)$$

$$\Leftrightarrow\; A'(x) \cdot \cos(x) = \sin(2x) \;\Leftrightarrow\; A'(x) = 2\,\sin(x)\,, \quad A(x) = -2\cos(x)\,.$$

$$y_P(x) = -2\,\cos^2(x)\,.$$

∗ La solution générale de l'équation différentielle inhomogène s'écrit comme somme de la solution particulière et de la solution homogène :

$$y(x) = -2\,\cos^2(x) + A \cdot \cos(x)\,, \quad x \in D_{\tan}\,, \quad A \in \mathbb{R}\,.$$

∘ Une autre méthode : résolution à l'aide du facteur intégrant

Le facteur intégrant s'écrit : $e^{\int \tan(x)\,dx} = e^{-\ln\cos(x)} = \dfrac{1}{\cos(x)}\,.$
L'équation différentielle devient :

$$\frac{1}{\cos(x)} \cdot y'(x) + \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} \cdot y(x) = \frac{1}{\cos(x)} \cdot \sin(2x) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\frac{1}{\cos(x)} \cdot y(x)\right]' = 2\,\sin(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\cos(x)} \cdot y(x) = -2\,\cos(x) + A \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = -2\,\cos^2(x) + A \cdot \cos(x)\,, \quad x \in D_{\tan}\,.$$

• Solution définie par la condition initiale

La condition initiale définit une unique solution :

$$y(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad -2\,\cos^2(0) + A \cdot \cos(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad A = 3\,.$$

La condition initiale définit non seulement la constante A mais aussi le domaine de définition de la solution :

$$y(x) = -2\,\cos^2(x) + 3 \cdot \cos(x)\,, \quad x \in \left]-\tfrac{\pi}{2}\,, \tfrac{\pi}{2}\right[\,.$$

Barème : 6 points

* Une méthode : 4 points
  * 1,5 points pour résoudre l'équation homogène
  * 2 points pour la solution particulière
  * 0,5 point pour l'expression de la solution générale
* Une autre méthode : résolution à l'aide du facteur intégrant : 4 points
  * 1,5 points pour calculer le facteur intégrant
  * 1,5 points pour utiliser le facteur intégrant
  * 1 point pour conclure
* 2 points pour la solution correspondant à la condition initiale
  * 1,5 points pour la constante $A = 3$
  * 0,5 point pour le domaine de définition de la solution

b) Les solutions de cette équation différentielle sont constituées

* d'une solution particulière de l'équation inhomogène : $y_p = \frac{\cos(x)}{2}$
* et de la solution générale de l'équation homogène : $y_H = A\, e^x \cdot \cos(2x) + B\, e^x \cdot \sin(2x)\,.$

La solution générale de l'équation homogène décrit une oscillation, donc le discriminant de l'équation caractéristique est négatif et les solutions de cette équation caractéristique sont deux nombres complexes conjugués.

Si $\lambda = u \pm i\, v$, alors $y_H = A\, e^{u\,x} \cdot \cos(v\,x) + B\, e^{u\,x} \cdot \sin(v\,x)$, on en déduit donc que $u = 1$ et $v = 2$ et que les zéros du polynôme caractéristique sont $\lambda = 1 \pm 2\, i\,.$

Le polynôme caractéristique s'écrit donc : $[\,\lambda - (1 - 2\,i)\,]\,[\,\lambda - (1 + 2\,i)\,] = \lambda^2 - 2\,\lambda + 5\,.$

On en déduit l'équation homogène associée : $y''(x) - 2\,y'(x) + 5\,y(x) = 0\,.$

L'équation différentielle inhomogène a pour forme $y''(x) - 2\,y'(x) + 5\,y(x) = r(x)$ et elle est vérifiée par $y(x) = \frac{\cos(x)}{2}$, on en déduit $r(x)$:

$$y(x) = \frac{\cos(x)}{2} \quad \Rightarrow \quad y'(x) = -\frac{\sin(x)}{2} \quad \Rightarrow \quad y''(x) = -\frac{\cos(x)}{2}\,.$$

$$y''(x) - 2\,y'(x) + 5\,y(x) = r(x) \;\Rightarrow\; -\frac{\cos(x)}{2} + \sin(x) + 5\,\frac{\cos(x)}{2} = r(x) \;\Leftrightarrow\; r(x) = \sin(x) + 2\,\cos(x)\,.$$

L'équation différentielle linéaire inhomogène du deuxième ordre à coefficients constants est donc :

$$y''(x) - 2\,y'(x) + 5\,y(x) = \sin(x) + 2\,\cos(x)\,.$$

Barème : 4 points

* 1 point pour identifier la solution homogène et la solution particulière
* 1 point pour déterminer les zéros du polynôme caractéristique : $\lambda = 1 \pm 2i$
* 1 point pour donner l'équation homogène
* 1 point pour donner l'équation inhomogène
* 1 point pour calculer $y'(x)$ et $y''(x)$ et essayer de remplacer dans $y''(x) + p\,y'(x) + q\,y(x) = r(x)$

Remarque : si le total des points est $n,5$ pts, $n = 0, 1, \cdots, 9$, alors arrondir le total à $n + 1\,.$

Enseignants : Friedli, Maatouk, Woringer
Math 1B - MAN
26 juin 2019
Durée : 180 minutes

2

Student Two

SCIPER : **222222**

Signature :

Indications

- Durée de l'examen : **180 minutes**.
- Posez votre **carte d'étudiant** sur la table.
- Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page.
- Ce document est imprimé recto-verso, il contient 28 pages.
- Ne pas séparer les feuilles.
- Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.
- La réponse à chaque question doit être **justifiée** et rédigée **à l'encre** sur la place réservée à cet effet à la suite de la question.
- Si la place prévue pour une question ne suffit pas, vous pouvez demander des feuilles supplémentaires aux surveillants. Chaque feuille ne peut être utilisée que pour **cette seule question**. Il convient de **coller l'un des codes-barre fourni en haut de la feuille supplémentaire et l'autre, identique, en bas de la dernière page de la question**.
- Les feuilles de brouillon sont à rendre mais **ne seront pas** corrigées ; des feuilles de brouillon supplémentaires peuvent être demandées en cas de besoin auprès des surveillants.
- Aucune documentation, ni machine à calculer ne sont autorisées.
- Veuillez **signer** votre examen.

Trigonométrie circulaire

Formules d'addition :

$$\sin(x+y) = \sin x\,\cos y + \cos x\,\sin y \qquad \cos(x+y) = \cos x\,\cos y - \sin x\,\sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\,\tan y}$$

Formules de bissection :

$$\sin^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{2} \qquad \cos^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1+\cos x}{2} \qquad \tan^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

Expressions de $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$ en fonction de $\tan(\frac{x}{2})$:

$$\sin x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \cos x = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \tan x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1-\tan^2(\frac{x}{2})}$$

Formules de transformation somme-produit :

$$\cos x + \cos y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \cos x - \cos y = -2\sin(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \sin x - \sin y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

Trigonométrie hyperbolique

Définitions :

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Formules d'addition :

$$\sinh(x+y) = \sinh x\,\cosh y + \cosh x\,\sinh y \qquad \cosh(x+y) = \cosh x\,\cosh y + \sinh x\,\sinh y$$

$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x\,\tanh y}$$

Formules de bissection :

$$\sinh^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x - 1}{2} \qquad \cosh^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x + 1}{2} \qquad \tanh(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x - 1}{\sinh x} = \frac{\sinh x}{\cosh x + 1}$$

Dérivée de quelques fonctions

$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\arg\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\arg\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\arg\tanh x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\arg\coth x$	$\frac{1}{1-x^2}$

Question 1 : *Cette question est notée sur 9 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 *Réservé au correcteur*

a) Donner la définition de $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L\,,\quad L \in \mathbb{R}\,.$

b) Montrer à l'aide de la définition que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\ln(x)} = 0\,.$

c) Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{\ln^2(x)+1} \cdot \sin\left(\frac{1}{\ln(x)}\right).$

Corrigé

a) Par définition, $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$ si et seulement si

$$\forall\, \varepsilon > 0\,,\quad \exists\, \delta > 0 \quad \text{tel que} \quad x_0 < x < x_0 + \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon\,.$$

Barème : 2 points pour la définition correcte

b) Soit $\varepsilon > 0$ donné. Montrons qu'il existe $\delta > 0$ tel que $0 < x < \delta \;\Rightarrow\; \left|\frac{1}{\ln(x)} - 0\right| < \varepsilon\,.$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{\ln(x)} - 0\right| < \varepsilon \quad &\Leftrightarrow \quad \left|\frac{1}{\ln(x)}\right| < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{\ln(x)} < \varepsilon\,, \quad (\delta \leq 1\,,\ \ln(x) < 0) \\
&\Leftrightarrow \quad \ln(x) < -\frac{1}{\varepsilon} \\
&\Leftrightarrow \quad 0 < x < e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\,, \quad \text{car exp est strictement croissante.}
\end{aligned}$$

Donc tout $\delta \leq e^{-\frac{1}{\varepsilon}}$, $(\delta \leq 1)$, convient.

Barème : 4 points
* 1 point pour la contrainte définie par ε
* 1 point pour $\ln(x) < 0$
* 1,5 points pour $0 < x < e^{-\frac{1}{\varepsilon}}$
* 0,5 point pour donner δ

c) $$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{\ln^2(x)+1} \cdot \sin\left(\tfrac{1}{\ln(x)}\right) = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{\ln^2(x)+1} \cdot \frac{1}{\ln(x)}\,, \quad \text{car} \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\ln(x)} = 0\,,$$

$$= \lim_{x \to 0^+} |\ln(x)| \cdot \sqrt{1 + \tfrac{1}{\ln^2(x)}} \cdot \frac{1}{\ln(x)} = \lim_{x \to 0^+} -\ln(x) \cdot \sqrt{1 + \tfrac{1}{\ln^2(x)}} \cdot \frac{1}{\ln(x)}\,,$$

car sur un voisinage à droite de $x = 0$, $\ln(x)$ est négatif.

D'autre part, la fonction $\sqrt{x}$ est continue en $x = 1$, donc on a

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{\ln^2(x)+1} \cdot \sin\left(\tfrac{1}{\ln(x)}\right) = \lim_{x \to 0^+} -\sqrt{1 + \tfrac{1}{\ln^2(x)}} = -1\,.$$

Barème : 3 points
* 0,5 point pour constater que cette limite est une FI de type "$\infty \cdot 0$"
* 1 point pour gérer le sinus : $\sin(y) \sim y\ (y \to 0)$ ou $\lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1$
* 1 point pour sortir $\ln(x)$ de la racine
* 0,5 point pour conclure

Remarque : si le total des points est $n,5$ pts, $n = 0, 1, \cdots, 8$, alors arrondir le total à $n+1$.

Question 2 : *Cette question est notée sur 9 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9 *Réservé au correcteur*

On empile des boîtes B_1, B_2, B_3, ... Chaque boîte B_n est un parallélépipède rectangle dont la base est un carré d'aire A_n et dont la hauteur est h_n, $n \in \mathbb{N}^*$.
On suppose que $A_1 = 4$, $h_1 = 1$ et que pour tout $n \geq 1$, on a $A_{n+1} = \dfrac{A_n}{2}$ et $h_{n+1} = \beta\, h_n$ $(\beta > 0)$.

a) Calculer la valeur de β pour laquelle le volume total de la pile est égal à $V = 6$.

b) Pour la valeur de β trouvée en a), calculer la hauteur totale H de la pile.

c) Pour quelles valeurs de β la pile a-t-elle un volume total fini et une hauteur totale infinie ?

Corrigé

a) Soit v_n le volume de la n−ième boîte : $v_1 = A_1 \cdot h_1$, $v_2 = A_2 \cdot h_2 = \dfrac{A_1}{2} \cdot \beta\, h_1 = v_1 \cdot \dfrac{\beta}{2}$,

$$v_3 = v_2 \cdot \frac{\beta}{2} = v_1 \cdot \left[\frac{\beta}{2}\right]^2, \ \cdots \ , \ v_n = v_1 \cdot \left[\frac{\beta}{2}\right]^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Soit V_n le volume de l'empilement des n premières boîtes : $V_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} v_1 \cdot \left[\tfrac{\beta}{2}\right]^{k-1}$.

L'expression de V_n est le terme général d'une série géométrique de premier terme $v_1 = 4$ et de raison $r = \frac{\beta}{2}$:

$$V_n = B_1 \cdot \sum_{k=1}^{n} \left[\tfrac{\beta}{2}\right]^{k-1} = v_1 \cdot \frac{1 - \left[\frac{\beta}{2}\right]^n}{1 - \frac{\beta}{2}} = 4\ \frac{1 - \left[\frac{\beta}{2}\right]^n}{1 - \frac{\beta}{2}}.$$

On exige que cette série géométrique converge :

c'est le cas si et seulement si $|r| = \frac{\beta}{2} < 1$, $(\beta \in]\,0\,,\,2\,[)$ et dans ce cas, on a

$$V = \lim_{n\to\infty} V_n = B_1 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left[\tfrac{\beta}{2}\right]^{k-1} = B_1 \cdot \left[1 + \tfrac{\beta}{2} + \left[\tfrac{\beta}{2}\right]^2 + \left[\tfrac{\beta}{2}\right]^3 + \cdots\right] = \frac{B_1}{1 - \frac{\beta}{2}} = \frac{4}{1 - \frac{\beta}{2}}$$

et qu'elle converge vers $V = 6$: $\dfrac{4}{1 - \frac{\beta}{2}} = 6 \ \Leftrightarrow\ \beta = \dfrac{2}{3}$, $\left(\frac{2}{3} \in]\,0\,,\,2\,[\right)$.

Barème : 5 points
* 0,5 point pour v_1, 0,5 point pour v_2, 1,5 points pour v_n
* 2 points pour l'expression de V
* 0,5 point pour β

b) Soit H_n la hauteur de la pile constituée des n premières boîtes : $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} h_k = \sum_{k=1}^{n} h_1 \cdot \beta^{k-1}$.

L'expression de H_n est le terme général d'une série géométrique de premier terme $h_1 = 1$ et de raison β :

$$H_n = h_1 \cdot \sum_{k=1}^{n} \beta^{k-1} = h_1 \cdot \frac{1 - \beta^n}{1 - \beta} = \frac{1 - \beta^n}{1 - \beta}.$$

Cette série géométrique converge car $|\beta| = \dfrac{2}{3} < 1$ et elle converge vers $H = \dfrac{1}{1 - \beta} = 3$.

Barème : 2 points
* 0,5 point pour le critère de convergence
* 1,5 points pour la valeur de H

c) La série géométrique décrivant le volume de la pile converge si et seulement si $\beta \in]\,0\,,\,2\,[$.

Celle qui représente la hauteur de la tour est de raison β, elle diverge si et seulement si $|\beta| \geq 1$.

Le volume total de la pile est fini et sa hauteur est infinie si et seulement si $\beta \in [\,1\,,\,2\,[$.

Barème : 2 points

- $\ast$ 1 point pour la convergence du volume
- $\ast$ 1 point pour la divergence de la hauteur

Remarque : si le total des points est $n,5$ pts, $n = 0, 1, \cdots, 8$, alors arrondir le total à $n + 1$.

Question 3 : *Cette question est notée sur 8 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 *Réservé au correcteur*

Soit f définie sur $\left[\frac{1}{2}\,,+\infty\right[$ par $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{2x-1}}{x-1}$, si $x\neq 1$ et $f(1)=-1$.

a) Montrer que f est dérivable en $x_0=1$ en utilisant la définition de la dérivabilité.

b) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x\geq 1 \\ ax^2+b & \text{si } x<1\,. \end{cases}$

Déterminer les paramètres $a,b\in\mathbb{R}$ de sorte que g soit dérivable en $x_0=1$.
Justifier rigoureusement votre réponse.

Corrigé

a) La fonction f est dérivable en $x=1$ si et seulement si $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ existe.

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1-\sqrt{2(1+h)-1}}{(1+h)-1}-(-1)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h+1-\sqrt{2h+1}}{h^2}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(h+1)^2-(2h+1)}{h^2\,\left(h+1+\sqrt{2h+1}\right)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h^2}{h^2\,\left(h+1+\sqrt{2h+1}\right)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h+1+\sqrt{2h+1}}\\
&= \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

La fonction f est donc dérivable en $x=1$ et $f'(1)=\dfrac{1}{2}$.

Barème : 4 points

* 1 point pour le critère de dérivabilité
* 1 point pour écrire le rapport de Newton
* 1 point pour l'amplification par le conjugué (ou BH)
* 1 point pour la conclusion

b) • La fonction g doit être continue en $x_0=1$.

$$\lim_{x\to 1^-} g(x)=a+b\,,\qquad g(1)=f(1)=-1\qquad \textbf{et}\qquad \lim_{x\to 1^+} g(x)=f(1)=-1\,,$$

car f est continue en $x=1$ car dérivable en ce point.
La fonction g est donc continue en $x_0=1$ si et seulement si $a+b=-1$.

• Etudions la dérivabilité de g en $x=1$:

* f est dérivable en $x=1$ et $f'(1)=\frac{1}{2}$, donc g est dérivable à droite en $x=1$ et $g'(1^+)=\frac{1}{2}$.

* Sous l'hypothèse de continuité de g en $x = 1$, on a $g(x) = ax^2 + b$ si $x \leq 1$.
  g est donc dérivable à gauche en $x = 1$ et $g'(1^-) = 2ax\big|_{x=1} = 2a$.
* g est dérivable en $x = 1$ si et seulement si $\begin{cases} a + b = -1 \\ 2a = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = -\frac{5}{4} \end{cases}$.

Barème : 4 points
* 1,5 points pour la continuité
* 2 points pour la dérivabilité
* 0,5 point pour la conclusion

Remarque : si le total des points est $n, 5$ pts, $n = 0, 1, \cdots, 7$, alors arrondir le total à $n + 1$.

Question 4 : *Cette question est notée sur 10 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ☐10 *Réservé au correcteur*

Etudier les branches infinies de l'arc paramétré Γ défini par

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = \frac{1}{t} \\ y(t) = \ln\left[\cosh\left(\frac{1}{t}\right)\right], \end{cases} \qquad t \in D_{\text{def}}.$$

Corrigé

La trajectoire Γ est symétrique par rapport à l'axe Oy, car $x(t)$ est impair et $y(t)$ est pair.

On étudie les limites aux "points frontières" de $D_{\text{def}} = \mathbb{R}^*$.

- Lorsque $t \to \pm\infty$, $x(t) \to 0$ et $y(t) \to 0$, en effet

  $$\lim_{t\to\pm\infty} \ln\left[\cosh\left(\tfrac{1}{t}\right)\right] = \ln\left[\lim_{t\to\pm\infty} \cosh\left(\tfrac{1}{t}\right)\right] = \ln\left[\cosh\left(\lim_{t\to\pm\infty} \tfrac{1}{t}\right)\right] = \ln\left[\cosh(0)\right] = \ln(1) = 0,$$

  car les fonctions cosh et ln sont continues.

  Le point courant $M(t)$ tend vers $(0,0)$, l'arc Γ n'admet pas de branches infinies lorsque $t \to \pm\infty$.

  Barème : 1,5 points pour dire ce qui se passe lorsque $t \to \pm\infty$

- Lorsque $t \to 0^+$, $x(t) \to +\infty$ et $y(t) \to +\infty$, on recherche une éventuelle asymptote oblique :

  $$* \lim_{t\to 0^+} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln\left[\cosh\left(\frac{1}{t}\right)\right]}{\frac{1}{t}} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{\sinh\left(\frac{1}{t}\right)}{\cosh\left(\frac{1}{t}\right)} \cdot \left[-\frac{1}{t^2}\right]}{-\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to 0^+} \tanh\left(\tfrac{1}{t}\right) = 1.$$

  $$* \lim_{t\to 0^+} \left[y(t) - x(t)\right] = \lim_{t\to 0^+} \left[\ln\left[\cosh\left(\tfrac{1}{t}\right)\right] - \tfrac{1}{t}\right] = \lim_{t\to 0^+} \left[\ln\left[\frac{e^{\frac{1}{t}} + e^{-\frac{1}{t}}}{2}\right] - \frac{1}{t}\right]$$

  $$= \lim_{t\to 0^+} \left[\ln\left[e^{\frac{1}{t}} \cdot \frac{1+e^{-\frac{2}{t}}}{2}\right] - \frac{1}{t}\right] = \lim_{t\to 0^+} \left[\frac{1}{t} + \ln\left[\frac{1+e^{-\frac{2}{t}}}{2}\right] - \frac{1}{t}\right] = \lim_{t\to 0^+} \left[\ln\left[\frac{1+e^{-\frac{2}{t}}}{2}\right]\right],$$

  or $\lim_{t\to 0^+} e^{-\frac{2}{t}} = 0$, donc $\lim_{t\to 0^+} \left[y(t) - x(t)\right] = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$.

  Donc Γ admet, lorsque $t \to 0^+$, une asymptote oblique d'équation $y = x - \ln 2$.

  Barème : 6 points
  * 1 point pour la limite de $x(t)$ et de $y(t)$
  * 2 points pour la limite de $\frac{y(t)}{x(t)}$
  * 3 points pour la limite de $y(t) - x(t)$

- Par symétrie, Γ admet, lorsque $t \to 0^-$, une asymptote oblique d'équation $y = -x - \ln 2$.

  Barème : 2,5 points pour refaire la même chose ou pour utiliser la symétrie de la trajectoire Γ

Remarque : si le total des points est $n,5$ pts, $n = 0, 1, \cdots, 9$, alors arrondir le total à $n+1$.

Question 5 : *Cette question est notée sur 7 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 *Réservé au correcteur*

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{x}+1} e^{-t^2+5t}\, dt\,, \qquad x > 0\,.$$

Déterminer x de sorte que $f(x)$ soit maximale. Justifier rigoureusement votre réponse.

Corrigé

On étudie le signe de la dérivée de $f(x)$.

Soit $G(t)$ une primitive de $g(t) = e^{-t^2+5t}$,

$$f(x) = G(\sqrt{x}+1) - G(\sqrt{x})$$

On en déduit l'expression de $f'(x)$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left[G(\sqrt{x}+1) - G(\sqrt{x})\right]' \\
&= G'(\sqrt{x}+1)\cdot(\sqrt{x}+1)' - G'(\sqrt{x})\cdot(\sqrt{x})' \\
&= g(\sqrt{x}+1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} - g(\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}\left[e^{-(\sqrt{x}+1)^2+5(\sqrt{x}+1)} - e^{-x+5\sqrt{x}}\right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}\left[e^{-x-2\sqrt{x}-1+5\sqrt{x}+5} - e^{-x+5\sqrt{x}}\right] \\
&= \frac{e^{-x+5\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\left[e^{-2\sqrt{x}+4} - 1\right].
\end{aligned}$$

Le signe de $f'(x)$ est égal au signe de $\left[e^{-2\sqrt{x}+4} - 1\right]$ car $\dfrac{e^{-x+5\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} > 0\,,\ \forall x > 0\,.$

$$e^{-2\sqrt{x}+4} - 1 \geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad e^{-2\sqrt{x}+4} \geq 1 \quad\Leftrightarrow\quad e^{-2\sqrt{x}+4} \geq e^0 \quad\Leftrightarrow\quad -2\sqrt{x}+4 \geq 0$$

car la fonction exponentielle est croissante,

$$f'(x) \geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad -2\sqrt{x}+4 \geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad x \leq 4\,.$$

Signe de $f'(x)$:

x	0		4	
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$

La fonction f atteint donc son maximum en $x = 4$.

Barème : 7 points

- ∗ 1,5 points pour écrire $f(x)$ à l'aide d'une primitive de e^{-t^2+5t}
- ∗ 1,5 points pour la dérivée de la fonction composée
- ∗ 1,5 points pour factoriser $f'(x)$
- ∗ 1,5 points pour étudier le signe de $f'(x)$
- ∗ 1 point pour le critère du maximum et la conclusion

Remarque : si le total des points est $n,5$ pts, $n = 0, 1, \cdots, 6$, alors arrondir le total à $n+1$.

Question 6 : *Cette question est notée sur 8 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 *Réservé au correcteur*

Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{4e^x - 5}{e^{2x} - 2\,e^x + 5}\,.$$

Corrigé

- Changement de variable : $u = e^x\,,\qquad du = e^x\,dx\,,\qquad dx = \frac{1}{u}\,du\,.$

$$\int \frac{4e^x - 5}{e^{2x} - 2\,e^x + 5}\,dx = \int \frac{4u-5}{u^2 - 2\,u + 5}\cdot\frac{1}{u}\,du = \int \frac{4u-5}{u\,(u^2 - 2\,u + 5)}\,du\,.$$

- Décomposition en éléments simples

$$\frac{4u-5}{u\,\underbrace{(u^2 - 2\,u + 5)}_{\Delta<0}} = \frac{A}{u} + \frac{B\,u + C}{u^2 - 2\,u + 5}\,,\qquad A, B, C \in \mathbb{R}\,.$$

Recherche des coefficients A, B et C

  - par évaluation :
    - multiplication par x, puis évaluation en $x = 0$: $A = -1$,
    - multiplication par x, puis $x \to \infty$: $A + B = 0$, $B = 1$,
    - évaluation en $x = +1$: $A + \frac{B+C}{4} = -\frac{1}{4}$, $C = 2$.
  - ou par identification :

$$\frac{4u-5}{u\,(u^2 - 2\,u + 5)} = \frac{A}{u} + \frac{B\,u + C}{u^2 - 2\,u + 5} = \frac{A\,(u^2 - 2\,u + 5) + u\,(B\,u + C)}{u\,(u^2 - 2\,u + 5)}\,,$$

$$\frac{4u-5}{u\,(u^2 - 2\,u + 5)} = \frac{(A+B)\,u^2 + (C - 2A)\,u + 5A}{u\,(u^2 - 2\,u + 5)} \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} A + B = 0 \\ C - 2A = 4 \\ 5A = -5 \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} A = -1 \\ B = 1 \\ C = 2 \end{array}\right.$$

$$\frac{4u-5}{u\,(u^2 - 2\,u + 5)} = -\frac{1}{u} + \frac{u+2}{u^2 - 2\,u + 5}\,.$$

- Intégration de l'élément simple de deuxième espèce

$$\frac{u+2}{u^2 - 2\,u + 5} = \frac{1}{2}\,\frac{2u-2}{u^2 - 2\,u + 5} + \frac{3}{u^2 - 2\,u + 5}\,,$$

avec $$\frac{3}{u^2 - 2\,u + 5} = \frac{3}{(u-1)^2 + 4} = \frac{3}{4}\,\frac{1}{\left(\frac{u-1}{2}\right)^2 + 1} = \frac{3}{2}\,\frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{u-1}{2}\right)^2 + 1}\,.$$

$$\int \frac{(u+2)\,du}{u^2 - 2\,u + 5} = \frac{1}{2}\int \frac{(2u-2)\,du}{u^2 - 2\,u + 5} + \frac{3}{2}\int \frac{\frac{1}{2}\,du}{\left(\frac{u-1}{2}\right)^2 + 1} = \frac{1}{2}\,\ln(u^2 - 2\,u + 5) + \frac{3}{2}\,\arctan\left(\tfrac{u-1}{2}\right) + C\,.$$

- Conclusion

$$\int f(x)\,dx = -\ln|u| + \frac{1}{2}\ln(u^2 - 2\,u + 5) + \frac{3}{2}\arctan\left(\tfrac{u-1}{2}\right) + C\,,$$

$$\int f(x)\,dx = -x + \frac{1}{2}\ln(e^{2x} - 2\,e^x + 5) + \frac{3}{2}\arctan\left(\tfrac{e^x-1}{2}\right) + C\,.$$

Barème : 8 points

- ∗ 2 points pour le changement de variable
- ∗ 2 points pour la décomposition en éléments simples
- ∗ 3 points pour l'intégration de l'élément simple de deuxième espèce
  - ∘ 1 point pour la partie logarithme
  - ∘ 2 points pour la partie arctangente
- ∗ 1 point pour le retour en x et pour la constante d'intégration C

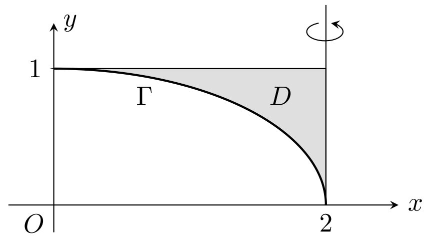
Remarque : si le total des points est $n,5$ pts, $n = 0, 1, \cdots, 7$, alors arrondir le total à $n+1$.

Question 7 : *Cette question est notée sur 7 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 *Réservé au correcteur*

On considère le domaine D décrit ci-joint, limité par l'arc d'ellipse Γ d'équation $x^2+4y^2=4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, et les droites d'équations $x=2$ et $y=1$.

Calculer le volume du corps de révolution engendré par la rotation de ce domaine D autour de l'axe d'équation $x=2$.

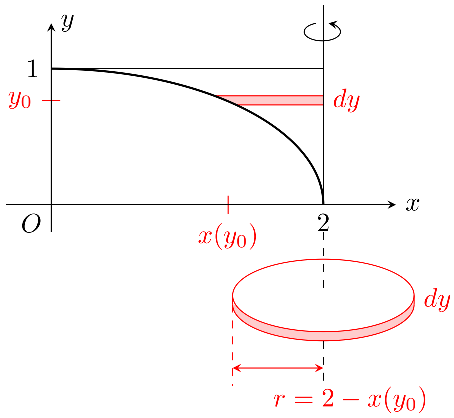


Corrigé

La section de ce corps de révolution par le plan d'équation $y=y_0$, perpendiculaire à l'axe de rotation, est un disque de rayon $r=2-x(y_0)$. L'aire de ce disque vaut

$$A(y_0)=\pi\, r^2=\pi\,[2-x(y_0)]^2\,,$$

avec $\quad x(y_0)=\sqrt{4-4y_0^2}=2\sqrt{1-y_0^2}\,.$



$$A(y_0)=4\pi\left[1-\sqrt{1-y_0^2}\right]^2=4\pi\left[1-2\sqrt{1-y_0^2}+1-y_0^2\right],$$

$$A(y_0)=4\pi\left[2-y_0^2-2\sqrt{1-y_0^2}\right].$$

On en déduit le volume V du corps de révolution : $V=\int_0^1 A(y)\,dy=4\pi\int_0^1\left[2-y^2-2\sqrt{1-y^2}\right]dy\,.$

Calcul de $\int_0^1\sqrt{1-y^2}\,dy$ par changement de variable. On pose $y=\sin(t)$ et on obtient :

$$\int_0^1\sqrt{1-y^2}\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t)\,[\cos(t)\,dt\,]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(t)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt=\frac{t}{2}+\frac{\sin(2t)}{4}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}\,.$$

$$V=4\pi\int_0^1\left[2-y^2\,\right]dy-8\pi\int_0^1\sqrt{1-y^2}\,dy=4\pi\left[2y-\frac{y^3}{3}\right]_0^1-2\pi^2=\frac{20\,\pi}{3}-2\pi^2\,.$$

Barème : 7 points

- $\ast$ 3 points pour la modélisation
  - ∘ 1 point pour le rayon du disque
  - ∘ 1 point pour $A(y_0)$
  - ∘ 1 point pour l'expression de V
- $\ast$ 4 points pour l'intégration
  - ∘ 2 points pour l'intégration de la racine (ou argument géométrique)
  - ∘ 2 points pour la conclusion

Remarque : si le total des points est $n,5$ pts, $n=0,1,\cdots,6$, alors arrondir le total à $n+1$.

Question 8 : *Cette question est notée sur 7 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 *Réservé au correcteur*

On considère le domaine D du plan délimité par la droite d'équation $x = 1$ et par les graphes des deux fonctions suivantes :

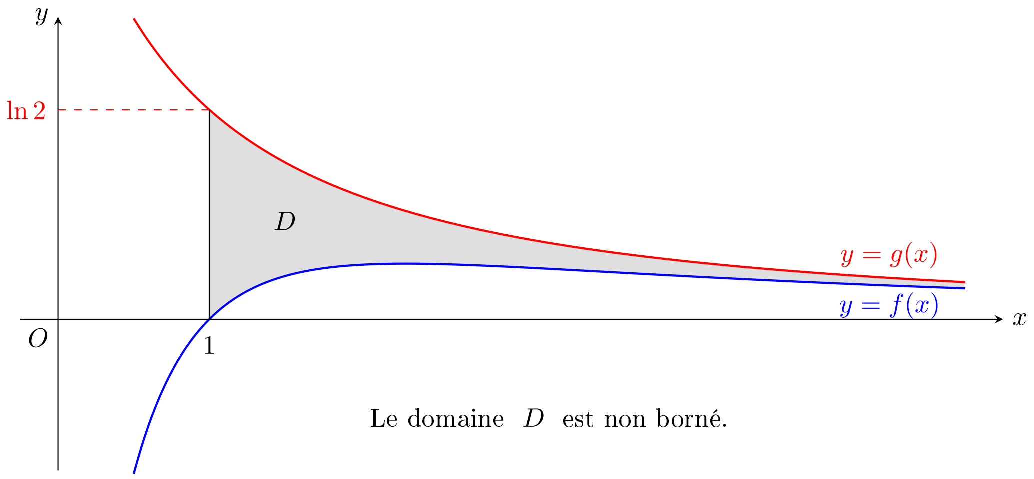
$$f(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \ln(x) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \ln(x+1)\,, \quad x \geq 1\,.$$

a) Esquisser le domaine D (on ne demande pas une étude complète des fonctions f et g).

b) Calculer l'aire A de ce domaine.

Corrigé

a) $\forall\, x \geq 1\,, \quad g(x) > f(x)\,, \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0 \qquad$ et $\qquad f(1) = 0\,, \quad g(1) = \ln 2\,.$



Le domaine D est non borné.

b) Calcul de l'aire de ce domaine

$$A = \int_1^{+\infty} [\,g(x) - f(x)\,]\,dx = \lim_{L\to+\infty} \int_1^L [\,g(x) - f(x)\,]\,dx\,.$$

Recherche d'une primitive de $f - g$:

$$\int [\,g(x) - f(x)\,]\,dx = \int \frac{1}{x^2}\,[\ln(x+1) - \ln(x)\,]\,dx = \int \frac{1}{x^2} \cdot \ln\left[\tfrac{x+1}{x}\right]\,dx = \int \frac{1}{x^2} \cdot \ln\left[1 + \tfrac{1}{x}\right]\,dx\,.$$

Et en posant $u = 1 + \dfrac{1}{x}\,,\ du = -\dfrac{1}{x^2}\,dx\,,$ on obtient

$$\int \frac{1}{x^2} \cdot \ln\left[1 + \tfrac{1}{x}\right]\,dx = -\int \ln(u)\,du\,,$$

que l'on intègre par parties :

$$\int \ln(u)\,du = \int \underset{\uparrow}{1} \cdot \underset{\downarrow}{\ln(u)}\,du = u \cdot \ln(u) - \int u \cdot \frac{1}{u}\,du = u \cdot \ln(u) - u + C\,.$$

$$\int [\,g(x) - f(x)\,]\,dx = -\left(1 + \tfrac{1}{x}\right) \cdot \left[\ln\left(1 + \tfrac{1}{x}\right) - 1\right] + C\,.$$

Evaluation puis passage à la limite :

$$\int_1^L [\,g(x) - f(x)\,]\,dx = -\left(1 + \tfrac{1}{L}\right) \cdot \left[\,\ln\left(1 + \tfrac{1}{L}\right) - 1\,\right] + 2 \cdot [\,\ln(2) - 1\,]\,.$$

$$\lim_{L \to +\infty} \int_1^L [\,g(x) - f(x)\,]\,dx = 2 \cdot [\,\ln(2) - 1\,] - \lim_{L \to +\infty} \left(1 + \tfrac{1}{L}\right) \cdot \left[\,\ln\left(1 + \tfrac{1}{L}\right) - 1\,\right],$$

$$A = 2\,\ln(2) - 1\,.$$

Barème : 7 points

- ∗ 2 points pour l'esquisse
- ∗ 1,5 points pour l'expression de A
- ∗ 2,5 points pour l'intégration
  - ◦ 0,5 point pour la différence des logarithmes
  - ◦ 1 point pour le changement de variable
  - ◦ 1 point pour l'intégration par parties
- ∗ 1 point pour l'évaluation et le passage à la limite

Remarque : si le total des points est $n,5$ pts, $n = 0, 1, \cdots, 6$, alors arrondir le total à $n + 1$.

Question 9 : *Cette question est notée sur 10 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ☐10 *Réservé au correcteur*

a) Résoudre l'équation différentielle avec condition initiale suivante :

$$y'(x) + \tan(x) \cdot y(x) = \sin(2x)\,, \qquad y(0) = 1\,. \qquad (\textit{6 points})$$

b) Déterminer une équation différentielle linéaire inhomogène du deuxième ordre à coefficients constants admettant comme solutions toutes les fonctions :

$$y(x) = \frac{\cos(x)}{2} + A\,e^{x} \cdot \cos(2x) + B\,e^{x} \cdot \sin(2x)\,, \quad A, B \in \mathbb{R}\,. \qquad (\textit{4 points})$$

Corrigé

a) • Résolution de l'équation différentielle sans condition initiale

∘ Une méthode

∗ Résolution de l'équation homogène : $y'(x) + \tan(x) \cdot y(x) = 0\,, \quad x \in D_{\tan}$

$$\ln|\,y(x)\,| = \int -\tan(x)\,dx = \int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\,dx\,, \qquad \ln|\,y(x)\,| = \ln|\cos(x)\,| + C\,,$$

$$y(x) = A \cdot \cos(x)\,, \quad A \in \mathbb{R}\,.$$

∗ Recherche d'une solution particulière de l'équation inhomogène : variation de la constante

$$y_P(x) = A(x) \cdot \cos(x)\,, \quad y_P'(x) = A'(x) \cdot \cos(x) - A(x) \cdot \sin(x)\,,$$

$$y_P'(x) + \tan(x) \cdot y_p(x) = \sin(2x) \;\Rightarrow\; A'(x) \cdot \cos(x) - A(x) \cdot \sin(x) + \tan(x) \cdot A(x) \cdot \cos(x) = \sin(2x)$$

$$\Leftrightarrow\; A'(x) \cdot \cos(x) = \sin(2x) \;\Leftrightarrow\; A'(x) = 2\,\sin(x)\,, \quad A(x) = -2\cos(x)\,.$$

$$y_P(x) = -2\,\cos^2(x)\,.$$

∗ La solution générale de l'équation différentielle inhomogène s'écrit comme somme de la solution particulière et de la solution homogène :

$$y(x) = -2\,\cos^2(x) + A \cdot \cos(x)\,, \quad x \in D_{\tan}\,, \quad A \in \mathbb{R}\,.$$

∘ Une autre méthode : résolution à l'aide du facteur intégrant

Le facteur intégrant s'écrit : $e^{\int \tan(x)\,dx} = e^{-\ln\cos(x)} = \dfrac{1}{\cos(x)}\,.$
L'équation différentielle devient :

$$\frac{1}{\cos(x)} \cdot y'(x) + \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} \cdot y(x) = \frac{1}{\cos(x)} \cdot \sin(2x) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\frac{1}{\cos(x)} \cdot y(x)\right]' = 2\,\sin(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\cos(x)} \cdot y(x) = -2\,\cos(x) + A \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = -2\,\cos^2(x) + A \cdot \cos(x)\,, \quad x \in D_{\tan}\,.$$

• Solution définie par la condition initiale

La condition initiale définit une unique solution :

$$y(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad -2\,\cos^2(0) + A \cdot \cos(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad A = 3\,.$$

La condition initiale définit non seulement la constante A mais aussi le domaine de définition de la solution :

$$y(x) = -2\,\cos^2(x) + 3 \cdot \cos(x)\,, \quad x \in \left]-\tfrac{\pi}{2}\,,\,\tfrac{\pi}{2}\right[\,.$$

Barème : 6 points

* Une méthode : 4 points
  * 1,5 points pour résoudre l'équation homogène
  * 2 points pour la solution particulière
  * 0,5 point pour l'expression de la solution générale
* Une autre méthode : résolution à l'aide du facteur intégrant : 4 points
  * 1,5 points pour calculer le facteur intégrant
  * 1,5 points pour utiliser le facteur intégrant
  * 1 point pour conclure
* 2 points pour la solution correspondant à la condition initiale
  * 1,5 points pour la constante $A = 3$
  * 0,5 point pour le domaine de définition de la solution

b) Les solutions de cette équation différentielle sont constituées

* d'une solution particulière de l'équation inhomogène : $y_p = \frac{\cos(x)}{2}$
* et de la solution générale de l'équation homogène : $y_H = A\,e^x \cdot \cos(2x) + B\,e^x \cdot \sin(2x)$.

La solution générale de l'équation homogène décrit une oscillation, donc le discriminant de l'équation caractéristique est négatif et les solutions de cette équation caractéristique sont deux nombres complexes conjugués.

Si $\lambda = u \pm i\,v$, alors $y_H = A\,e^{u\,x} \cdot \cos(v\,x) + B\,e^{u\,x} \cdot \sin(v\,x)$, on en déduit donc que $u = 1$ et $v = 2$ et que les zéros du polynôme caractéristique sont $\lambda = 1 \pm 2\,i$.

Le polynôme caractéristique s'écrit donc : $[\lambda - (1 - 2\,i)]\,[\lambda - (1 + 2\,i)] = \lambda^2 - 2\,\lambda + 5$.

On en déduit l'équation homogène associée : $y''(x) - 2\,y'(x) + 5\,y(x) = 0$.

L'équation différentielle inhomogène a pour forme $y''(x) - 2\,y'(x) + 5\,y(x) = r(x)$ et elle est vérifiée par $y(x) = \frac{\cos(x)}{2}$, on en déduit $r(x)$:

$$y(x) = \frac{\cos(x)}{2} \quad \Rightarrow \quad y'(x) = -\frac{\sin(x)}{2} \quad \Rightarrow \quad y''(x) = -\frac{\cos(x)}{2}.$$

$$y''(x) - 2\,y'(x) + 5\,y(x) = r(x) \;\Rightarrow\; -\frac{\cos(x)}{2} + \sin(x) + 5\,\frac{\cos(x)}{2} = r(x) \;\Leftrightarrow\; r(x) = \sin(x) + 2\,\cos(x).$$

L'équation différentielle linéaire inhomogène du deuxième ordre à coefficients constants est donc :

$$y''(x) - 2\,y'(x) + 5\,y(x) = \sin(x) + 2\,\cos(x).$$

Barème : 4 points

* 1 point pour identifier la solution homogène et la solution particulière
* 1 point pour déterminer les zéros du polynôme caractéristique : $\lambda = 1 \pm 2i$
* 1 point pour donner l'équation homogène
* 1 point pour donner l'équation inhomogène
* 1 point pour calculer $y'(x)$ et $y''(x)$ et essayer de remplacer dans $y''(x) + p\,y'(x) + q\,y(x) = r(x)$

Remarque : si le total des points est $n,5$ pts, $n = 0, 1, \cdots, 9$, alors arrondir le total à $n + 1$.

EPFL

3

Enseignants : Friedli, Maatouk, Woringer
Math 1B - MAN
26 juin 2019
Durée : 180 minutes

Student Three

SCIPER : **333333**

Signature :

Indications

- Durée de l'examen : **180 minutes**.
- Posez votre **carte d'étudiant** sur la table.
- Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page.
- Ce document est imprimé recto-verso, il contient 28 pages.
- Ne pas séparer les feuilles.
- Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.
- La réponse à chaque question doit être **justifiée** et rédigée **à l'encre** sur la place réservée à cet effet à la suite de la question.
- Si la place prévue pour une question ne suffit pas, vous pouvez demander des feuilles supplémentaires aux surveillants. Chaque feuille ne peut être utilisée que pour **cette seule question**. Il convient de **coller l'un des codes-barre fourni en haut de la feuille supplémentaire et l'autre, identique, en bas de la dernière page de la question**.
- Les feuilles de brouillon sont à rendre mais **ne seront pas** corrigées ; des feuilles de brouillon supplémentaires peuvent être demandées en cas de besoin auprès des surveillants.
- Aucune documentation, ni machine à calculer ne sont autorisées.
- Veuillez **signer** votre examen.

Trigonométrie circulaire

Formules d'addition :

$$\sin(x+y) = \sin x\,\cos y + \cos x\,\sin y \qquad \cos(x+y) = \cos x\,\cos y - \sin x\,\sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\,\tan y}$$

Formules de bissection :

$$\sin^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{2} \qquad \cos^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1+\cos x}{2} \qquad \tan^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

Expressions de $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$ en fonction de $\tan(\frac{x}{2})$:

$$\sin x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \cos x = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \tan x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1-\tan^2(\frac{x}{2})}$$

Formules de transformation somme-produit :

$$\cos x + \cos y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \cos x - \cos y = -2\sin(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \sin x - \sin y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

Trigonométrie hyperbolique

Définitions :

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Formules d'addition :

$$\sinh(x+y) = \sinh x\,\cosh y + \cosh x\,\sinh y \qquad \cosh(x+y) = \cosh x\,\cosh y + \sinh x\,\sinh y$$

$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x\,\tanh y}$$

Formules de bissection :

$$\sinh^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x - 1}{2} \qquad \cosh^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x + 1}{2} \qquad \tanh(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x - 1}{\sinh x} = \frac{\sinh x}{\cosh x + 1}$$

Dérivée de quelques fonctions

$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\arg\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\arg\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\arg\tanh x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\arg\coth x$	$\frac{1}{1-x^2}$

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide de auto-multiple-choice.

Question 1 : *Cette question est notée sur 9 points.*

$\square_0$ $\square_1$ $\square_2$ $\square_3$ $\square_4$ $\square_5$ $\square_6$ $\square_7$ $\square_8$ $\square_9$ *Réservé au correcteur*

a) Donner la définition de $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L\,,\quad L \in \mathbb{R}\,.$

b) Montrer à l'aide de la définition que $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\ln(x)} = 0\,.$

c) Calculer la limite suivante : $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{\ln^2(x)+1} \cdot \sin\left(\frac{1}{\ln(x)}\right).$

Corrigé

a) Par définition, $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0\,,\quad \exists \delta > 0 \quad \text{tel que} \quad x_0 < x < x_0 + \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon\,.$$

Barème : 2 points pour la définition correcte

b) Soit $\varepsilon > 0$ donné. Montrons qu'il existe $\delta > 0$ tel que $0 < x < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{\ln(x)} - 0\right| < \varepsilon\,.$

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{\ln(x)} - 0\right| < \varepsilon \quad &\Leftrightarrow \quad \left|\frac{1}{\ln(x)}\right| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{\ln(x)} < \varepsilon\,, \quad (\delta \leq 1\,,\ \ln(x) < 0) \\ &\Leftrightarrow \quad \ln(x) < -\frac{1}{\varepsilon} \\ &\Leftrightarrow \quad 0 < x < e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\,, \quad \text{car exp est strictement croissante.} \end{aligned}$$

Donc tout $\delta \leq e^{-\frac{1}{\varepsilon}}$, $(\delta \leq 1)$, convient.

Barème : 4 points
- $*$ 1 point pour la contrainte définie par ε
- $*$ 1 point pour $\ln(x) < 0$
- $*$ 1,5 points pour $0 < x < e^{-\frac{1}{\varepsilon}}$
- $*$ 0,5 point pour donner δ

c) $$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{\ln^2(x)+1} \cdot \sin\left(\tfrac{1}{\ln(x)}\right) = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{\ln^2(x)+1} \cdot \frac{1}{\ln(x)}\,, \quad \text{car} \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\ln(x)} = 0\,,$$

$$= \lim_{x \to 0^+} |\ln(x)| \cdot \sqrt{1 + \tfrac{1}{\ln^2(x)}} \cdot \frac{1}{\ln(x)} = \lim_{x \to 0^+} -\ln(x) \cdot \sqrt{1 + \tfrac{1}{\ln^2(x)}} \cdot \frac{1}{\ln(x)}\,,$$

car sur un voisinage à droite de $x = 0$, $\ln(x)$ est négatif.

D'autre part, la fonction $\sqrt{x}$ est continue en $x = 1$, donc on a

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{\ln^2(x)+1} \cdot \sin\left(\tfrac{1}{\ln(x)}\right) = \lim_{x \to 0^+} -\sqrt{1 + \tfrac{1}{\ln^2(x)}} = -1\,.$$

Barème : 3 points
- $*$ 0,5 point pour constater que cette limite est une FI de type "$\infty \cdot 0$"
- $*$ 1 point pour gérer le sinus : $\sin(y) \sim y\ (y \to 0)$ ou $\lim_{y \to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1$
- $*$ 1 point pour sortir $\ln(x)$ de la racine
- $*$ 0,5 point pour conclure

Remarque : si le total des points est $n,5$ pts, $n = 0, 1, \cdots, 8$, alors arrondir le total à $n+1$.

Question 2 : *Cette question est notée sur 9 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 *Réservé au correcteur*

On empile des boîtes B_1, B_2, B_3, ... Chaque boîte B_n est un parallélépipède rectangle dont la base est un carré d'aire A_n et dont la hauteur est h_n, $n \in \mathbb{N}^*$.
On suppose que $A_1 = 4$, $h_1 = 1$ et que pour tout $n \geq 1$, on a $A_{n+1} = \dfrac{A_n}{2}$ et $h_{n+1} = \beta\, h_n$ $(\beta > 0)$.

a) Calculer la valeur de β pour laquelle le volume total de la pile est égal à $V = 6$.

b) Pour la valeur de β trouvée en a), calculer la hauteur totale H de la pile.

c) Pour quelles valeurs de β la pile a-t-elle un volume total fini et une hauteur totale infinie ?

Corrigé

a) Soit v_n le volume de la $n-$ième boîte : $v_1 = A_1 \cdot h_1$, $v_2 = A_2 \cdot h_2 = \dfrac{A_1}{2} \cdot \beta\, h_1 = v_1 \cdot \dfrac{\beta}{2}$,

$$v_3 = v_2 \cdot \frac{\beta}{2} = v_1 \cdot \left[\frac{\beta}{2}\right]^2, \; \cdots \;, \; v_n = v_1 \cdot \left[\frac{\beta}{2}\right]^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Soit V_n le volume de l'empilement des n premières boîtes : $V_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} v_1 \cdot \left[\tfrac{\beta}{2}\right]^{k-1}$.

L'expression de V_n est le terme général d'une série géométrique de premier terme $v_1 = 4$ et de raison $r = \frac{\beta}{2}$:

$$V_n = B_1 \cdot \sum_{k=1}^{n} \left[\tfrac{\beta}{2}\right]^{k-1} = v_1 \cdot \frac{1 - \left[\frac{\beta}{2}\right]^n}{1 - \frac{\beta}{2}} = 4\, \frac{1 - \left[\frac{\beta}{2}\right]^n}{1 - \frac{\beta}{2}}.$$

On exige que cette série géométrique converge :

c'est le cas si et seulement si $|r| = \frac{\beta}{2} < 1$, $(\beta \in]\,0\,,\,2\,[\,)$ et dans ce cas, on a

$$V = \lim_{n \to \infty} V_n = B_1 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left[\tfrac{\beta}{2}\right]^{k-1} = B_1 \cdot \left[1 + \tfrac{\beta}{2} + \left[\tfrac{\beta}{2}\right]^2 + \left[\tfrac{\beta}{2}\right]^3 + \cdots\right] = \frac{B_1}{1 - \frac{\beta}{2}} = \frac{4}{1 - \frac{\beta}{2}}$$

et qu'elle converge vers $V = 6$: $\dfrac{4}{1 - \frac{\beta}{2}} = 6 \;\Leftrightarrow\; \beta = \dfrac{2}{3}$, $\left(\frac{2}{3} \in]\,0\,,\,2\,[\,\right)$.

Barème : 5 points
* 0,5 point pour v_1, 0,5 point pour v_2, 1,5 points pour v_n
* 2 points pour l'expression de V
* 0,5 point pour β

b) Soit H_n la hauteur de la pile constituée des n premières boîtes : $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} h_k = \sum_{k=1}^{n} h_1 \cdot \beta^{k-1}$.

L'expression de H_n est le terme général d'une série géométrique de premier terme $h_1 = 1$ et de raison β :

$$H_n = h_1 \cdot \sum_{k=1}^{n} \beta^{k-1} = h_1 \cdot \frac{1 - \beta^n}{1 - \beta} = \frac{1 - \beta^n}{1 - \beta}.$$

Cette série géométrique converge car $|\beta| = \dfrac{2}{3} < 1$ et elle converge vers $H = \dfrac{1}{1 - \beta} = 3$.

Barème : 2 points
* 0,5 point pour le critère de convergence
* 1,5 points pour la valeur de H

c) La série géométrique décrivant le volume de la pile converge si et seulement si $\beta \in]\,0\,,\,2\,[$.

Celle qui représente la hauteur de la tour est de raison β, elle diverge si et seulement si $|\beta| \geq 1$.

Le volume total de la pile est fini et sa hauteur est infinie si et seulement si $\beta \in [\,1\,,\,2\,[$.

Barème : 2 points

* 1 point pour la convergence du volume
* 1 point pour la divergence de la hauteur

Remarque : si le total des points est $n{,}5$ pts, $n = 0, 1, \cdots, 8$, alors arrondir le total à $n + 1$.

Question 3 : *Cette question est notée sur 8 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 *Réservé au correcteur*

Soit f définie sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{2x-1}}{x-1}$, si $x \neq 1$ et $f(1) = -1$.

a) Montrer que f est dérivable en $x_0 = 1$ en utilisant la définition de la dérivabilité.

b) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \geq 1 \\ ax^2+b & \text{si } x < 1 \,. \end{cases}$

Déterminer les paramètres $a, b \in \mathbb{R}$ de sorte que g soit dérivable en $x_0 = 1$.
Justifier rigoureusement votre réponse.

Corrigé

a) La fonction f est dérivable en $x = 1$ si et seulement si $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ existe.

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1-\sqrt{2(1+h)-1}}{(1+h)-1} - (-1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h+1-\sqrt{2h+1}}{h^2} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(h+1)^2-(2h+1)}{h^2\,\left(h+1+\sqrt{2h+1}\right)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h^2}{h^2\,\left(h+1+\sqrt{2h+1}\right)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h+1+\sqrt{2h+1}} \\
&= \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

La fonction f est donc dérivable en $x = 1$ et $f'(1) = \dfrac{1}{2}$.

Barème : 4 points
* 1 point pour le critère de dérivabilité
* 1 point pour écrire le rapport de Newton
* 1 point pour l'amplification par le conjugué (ou BH)
* 1 point pour la conclusion

b) • La fonction g doit être continue en $x_0 = 1$.

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = a+b\,, \qquad g(1) = f(1) = -1 \qquad \textbf{et} \qquad \lim_{x\to 1^+} g(x) = f(1) = -1\,,$$

car f est continue en $x = 1$ car dérivable en ce point.
La fonction g est donc continue en $x_0 = 1$ si et seulement si $a+b = -1$.

• Etudions la dérivabilité de g en $x = 1$:

∗ f est dérivable en $x = 1$ et $f'(1) = \frac{1}{2}$, donc g est dérivable à droite en $x = 1$ et $g'(1^+) = \frac{1}{2}$.

* Sous l'hypothèse de continuité de g en $x = 1$, on a $g(x) = ax^2 + b$ si $x \leq 1$.
  g est donc dérivable à gauche en $x = 1$ et $g'(1^-) = 2ax\big|_{x=1} = 2a$.
* g est dérivable en $x = 1$ si et seulement si $\left\{ \begin{array}{l} a + b = -1 \\ 2a = \frac{1}{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{1}{4} \\ b = -\frac{5}{4} \end{array} \right.$.

Barème : 4 points
* 1,5 points pour la continuité
* 2 points pour la dérivabilité
* 0,5 point pour la conclusion

Remarque : si le total des points est $n, 5$ pts, $n = 0, 1, \cdots, 7$, alors arrondir le total à $n + 1$.

Question 4 : *Cette question est notée sur 10 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ☐10 *Réservé au correcteur*

Etudier les branches infinies de l'arc paramétré Γ défini par

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = \frac{1}{t} \\ y(t) = \ln\left[\cosh\left(\frac{1}{t}\right)\right], \end{cases} \qquad t \in D_{\text{def}}.$$

Corrigé

La trajectoire Γ est symétrique par rapport à l'axe Oy, car $x(t)$ est impair et $y(t)$ est pair.

On étudie les limites aux "points frontières" de $D_{\text{def}} = \mathbb{R}^*$.

- Lorsque $t \to \pm\infty$, $x(t) \to 0$ et $y(t) \to 0$, en effet

  $$\lim_{t\to\pm\infty} \ln\left[\cosh\left(\tfrac{1}{t}\right)\right] = \ln\left[\lim_{t\to\pm\infty} \cosh\left(\tfrac{1}{t}\right)\right] = \ln\left[\cosh\left(\lim_{t\to\pm\infty} \tfrac{1}{t}\right)\right] = \ln\left[\cosh(0)\right] = \ln(1) = 0,$$

  car les fonctions $\cosh$ et $\ln$ sont continues.

  Le point courant $M(t)$ tend vers $(0,0)$, l'arc Γ n'admet pas de branches infinies lorsque $t \to \pm\infty$.

  Barème : 1,5 points pour dire ce qui se passe lorsque $t \to \pm\infty$

- Lorsque $t \to 0^+$, $x(t) \to +\infty$ et $y(t) \to +\infty$, on recherche une éventuelle asymptote oblique :

  $$* \lim_{t\to 0^+} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln\left[\cosh\left(\frac{1}{t}\right)\right]}{\frac{1}{t}} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{\sinh\left(\frac{1}{t}\right)}{\cosh\left(\frac{1}{t}\right)} \cdot \left[-\frac{1}{t^2}\right]}{-\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to 0^+} \tanh\left(\tfrac{1}{t}\right) = 1.$$

  $$* \lim_{t\to 0^+} \left[y(t) - x(t)\right] = \lim_{t\to 0^+} \left[\ln\left[\cosh\left(\tfrac{1}{t}\right)\right] - \tfrac{1}{t}\right] = \lim_{t\to 0^+} \left[\ln\left[\frac{e^{\frac{1}{t}} + e^{-\frac{1}{t}}}{2}\right] - \frac{1}{t}\right]$$

  $$= \lim_{t\to 0^+} \left[\ln\left[e^{\frac{1}{t}} \cdot \frac{1+e^{-\frac{2}{t}}}{2}\right] - \frac{1}{t}\right] = \lim_{t\to 0^+} \left[\frac{1}{t} + \ln\left[\frac{1+e^{-\frac{2}{t}}}{2}\right] - \frac{1}{t}\right] = \lim_{t\to 0^+} \left[\ln\left[\frac{1+e^{-\frac{2}{t}}}{2}\right]\right],$$

  or $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} e^{-\frac{2}{t}} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \left[y(t) - x(t)\right] = \ln\left(\tfrac{1}{2}\right) = -\ln 2$.

  Donc Γ admet, lorsque $t \to 0^+$, une asymptote oblique d'équation $y = x - \ln 2$.

  Barème : 6 points
  * 1 point pour la limite de $x(t)$ et de $y(t)$
  * 2 points pour la limite de $\frac{y(t)}{x(t)}$
  * 3 points pour la limite de $y(t) - x(t)$

- Par symétrie, Γ admet, lorsque $t \to 0^-$, une asymptote oblique d'équation $y = -x - \ln 2$.

  Barème : 2,5 points pour refaire la même chose ou pour utiliser la symétrie de la trajectoire Γ

Remarque : si le total des points est $n,5$ pts, $n = 0, 1, \cdots, 9$, alors arrondir le total à $n+1$.

Question 5 : *Cette question est notée sur 7 points.*

□ 0	□ 1	□ 2	□ 3	□ 4	□ 5	□ 6	□ 7	*Réservé au correcteur*

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{x}+1} e^{-t^2+5t}\, dt\,, \qquad x > 0\,.$$

Déterminer x de sorte que $f(x)$ soit maximale. Justifier rigoureusement votre réponse.

Corrigé

On étudie le signe de la dérivée de $f(x)$.

Soit $G(t)$ une primitive de $g(t) = e^{-t^2+5t}$,

$$f(x) = G(\sqrt{x}+1) - G(\sqrt{x})$$

On en déduit l'expression de $f'(x)$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left[G(\sqrt{x}+1) - G(\sqrt{x})\right]' \\
&= G'(\sqrt{x}+1)\cdot(\sqrt{x}+1)' - G'(\sqrt{x})\cdot(\sqrt{x})' \\
&= g(\sqrt{x}+1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} - g(\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}\left[e^{-(\sqrt{x}+1)^2+5(\sqrt{x}+1)} - e^{-x+5\sqrt{x}}\right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}\left[e^{-x-2\sqrt{x}-1+5\sqrt{x}+5} - e^{-x+5\sqrt{x}}\right] \\
&= \frac{e^{-x+5\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\left[e^{-2\sqrt{x}+4} - 1\right].
\end{aligned}$$

Le signe de $f'(x)$ est égal au signe de $\left[e^{-2\sqrt{x}+4} - 1\right]$ car $\dfrac{e^{-x+5\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} > 0\,,\ \ \forall x > 0\,.$

$$e^{-2\sqrt{x}+4} - 1 \geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad e^{-2\sqrt{x}+4} \geq 1 \quad\Leftrightarrow\quad e^{-2\sqrt{x}+4} \geq e^0 \quad\Leftrightarrow\quad -2\sqrt{x}+4 \geq 0$$

car la fonction exponentielle est croissante,

$$f'(x) \geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad -2\sqrt{x}+4 \geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad x \leq 4\,.$$

Signe de $f'(x)$:

x	0		4	
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$

La fonction f atteint donc son maximum en $x = 4$.

Barème : 7 points

- $\ast$ 1,5 points pour écrire $f(x)$ à l'aide d'une primitive de e^{-t^2+5t}
- $\ast$ 1,5 points pour la dérivée de la fonction composée
- $\ast$ 1,5 points pour factoriser $f'(x)$
- $\ast$ 1,5 points pour étudier le signe de $f'(x)$
- $\ast$ 1 point pour le critère du maximum et la conclusion

Remarque : si le total des points est $n,5$ pts, $n = 0, 1, \cdots, 6$, alors arrondir le total à $n+1$.

Question 6 : *Cette question est notée sur 8 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 *Réservé au correcteur*

Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{4e^x - 5}{e^{2x} - 2\,e^x + 5}\,.$$

Corrigé

- Changement de variable : $u = e^x\,,\qquad du = e^x\,dx\,,\qquad dx = \frac{1}{u}\,du\,.$

$$\int \frac{4e^x - 5}{e^{2x} - 2\,e^x + 5}\,dx = \int \frac{4u-5}{u^2 - 2\,u + 5}\cdot\frac{1}{u}\,du = \int \frac{4u-5}{u\,(u^2-2\,u+5)}\,du\,.$$

- Décomposition en éléments simples

$$\frac{4u-5}{u\,\underbrace{(u^2-2\,u+5)}_{\Delta<0}} = \frac{A}{u} + \frac{B\,u + C}{u^2 - 2\,u + 5}\,,\qquad A, B, C \in \mathbb{R}\,.$$

Recherche des coefficients A, B et C

  - par évaluation :
    - multiplication par x, puis évaluation en $x = 0$: $A = -1$,
    - multiplication par x, puis $x \to \infty$: $A + B = 0$, $B = 1$,
    - évaluation en $x = +1$: $A + \frac{B+C}{4} = -\frac{1}{4}$, $C = 2$.
  - ou par identification :

$$\frac{4u-5}{u\,(u^2-2\,u+5)} = \frac{A}{u} + \frac{B\,u+C}{u^2-2\,u+5} = \frac{A\,(u^2-2\,u+5) + u\,(B\,u+C)}{u\,(u^2-2\,u+5)}\,,$$

$$\frac{4u-5}{u\,(u^2-2\,u+5)} = \frac{(A+B)\,u^2 + (C-2A)\,u + 5A}{u\,(u^2-2\,u+5)} \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} A+B=0 \\ C-2A=4 \\ 5A=-5 \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} A=-1 \\ B=1 \\ C=2 \end{array}\right.$$

$$\frac{4u-5}{u\,(u^2-2\,u+5)} = -\frac{1}{u} + \frac{u+2}{u^2-2\,u+5}\,.$$

- Intégration de l'élément simple de deuxième espèce

$$\frac{u+2}{u^2-2\,u+5} = \frac{1}{2}\,\frac{2u-2}{u^2-2\,u+5} + \frac{3}{u^2-2\,u+5}\,,$$

avec $$\frac{3}{u^2-2\,u+5} = \frac{3}{(u-1)^2+4} = \frac{3}{4}\,\frac{1}{\left(\frac{u-1}{2}\right)^2+1} = \frac{3}{2}\,\frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{u-1}{2}\right)^2+1}\,.$$

$$\int \frac{(u+2)\,du}{u^2-2\,u+5} = \frac{1}{2}\int\frac{(2u-2)\,du}{u^2-2\,u+5} + \frac{3}{2}\int\frac{\frac{1}{2}\,du}{\left(\frac{u-1}{2}\right)^2+1} = \frac{1}{2}\,\ln(u^2-2\,u+5) + \frac{3}{2}\,\arctan\left(\frac{u-1}{2}\right) + C\,.$$

- Conclusion

$$\int f(x)\,dx = -\ln|u| + \frac{1}{2}\ln(u^2 - 2\,u + 5) + \frac{3}{2}\arctan\left(\tfrac{u-1}{2}\right) + C\,,$$

$$\int f(x)\,dx = -x + \frac{1}{2}\ln(e^{2x} - 2\,e^x + 5) + \frac{3}{2}\arctan\left(\tfrac{e^x-1}{2}\right) + C\,.$$

Barème : 8 points

- ∗ 2 points pour le changement de variable
- ∗ 2 points pour la décomposition en éléments simples
- ∗ 3 points pour l'intégration de l'élément simple de deuxième espèce
  - ◦ 1 point pour la partie logarithme
  - ◦ 2 points pour la partie arctangente
- ∗ 1 point pour le retour en x et pour la constante d'intégration C

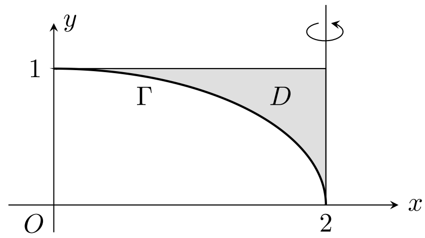
Remarque : si le total des points est $n,5$ pts, $n = 0, 1, \cdots, 7$, alors arrondir le total à $n + 1$.

Question 7 : *Cette question est notée sur 7 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 *Réservé au correcteur*

On considère le domaine D décrit ci-joint, limité par l'arc d'ellipse Γ d'équation $x^2+4y^2=4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, et les droites d'équations $x=2$ et $y=1$.

Calculer le volume du corps de révolution engendré par la rotation de ce domaine D autour de l'axe d'équation $x=2$.

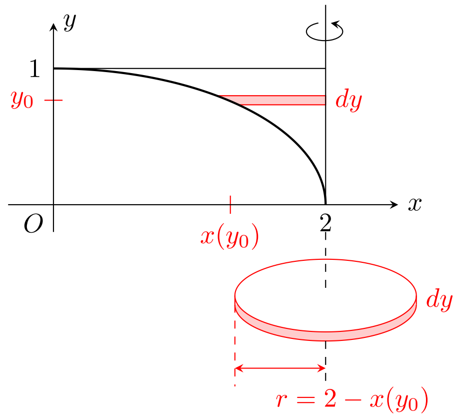


Corrigé

La section de ce corps de révolution par le plan d'équation $y=y_0$, perpendiculaire à l'axe de rotation, est un disque de rayon $r=2-x(y_0)$. L'aire de ce disque vaut

$$A(y_0)=\pi\, r^2=\pi\,[2-x(y_0)]^2,$$

avec $\quad x(y_0)=\sqrt{4-4y_0^2}=2\sqrt{1-y_0^2}$.



$$A(y_0)=4\pi\left[1-\sqrt{1-y_0^2}\right]^2=4\pi\left[1-2\sqrt{1-y_0^2}+1-y_0^2\right],$$

$$A(y_0)=4\pi\left[2-y_0^2-2\sqrt{1-y_0^2}\right].$$

On en déduit le volume V du corps de révolution : $V=\int_0^1 A(y)\,dy=4\pi\int_0^1\left[2-y^2-2\sqrt{1-y^2}\right]dy$.

Calcul de $\int_0^1\sqrt{1-y^2}\,dy$ par changement de variable. On pose $y=\sin(t)$ et on obtient :

$$\int_0^1\sqrt{1-y^2}\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t)\,[\cos(t)\,dt\,]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(t)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt=\frac{t}{2}+\frac{\sin(2t)}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

$$V=4\pi\int_0^1\left[2-y^2\,\right]dy-8\pi\int_0^1\sqrt{1-y^2}\,dy=4\pi\left[2y-\frac{y^3}{3}\right]_0^1-2\pi^2=\frac{20\,\pi}{3}-2\pi^2.$$

Barème : 7 points

- ∗ 3 points pour la modélisation
  - ∘ 1 point pour le rayon du disque
  - ∘ 1 point pour $A(y_0)$
  - ∘ 1 point pour l'expression de V
- ∗ 4 points pour l'intégration
  - ∘ 2 points pour l'intégration de la racine (ou argument géométrique)
  - ∘ 2 points pour la conclusion

Remarque : si le total des points est $n,5$ pts, $n=0,1,\cdots,6$, alors arrondir le total à $n+1$.

Question 8 : *Cette question est notée sur 7 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 *Réservé au correcteur*

On considère le domaine D du plan délimité par la droite d'équation $x = 1$ et par les graphes des deux fonctions suivantes :

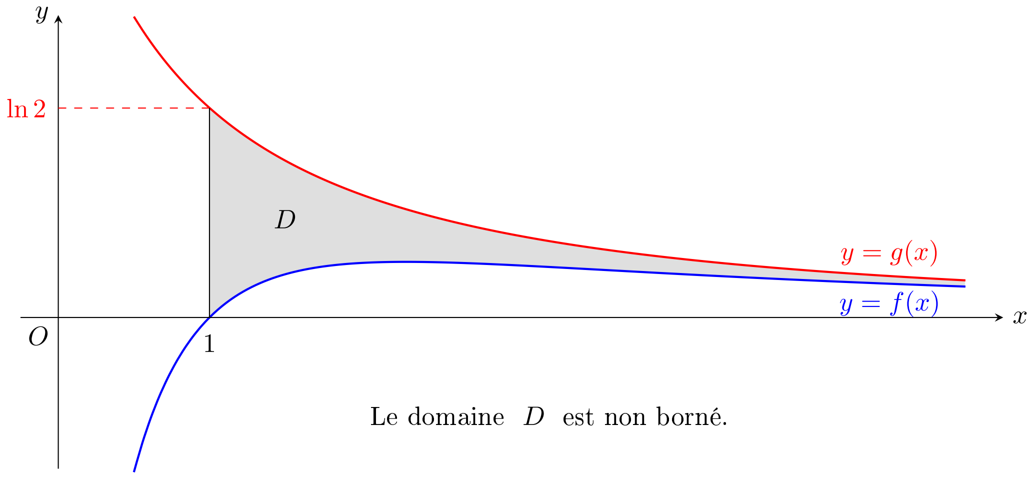
$$f(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \ln(x) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \ln(x+1)\,, \quad x \geq 1\,.$$

a) Esquisser le domaine D (on ne demande pas une étude complète des fonctions f et g).

b) Calculer l'aire A de ce domaine.

Corrigé

a) $\forall\, x \geq 1\,,\quad g(x) > f(x)\,, \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0 \qquad$ et $\qquad f(1) = 0\,,\quad g(1) = \ln 2\,.$



Le domaine D est non borné.

b) Calcul de l'aire de ce domaine

$$A = \int_1^{+\infty} [\,g(x) - f(x)\,]\,dx = \lim_{L\to+\infty} \int_1^L [\,g(x) - f(x)\,]\,dx\,.$$

Recherche d'une primitive de $f - g$:

$$\int [\,g(x) - f(x)\,]\,dx = \int \frac{1}{x^2}\,[\,\ln(x+1) - \ln(x)\,]\,dx = \int \frac{1}{x^2} \cdot \ln\left[\tfrac{x+1}{x}\right] dx = \int \frac{1}{x^2} \cdot \ln\left[1 + \tfrac{1}{x}\right] dx\,.$$

Et en posant $u = 1 + \dfrac{1}{x}\,,\ du = -\dfrac{1}{x^2}\,dx\,,$ on obtient

$$\int \frac{1}{x^2} \cdot \ln\left[1 + \tfrac{1}{x}\right] dx = -\int \ln(u)\,du\,,$$

que l'on intègre par parties :

$$\int \ln(u)\,du = \int \underset{\uparrow}{1} \cdot \underset{\downarrow}{\ln(u)}\,du = u \cdot \ln(u) - \int u \cdot \frac{1}{u}\,du = u \cdot \ln(u) - u + C\,.$$

$$\int [\,g(x) - f(x)\,]\,dx = -\left(1 + \tfrac{1}{x}\right) \cdot \left[\,\ln\left(1 + \tfrac{1}{x}\right) - 1\,\right] + C\,.$$

Evaluation puis passage à la limite :

$$\int_1^L [\, g(x) - f(x) \,] \, dx = -\left(1 + \tfrac{1}{L}\right) \cdot \left[\, \ln\left(1 + \tfrac{1}{L}\right) - 1 \,\right] + 2 \cdot [\, \ln(2) - 1 \,] \, .$$

$$\lim_{L \to +\infty} \int_1^L [\, g(x) - f(x) \,] \, dx = 2 \cdot [\, \ln(2) - 1 \,] - \lim_{L \to +\infty} \left(1 + \tfrac{1}{L}\right) \cdot \left[\, \ln\left(1 + \tfrac{1}{L}\right) - 1 \,\right] ,$$

$$A = 2 \, \ln(2) - 1 \, .$$

Barème : 7 points

- ∗ 2 points pour l'esquisse
- ∗ 1,5 points pour l'expression de A
- ∗ 2,5 points pour l'intégration
  - ◦ 0,5 point pour la différence des logarithmes
  - ◦ 1 point pour le changement de variable
  - ◦ 1 point pour l'intégration par parties
- ∗ 1 point pour l'évaluation et le passage à la limite

Remarque : si le total des points est $n,5$ pts , $n = 0, 1, \cdots, 6$, alors arrondir le total à $n + 1$.

Question 9 : *Cette question est notée sur 10 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ☐10 *Réservé au correcteur*

a) Résoudre l'équation différentielle avec condition initiale suivante :

$$y'(x) + \tan(x) \cdot y(x) = \sin(2x)\,, \qquad y(0) = 1\,. \qquad (\textit{6 points})$$

b) Déterminer une équation différentielle linéaire inhomogène du deuxième ordre à coefficients constants admettant comme solutions toutes les fonctions :

$$y(x) = \frac{\cos(x)}{2} + A\,e^x \cdot \cos(2x) + B\,e^x \cdot \sin(2x)\,, \quad A, B \in \mathbb{R}\,. \qquad (\textit{4 points})$$

Corrigé

a) • Résolution de l'équation différentielle sans condition initiale

◦ Une méthode

∗ Résolution de l'équation homogène : $y'(x) + \tan(x) \cdot y(x) = 0\,, \quad x \in D_{\tan}$

$$\ln|\,y(x)\,| = \int -\tan(x)\,dx = \int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\,dx\,, \qquad \ln|\,y(x)\,| = \ln|\cos(x)\,| + C\,,$$

$$y(x) = A \cdot \cos(x)\,, \quad A \in \mathbb{R}\,.$$

∗ Recherche d'une solution particulière de l'équation inhomogène : variation de la constante

$$y_P(x) = A(x) \cdot \cos(x)\,, \quad y_P'(x) = A'(x) \cdot \cos(x) - A(x) \cdot \sin(x)\,,$$

$$y_P'(x) + \tan(x) \cdot y_p(x) = \sin(2x) \;\Rightarrow\; A'(x) \cdot \cos(x) - A(x) \cdot \sin(x) + \tan(x) \cdot A(x) \cdot \cos(x) = \sin(2x)$$

$$\Leftrightarrow\; A'(x) \cdot \cos(x) = \sin(2x) \;\Leftrightarrow\; A'(x) = 2\,\sin(x)\,, \quad A(x) = -2\cos(x)\,.$$

$$y_P(x) = -2\,\cos^2(x)\,.$$

∗ La solution générale de l'équation différentielle inhomogène s'écrit comme somme de la solution particulière et de la solution homogène :

$$y(x) = -2\,\cos^2(x) + A \cdot \cos(x)\,, \quad x \in D_{\tan}\,, \quad A \in \mathbb{R}\,.$$

◦ Une autre méthode : résolution à l'aide du facteur intégrant

Le facteur intégrant s'écrit : $e^{\int \tan(x)\,dx} = e^{-\ln\cos(x)} = \dfrac{1}{\cos(x)}$.
L'équation différentielle devient :

$$\frac{1}{\cos(x)} \cdot y'(x) + \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} \cdot y(x) = \frac{1}{\cos(x)} \cdot \sin(2x) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\frac{1}{\cos(x)} \cdot y(x)\right]' = 2\,\sin(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\cos(x)} \cdot y(x) = -2\,\cos(x) + A \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = -2\,\cos^2(x) + A \cdot \cos(x)\,, \quad x \in D_{\tan}\,.$$

• Solution définie par la condition initiale

La condition initiale définit une unique solution :

$$y(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad -2\,\cos^2(0) + A \cdot \cos(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad A = 3\,.$$

La condition initiale définit non seulement la constante A mais aussi le domaine de définition de la solution :

$$y(x) = -2\,\cos^2(x) + 3 \cdot \cos(x)\,, \quad x \in \left]-\tfrac{\pi}{2}\,,\,\tfrac{\pi}{2}\right[\,.$$

Barème : 6 points

* Une méthode : 4 points
  - 1,5 points pour résoudre l'équation homogène
  - 2 points pour la solution particulière
  - 0,5 point pour l'expression de la solution générale
* Une autre méthode : résolution à l'aide du facteur intégrant : 4 points
  - 1,5 points pour calculer le facteur intégrant
  - 1,5 points pour utiliser le facteur intégrant
  - 1 point pour conclure
* 2 points pour la solution correspondant à la condition initiale
  - 1,5 points pour la constante $A = 3$
  - 0,5 point pour le domaine de définition de la solution

b) Les solutions de cette équation différentielle sont constituées

* d'une solution particulière de l'équation inhomogène : $y_p = \frac{\cos(x)}{2}$
* et de la solution générale de l'équation homogène : $y_H = A\,e^x \cdot \cos(2x) + B\,e^x \cdot \sin(2x)$.

La solution générale de l'équation homogène décrit une oscillation, donc le discriminant de l'équation caractéristique est négatif et les solutions de cette équation caractéristique sont deux nombres complexes conjugués.

Si $\lambda = u \pm i\,v$, alors $y_H = A\,e^{u\,x} \cdot \cos(v\,x) + B\,e^{u\,x} \cdot \sin(v\,x)$, on en déduit donc que $u = 1$ et $v = 2$ et que les zéros du polynôme caractéristique sont $\lambda = 1 \pm 2\,i$.

Le polynôme caractéristique s'écrit donc : $[\,\lambda - (1 - 2\,i)\,]\,[\,\lambda - (1 + 2\,i)\,] = \lambda^2 - 2\,\lambda + 5$.

On en déduit l'équation homogène associée : $y''(x) - 2\,y'(x) + 5\,y(x) = 0$.

L'équation différentielle inhomogène a pour forme $y''(x) - 2\,y'(x) + 5\,y(x) = r(x)$ et elle est vérifiée par $y(x) = \frac{\cos(x)}{2}$, on en déduit $r(x)$:

$$y(x) = \frac{\cos(x)}{2} \quad \Rightarrow \quad y'(x) = -\frac{\sin(x)}{2} \quad \Rightarrow \quad y''(x) = -\frac{\cos(x)}{2}\,.$$

$$y''(x) - 2\,y'(x) + 5\,y(x) = r(x) \;\Rightarrow\; -\frac{\cos(x)}{2} + \sin(x) + 5\,\frac{\cos(x)}{2} = r(x) \;\Leftrightarrow\; r(x) = \sin(x) + 2\,\cos(x)\,.$$

L'équation différentielle linéaire inhomogène du deuxième ordre à coefficients constants est donc :

$$y''(x) - 2\,y'(x) + 5\,y(x) = \sin(x) + 2\,\cos(x)\,.$$

Barème : 4 points

* 1 point pour identifier la solution homogène et la solution particulière
* 1 point pour déterminer les zéros du polynôme caractéristique : $\lambda = 1 \pm 2i$
* 1 point pour donner l'équation homogène
* 1 point pour donner l'équation inhomogène

* 1 point pour calculer $y'(x)$ et $y''(x)$ et essayer de remplacer dans $y''(x) + p\,y'(x) + q\,y(x) = r(x)$

Remarque : si le total des points est $n,5$ pts, $n = 0, 1, \cdots, 9$, alors arrondir le total à $n + 1$.

Enseignants : Friedli, Maatouk, Woringer
Math 1B - MAN
26 juin 2019
Durée : 180 minutes

4

Student Four

SCIPER : **444444** Signature :

Indications

- Durée de l'examen : **180 minutes**.
- Posez votre **carte d'étudiant** sur la table.
- Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page.
- Ce document est imprimé recto-verso, il contient 28 pages.
- Ne pas séparer les feuilles.
- Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.
- La réponse à chaque question doit être **justifiée** et rédigée **à l'encre** sur la place réservée à cet effet à la suite de la question.
- Si la place prévue pour une question ne suffit pas, vous pouvez demander des feuilles supplémentaires aux surveillants. Chaque feuille ne peut être utilisée que pour **cette seule question**. Il convient de **coller l'un des codes-barre fourni en haut de la feuille supplémentaire et l'autre, identique, en bas de la dernière page de la question**.
- Les feuilles de brouillon sont à rendre mais **ne seront pas** corrigées ; des feuilles de brouillon supplémentaires peuvent être demandées en cas de besoin auprès des surveillants.
- Aucune documentation, ni machine à calculer ne sont autorisées.
- Veuillez **signer** votre examen.

Trigonométrie circulaire

Formules d'addition :

$$\sin(x+y) = \sin x\,\cos y + \cos x\,\sin y \qquad \cos(x+y) = \cos x\,\cos y - \sin x\,\sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\,\tan y}$$

Formules de bissection :

$$\sin^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{2} \qquad \cos^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1+\cos x}{2} \qquad \tan^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

Expressions de $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$ en fonction de $\tan(\frac{x}{2})$:

$$\sin x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \cos x = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \tan x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1-\tan^2(\frac{x}{2})}$$

Formules de transformation somme-produit :

$$\cos x + \cos y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \cos x - \cos y = -2\sin(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \sin x - \sin y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

Trigonométrie hyperbolique

Définitions :

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Formules d'addition :

$$\sinh(x+y) = \sinh x\,\cosh y + \cosh x\,\sinh y \qquad \cosh(x+y) = \cosh x\,\cosh y + \sinh x\,\sinh y$$

$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x\,\tanh y}$$

Formules de bissection :

$$\sinh^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x - 1}{2} \qquad \cosh^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x + 1}{2} \qquad \tanh(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x - 1}{\sinh x} = \frac{\sinh x}{\cosh x + 1}$$

Dérivée de quelques fonctions

$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\arg\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\arg\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\arg\tanh x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\arg\coth x$	$\frac{1}{1-x^2}$

Question 1 : *Cette question est notée sur 9 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 *Réservé au correcteur*

a) Donner la définition de $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L\,, \quad L \in \mathbb{R}\,.$

b) Montrer à l'aide de la définition que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\ln(x)} = 0\,.$

c) Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{\ln^2(x)+1} \cdot \sin\left(\frac{1}{\ln(x)}\right).$

Corrigé

a) Par définition, $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$ si et seulement si

$$\forall\, \varepsilon > 0\,, \quad \exists\, \delta > 0 \quad \text{tel que} \quad x_0 < x < x_0 + \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon\,.$$

Barème : 2 points pour la définition correcte

b) Soit $\varepsilon > 0$ donné. Montrons qu'il existe $\delta > 0$ tel que $0 < x < \delta \;\Rightarrow\; \left|\frac{1}{\ln(x)} - 0\right| < \varepsilon\,.$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{\ln(x)} - 0\right| < \varepsilon \quad &\Leftrightarrow \quad \left|\frac{1}{\ln(x)}\right| < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{\ln(x)} < \varepsilon\,, \quad (\delta \leq 1\,,\ \ln(x) < 0) \\
&\Leftrightarrow \quad \ln(x) < -\frac{1}{\varepsilon} \\
&\Leftrightarrow \quad 0 < x < e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\,, \quad \text{car} \ \exp \ \text{est strictement croissante.}
\end{aligned}$$

Donc tout $\delta \leq e^{-\frac{1}{\varepsilon}}$, $(\delta \leq 1)$, convient.

Barème : 4 points
- ∗ 1 point pour la contrainte définie par ε
- ∗ 1 point pour $\ln(x) < 0$
- ∗ 1,5 points pour $0 < x < e^{-\frac{1}{\varepsilon}}$
- ∗ 0,5 point pour donner δ

c) $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{\ln^2(x)+1} \cdot \sin\left(\frac{1}{\ln(x)}\right) = \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{\ln^2(x)+1} \cdot \dfrac{1}{\ln(x)}\,, \quad$ car $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\ln(x)} = 0\,,$

$$= \lim_{x \to 0^+} |\ln(x)| \cdot \sqrt{1 + \tfrac{1}{\ln^2(x)}} \cdot \frac{1}{\ln(x)} = \lim_{x \to 0^+} -\ln(x) \cdot \sqrt{1 + \tfrac{1}{\ln^2(x)}} \cdot \frac{1}{\ln(x)}\,,$$

car sur un voisinage à droite de $x = 0$, $\ln(x)$ est négatif.

D'autre part, la fonction $\sqrt{x}$ est continue en $x = 1$, donc on a

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{\ln^2(x)+1} \cdot \sin\left(\tfrac{1}{\ln(x)}\right) = \lim_{x \to 0^+} -\sqrt{1 + \tfrac{1}{\ln^2(x)}} = -1\,.$$

Barème : 3 points
- ∗ 0,5 point pour constater que cette limite est une FI de type "$\infty \cdot 0$"
- ∗ 1 point pour gérer le sinus : $\sin(y) \sim y \ (y \to 0)$ ou $\lim_{y \to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1$
- ∗ 1 point pour sortir $\ln(x)$ de la racine
- ∗ 0,5 point pour conclure

Remarque : si le total des points est $n,5$ pts, $n = 0, 1, \cdots, 8$, alors arrondir le total à $n+1$.

Question 2 : *Cette question est notée sur 9 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 *Réservé au correcteur*

On empile des boîtes B_1, B_2, B_3, ... Chaque boîte B_n est un parallélépipède rectangle dont la base est un carré d'aire A_n et dont la hauteur est h_n, $n \in \mathbb{N}^*$.
On suppose que $A_1 = 4$, $h_1 = 1$ et que pour tout $n \geq 1$, on a $A_{n+1} = \dfrac{A_n}{2}$ et $h_{n+1} = \beta\, h_n$ $(\beta > 0)$.

a) Calculer la valeur de β pour laquelle le volume total de la pile est égal à $V = 6$.

b) Pour la valeur de β trouvée en a), calculer la hauteur totale H de la pile.

c) Pour quelles valeurs de β la pile a-t-elle un volume total fini et une hauteur totale infinie ?

Corrigé

a) Soit v_n le volume de la n−ième boîte : $v_1 = A_1 \cdot h_1$, $v_2 = A_2 \cdot h_2 = \dfrac{A_1}{2} \cdot \beta\, h_1 = v_1 \cdot \dfrac{\beta}{2}$,

$$v_3 = v_2 \cdot \frac{\beta}{2} = v_1 \cdot \left[\frac{\beta}{2}\right]^2, \;\cdots\;, \; v_n = v_1 \cdot \left[\frac{\beta}{2}\right]^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Soit V_n le volume de l'empilement des n premières boîtes : $V_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} v_1 \cdot \left[\tfrac{\beta}{2}\right]^{k-1}$.

L'expression de V_n est le terme général d'une série géométrique de premier terme $v_1 = 4$ et de raison $r = \frac{\beta}{2}$:

$$V_n = B_1 \cdot \sum_{k=1}^{n} \left[\tfrac{\beta}{2}\right]^{k-1} = v_1 \cdot \frac{1 - \left[\frac{\beta}{2}\right]^n}{1 - \frac{\beta}{2}} = 4\; \frac{1 - \left[\frac{\beta}{2}\right]^n}{1 - \frac{\beta}{2}}.$$

On exige que cette série géométrique converge :

c'est le cas si et seulement si $|r| = \frac{\beta}{2} < 1$, $(\beta \in]\,0\,,\,2\,[\,)$ et dans ce cas, on a

$$V = \lim_{n\to\infty} V_n = B_1 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left[\tfrac{\beta}{2}\right]^{k-1} = B_1 \cdot \left[1 + \tfrac{\beta}{2} + \left[\tfrac{\beta}{2}\right]^2 + \left[\tfrac{\beta}{2}\right]^3 + \cdots\right] = \frac{B_1}{1 - \frac{\beta}{2}} = \frac{4}{1 - \frac{\beta}{2}}$$

et qu'elle converge vers $V = 6$: $\dfrac{4}{1 - \frac{\beta}{2}} = 6 \;\Leftrightarrow\; \beta = \dfrac{2}{3}$, $\left(\tfrac{2}{3} \in]\,0\,,\,2\,[\,\right)$.

Barème : 5 points
* 0,5 point pour v_1, 0,5 point pour v_2, 1,5 points pour v_n
* 2 points pour l'expression de V
* 0,5 point pour β

b) Soit H_n la hauteur de la pile constituée des n premières boîtes : $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} h_k = \sum_{k=1}^{n} h_1 \cdot \beta^{k-1}$.

L'expression de H_n est le terme général d'une série géométrique de premier terme $h_1 = 1$ et de raison β :

$$H_n = h_1 \cdot \sum_{k=1}^{n} \beta^{k-1} = h_1 \cdot \frac{1 - \beta^n}{1 - \beta} = \frac{1 - \beta^n}{1 - \beta}.$$

Cette série géométrique converge car $|\beta| = \dfrac{2}{3} < 1$ et elle converge vers $H = \dfrac{1}{1 - \beta} = 3$.

Barème : 2 points
* 0,5 point pour le critère de convergence
* 1,5 points pour la valeur de H

c) La série géométrique décrivant le volume de la pile converge si et seulement si $\beta \in]\,0\,,\,2\,[$.

Celle qui représente la hauteur de la tour est de raison β, elle diverge si et seulement si $|\beta| \geq 1$.

Le volume total de la pile est fini et sa hauteur est infinie si et seulement si $\beta \in [\,1\,,\,2\,[$.

Barème : 2 points

$*$ 1 point pour la convergence du volume

$*$ 1 point pour la divergence de la hauteur

Remarque : si le total des points est $n,5$ pts, $n = 0, 1, \cdots, 8$, alors arrondir le total à $n+1$.

Question 3 : *Cette question est notée sur 8 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 *Réservé au correcteur*

Soit f définie sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{2x-1}}{x-1}$, si $x \neq 1$ et $f(1) = -1$.

a) Montrer que f est dérivable en $x_0 = 1$ en utilisant la définition de la dérivabilité.

b) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \geq 1 \\ ax^2+b & \text{si} \quad x < 1 . \end{cases}$

Déterminer les paramètres $a, b \in \mathbb{R}$ de sorte que g soit dérivable en $x_0 = 1$.
Justifier rigoureusement votre réponse.

Corrigé

a) La fonction f est dérivable en $x = 1$ si et seulement si $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ existe.

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1-\sqrt{2(1+h)-1}}{(1+h)-1} - (-1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h+1-\sqrt{2h+1}}{h^2} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(h+1)^2-(2h+1)}{h^2\left(h+1+\sqrt{2h+1}\right)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h^2}{h^2\left(h+1+\sqrt{2h+1}\right)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h+1+\sqrt{2h+1}} \\
&= \frac{1}{2} .
\end{aligned}$$

La fonction f est donc dérivable en $x = 1$ et $f'(1) = \dfrac{1}{2}$.

Barème : 4 points
* 1 point pour le critère de dérivabilité
* 1 point pour écrire le rapport de Newton
* 1 point pour l'amplification par le conjugué (ou BH)
* 1 point pour la conclusion

b) • La fonction g doit être continue en $x_0 = 1$.

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = a + b , \qquad g(1) = f(1) = -1 \qquad \textbf{et} \qquad \lim_{x \to 1^+} g(x) = f(1) = -1 ,$$

car f est continue en $x = 1$ car dérivable en ce point.
La fonction g est donc continue en $x_0 = 1$ si et seulement si $a + b = -1$.

• Etudions la dérivabilité de g en $x = 1$:

∗ f est dérivable en $x = 1$ et $f'(1) = \frac{1}{2}$, donc g est dérivable à droite en $x = 1$ et $g'(1^+) = \frac{1}{2}$.

* Sous l'hypothèse de continuité de g en $x = 1$, on a $g(x) = ax^2 + b$ si $x \leq 1$.
  g est donc dérivable à gauche en $x = 1$ et $g'(1^-) = 2ax\big|_{x=1} = 2a$.
* g est dérivable en $x = 1$ si et seulement si $\left\{\begin{array}{l} a + b = -1 \\ 2a = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \frac{1}{4} \\ b = -\frac{5}{4} \end{array}\right.$.

Barème : 4 points
* 1,5 points pour la continuité
* 2 points pour la dérivabilité
* 0,5 point pour la conclusion

Remarque : si le total des points est $n, 5$ pts, $n = 0, 1, \cdots, 7$, alors arrondir le total à $n + 1$.

Question 4 : *Cette question est notée sur 10 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ☐10 *Réservé au correcteur*

Etudier les branches infinies de l'arc paramétré Γ défini par

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = \frac{1}{t} \\ y(t) = \ln\left[\cosh\left(\frac{1}{t}\right)\right], \end{cases} \qquad t \in D_{\text{def}}.$$

Corrigé

La trajectoire Γ est symétrique par rapport à l'axe Oy, car $x(t)$ est impair et $y(t)$ est pair.

On étudie les limites aux "points frontières" de $D_{\text{def}} = \mathbb{R}^*$.

- Lorsque $t \to \pm\infty$, $x(t) \to 0$ et $y(t) \to 0$, en effet

  $$\lim_{t\to\pm\infty} \ln\left[\cosh\left(\tfrac{1}{t}\right)\right] = \ln\left[\lim_{t\to\pm\infty} \cosh\left(\tfrac{1}{t}\right)\right] = \ln\left[\cosh\left(\lim_{t\to\pm\infty} \tfrac{1}{t}\right)\right] = \ln\left[\cosh(0)\right] = \ln(1) = 0,$$

  car les fonctions $\cosh$ et $\ln$ sont continues.

  Le point courant $M(t)$ tend vers $(0,0)$, l'arc Γ n'admet pas de branches infinies lorsque $t \to \pm\infty$.

  Barème : 1,5 points pour dire ce qui se passe lorsque $t \to \pm\infty$

- Lorsque $t \to 0^+$, $x(t) \to +\infty$ et $y(t) \to +\infty$, on recherche une éventuelle asymptote oblique :

  $$* \lim_{t\to 0^+} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln\left[\cosh\left(\frac{1}{t}\right)\right]}{\frac{1}{t}} \overset{\text{BH}}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{\sinh\left(\frac{1}{t}\right)}{\cosh\left(\frac{1}{t}\right)} \cdot \left[-\frac{1}{t^2}\right]}{-\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to 0^+} \tanh\left(\tfrac{1}{t}\right) = 1.$$

  $$* \lim_{t\to 0^+} \left[y(t) - x(t)\right] = \lim_{t\to 0^+} \left[\ln\left[\cosh\left(\tfrac{1}{t}\right)\right] - \tfrac{1}{t}\right] = \lim_{t\to 0^+} \left[\ln\left[\frac{e^{\frac{1}{t}} + e^{-\frac{1}{t}}}{2}\right] - \frac{1}{t}\right]$$

  $$= \lim_{t\to 0^+} \left[\ln\left[e^{\frac{1}{t}} \cdot \frac{1+e^{-\frac{2}{t}}}{2}\right] - \frac{1}{t}\right] = \lim_{t\to 0^+} \left[\frac{1}{t} + \ln\left[\frac{1+e^{-\frac{2}{t}}}{2}\right] - \frac{1}{t}\right] = \lim_{t\to 0^+} \left[\ln\left[\frac{1+e^{-\frac{2}{t}}}{2}\right]\right],$$

  or $\lim_{t\to 0^+} e^{-\frac{2}{t}} = 0$, donc $\lim_{t\to 0^+} \left[y(t) - x(t)\right] = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$.

  Donc Γ admet, lorsque $t \to 0^+$, une asymptote oblique d'équation $y = x - \ln 2$.

  Barème : 6 points
  * 1 point pour la limite de $x(t)$ et de $y(t)$
  * 2 points pour la limite de $\frac{y(t)}{x(t)}$
  * 3 points pour la limite de $y(t) - x(t)$

- Par symétrie, Γ admet, lorsque $t \to 0^-$, une asymptote oblique d'équation $y = -x - \ln 2$.

  Barème : 2,5 points pour refaire la même chose ou pour utiliser la symétrie de la trajectoire Γ

Remarque : si le total des points est $n,5$ pts, $n = 0, 1, \cdots, 9$, alors arrondir le total à $n + 1$.

Question 5 : *Cette question est notée sur 7 points.*

$\square_0$ $\square_1$ $\square_2$ $\square_3$ $\square_4$ $\square_5$ $\square_6$ $\square_7$	*Réservé au correcteur*

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{x}+1} e^{-t^2+5t}\, dt\,, \qquad x > 0\,.$$

Déterminer x de sorte que $f(x)$ soit maximale. Justifier rigoureusement votre réponse.

Corrigé

On étudie le signe de la dérivée de $f(x)$.

Soit $G(t)$ une primitive de $g(t) = e^{-t^2+5t}$,

$$f(x) = G(\sqrt{x}+1) - G(\sqrt{x})$$

On en déduit l'expression de $f'(x)$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left[G(\sqrt{x}+1) - G(\sqrt{x})\right]' \\
&= G'(\sqrt{x}+1)\cdot(\sqrt{x}+1)' - G'(\sqrt{x})\cdot(\sqrt{x})' \\
&= g(\sqrt{x}+1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} - g(\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}\left[e^{-(\sqrt{x}+1)^2+5(\sqrt{x}+1)} - e^{-x+5\sqrt{x}}\right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}\left[e^{-x-2\sqrt{x}-1+5\sqrt{x}+5} - e^{-x+5\sqrt{x}}\right] \\
&= \frac{e^{-x+5\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\left[e^{-2\sqrt{x}+4} - 1\right].
\end{aligned}$$

Le signe de $f'(x)$ est égal au signe de $\left[e^{-2\sqrt{x}+4} - 1\right]$ car $\dfrac{e^{-x+5\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} > 0\,,\ \ \forall x > 0\,.$

$$e^{-2\sqrt{x}+4} - 1 \geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad e^{-2\sqrt{x}+4} \geq 1 \quad\Leftrightarrow\quad e^{-2\sqrt{x}+4} \geq e^0 \quad\Leftrightarrow\quad -2\sqrt{x}+4 \geq 0$$

car la fonction exponentielle est croissante,

$$f'(x) \geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad -2\sqrt{x}+4 \geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad x \leq 4\,.$$

Signe de $f'(x)$:

x	0		4	
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$

La fonction f atteint donc son maximum en $x = 4$.

Barème : 7 points

- $*$ 1,5 points pour écrire $f(x)$ à l'aide d'une primitive de e^{-t^2+5t}
- $*$ 1,5 points pour la dérivée de la fonction composée
- $*$ 1,5 points pour factoriser $f'(x)$
- $*$ 1,5 points pour étudier le signe de $f'(x)$
- $*$ 1 point pour le critère du maximum et la conclusion

Remarque : si le total des points est $n,5$ pts, $n = 0, 1, \cdots, 6$, alors arrondir le total à $n+1$.

Question 6 : *Cette question est notée sur 8 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 *Réservé au correcteur*

Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{4e^x - 5}{e^{2x} - 2\,e^x + 5}\,.$$

Corrigé

- Changement de variable : $u = e^x\,,\qquad du = e^x\,dx\,,\qquad dx = \frac{1}{u}\,du\,.$

$$\int \frac{4e^x - 5}{e^{2x} - 2\,e^x + 5}\,dx = \int \frac{4u-5}{u^2 - 2\,u + 5}\cdot\frac{1}{u}\,du = \int \frac{4u-5}{u\,(u^2 - 2\,u + 5)}\,du\,.$$

- Décomposition en éléments simples

$$\frac{4u-5}{u\,\underbrace{(u^2 - 2\,u + 5)}_{\Delta<0}} = \frac{A}{u} + \frac{B\,u + C}{u^2 - 2\,u + 5}\,,\qquad A, B, C \in \mathbb{R}\,.$$

Recherche des coefficients A, B et C

- par évaluation :
  - multiplication par x, puis évaluation en $x = 0$: $A = -1$,
  - multiplication par x, puis $x \to \infty$: $A + B = 0$, $B = 1$,
  - évaluation en $x = +1$: $A + \frac{B+C}{4} = -\frac{1}{4}$, $C = 2$.
- ou par identification :

$$\frac{4u-5}{u\,(u^2 - 2\,u + 5)} = \frac{A}{u} + \frac{B\,u + C}{u^2 - 2\,u + 5} = \frac{A\,(u^2 - 2\,u + 5) + u\,(B\,u + C)}{u\,(u^2 - 2\,u + 5)}\,,$$

$$\frac{4u-5}{u\,(u^2 - 2\,u + 5)} = \frac{(A+B)\,u^2 + (C - 2A)\,u + 5A}{u\,(u^2 - 2\,u + 5)} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} A + B = 0 \\ C - 2A = 4 \\ 5A = -5 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \\ C = 2 \end{cases}$$

$$\frac{4u-5}{u\,(u^2 - 2\,u + 5)} = -\frac{1}{u} + \frac{u+2}{u^2 - 2\,u + 5}\,.$$

- Intégration de l'élément simple de deuxième espèce

$$\frac{u+2}{u^2 - 2\,u + 5} = \frac{1}{2}\,\frac{2u-2}{u^2 - 2\,u + 5} + \frac{3}{u^2 - 2\,u + 5}\,,$$

avec $$\frac{3}{u^2 - 2\,u + 5} = \frac{3}{(u-1)^2 + 4} = \frac{3}{4}\,\frac{1}{\left(\frac{u-1}{2}\right)^2 + 1} = \frac{3}{2}\,\frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{u-1}{2}\right)^2 + 1}\,.$$

$$\int \frac{(u+2)\,du}{u^2 - 2\,u + 5} = \frac{1}{2}\int \frac{(2u-2)\,du}{u^2 - 2\,u + 5} + \frac{3}{2}\int \frac{\frac{1}{2}\,du}{\left(\frac{u-1}{2}\right)^2 + 1} = \frac{1}{2}\,\ln(u^2 - 2\,u + 5) + \frac{3}{2}\,\arctan\left(\frac{u-1}{2}\right) + C\,.$$

- Conclusion

$$\int f(x)\,dx = -\ln|u| + \frac{1}{2}\ln(u^2 - 2\,u + 5) + \frac{3}{2}\arctan\left(\tfrac{u-1}{2}\right) + C\,,$$

$$\int f(x)\,dx = -x + \frac{1}{2}\ln(e^{2x} - 2\,e^x + 5) + \frac{3}{2}\arctan\left(\tfrac{e^x-1}{2}\right) + C\,.$$

Barème : 8 points

- ∗ 2 points pour le changement de variable
- ∗ 2 points pour la décomposition en éléments simples
- ∗ 3 points pour l'intégration de l'élément simple de deuxième espèce
  - ◦ 1 point pour la partie logarithme
  - ◦ 2 points pour la partie arctangente
- ∗ 1 point pour le retour en x et pour la constante d'intégration C

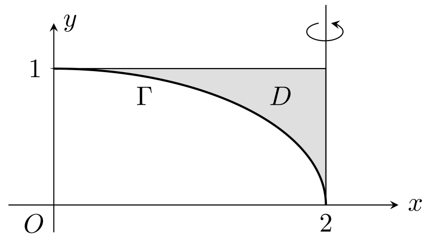
Remarque : si le total des points est $n,5$ pts, $n = 0, 1, \cdots, 7$, alors arrondir le total à $n + 1$.

Question 7 : *Cette question est notée sur 7 points.*

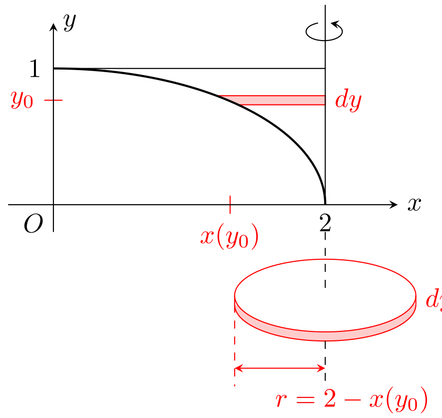
☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 *Réservé au correcteur*

On considère le domaine D décrit ci-joint, limité par l'arc d'ellipse Γ d'équation $x^2+4y^2=4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, et les droites d'équations $x=2$ et $y=1$.

Calculer le volume du corps de révolution engendré par la rotation de ce domaine D autour de l'axe d'équation $x=2$.



Corrigé



La section de ce corps de révolution par le plan d'équation $y=y_0$, perpendiculaire à l'axe de rotation, est un disque de rayon $r=2-x(y_0)$. L'aire de ce disque vaut

$$A(y_0)=\pi\, r^2=\pi\,[2-x(y_0)]^2\,,$$

avec $\quad x(y_0)=\sqrt{4-4y_0^2}=2\sqrt{1-y_0^2}\,.$

$$A(y_0)=4\pi\left[1-\sqrt{1-y_0^2}\right]^2=4\pi\left[1-2\sqrt{1-y_0^2}+1-y_0^2\right],$$

$$A(y_0)=4\pi\left[2-y_0^2-2\sqrt{1-y_0^2}\right].$$

On en déduit le volume V du corps de révolution : $V=\displaystyle\int_0^1 A(y)\,dy=4\pi\int_0^1\left[2-y^2-2\sqrt{1-y^2}\right]dy\,.$

Calcul de $\displaystyle\int_0^1\sqrt{1-y^2}\,dy$ par changement de variable. On pose $y=\sin(t)$ et on obtient :

$$\int_0^1\sqrt{1-y^2}\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t)\,[\cos(t)\,dt\,]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(t)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt=\frac{t}{2}+\frac{\sin(2t)}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}\,.$$

$$V=4\pi\int_0^1\left[2-y^2\,\right]dy-8\pi\int_0^1\sqrt{1-y^2}\,dy=4\pi\left[2y-\frac{y^3}{3}\right]_0^1-2\pi^2=\frac{20\,\pi}{3}-2\pi^2\,.$$

Barème : 7 points
- $*$ 3 points pour la modélisation
  - ∘ 1 point pour le rayon du disque
  - ∘ 1 point pour $A(y_0)$
  - ∘ 1 point pour l'expression de V
- $*$ 4 points pour l'intégration
  - ∘ 2 points pour l'intégration de la racine (ou argument géométrique)
  - ∘ 2 points pour la conclusion

Remarque : si le total des points est $n,5$ pts, $n=0,1,\cdots,6$, alors arrondir le total à $n+1$.

Question 8 : *Cette question est notée sur 7 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 *Réservé au correcteur*

On considère le domaine D du plan délimité par la droite d'équation $x = 1$ et par les graphes des deux fonctions suivantes :

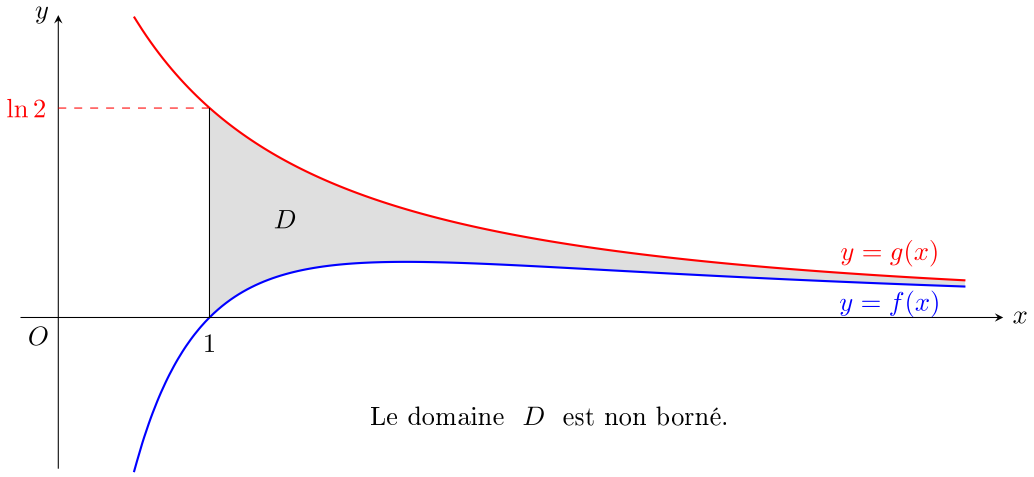
$$f(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \ln(x) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \ln(x+1)\,, \quad x \geq 1\,.$$

a) Esquisser le domaine D (on ne demande pas une étude complète des fonctions f et g).

b) Calculer l'aire A de ce domaine.

Corrigé

a) $\forall\, x \geq 1\,, \quad g(x) > f(x)\,, \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0 \qquad$ et $\qquad f(1) = 0\,, \quad g(1) = \ln 2\,.$



Le domaine D est non borné.

b) Calcul de l'aire de ce domaine

$$A = \int_1^{+\infty} [\, g(x) - f(x)\,]\, dx = \lim_{L\to+\infty} \int_1^L [\, g(x) - f(x)\,]\, dx\,.$$

Recherche d'une primitive de $f - g$:

$$\int [\, g(x) - f(x)\,]\, dx = \int \frac{1}{x^2}\, [\,\ln(x+1) - \ln(x)\,]\, dx = \int \frac{1}{x^2} \cdot \ln\left[\tfrac{x+1}{x}\right] dx = \int \frac{1}{x^2} \cdot \ln\left[1 + \tfrac{1}{x}\right] dx\,.$$

Et en posant $u = 1 + \dfrac{1}{x}\,,\ du = -\dfrac{1}{x^2}\, dx\,,$ on obtient

$$\int \frac{1}{x^2} \cdot \ln\left[1 + \tfrac{1}{x}\right] dx = -\int \ln(u)\, du\,,$$

que l'on intègre par parties :

$$\int \ln(u)\, du = \int \underset{\uparrow}{1} \cdot \underset{\downarrow}{\ln(u)}\, du = u \cdot \ln(u) - \int u \cdot \frac{1}{u}\, du = u \cdot \ln(u) - u + C\,.$$

$$\int [\, g(x) - f(x)\,]\, dx = -\left(1 + \tfrac{1}{x}\right) \cdot \left[\,\ln\left(1 + \tfrac{1}{x}\right) - 1\,\right] + C\,.$$

Evaluation puis passage à la limite :

$$\int_1^L [\,g(x) - f(x)\,]\,dx = -\left(1+\tfrac{1}{L}\right)\cdot\left[\ln\left(1+\tfrac{1}{L}\right) - 1\right] + 2\cdot[\,\ln(2) - 1\,]\,.$$

$$\lim_{L\to+\infty}\int_1^L [\,g(x) - f(x)\,]\,dx = 2\cdot[\,\ln(2) - 1\,] - \lim_{L\to+\infty}\left(1+\tfrac{1}{L}\right)\cdot\left[\ln\left(1+\tfrac{1}{L}\right) - 1\right],$$

$$A = 2\,\ln(2) - 1\,.$$

Barème : 7 points

- ∗ 2 points pour l'esquisse
- ∗ 1,5 points pour l'expression de A
- ∗ 2,5 points pour l'intégration
  - ◦ 0,5 point pour la différence des logarithmes
  - ◦ 1 point pour le changement de variable
  - ◦ 1 point pour l'intégration par parties
- ∗ 1 point pour l'évaluation et le passage à la limite

Remarque : si le total des points est $n,5$ pts, $n = 0, 1, \cdots, 6$, alors arrondir le total à $n+1$.

Question 9 : *Cette question est notée sur 10 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ☐10 *Réservé au correcteur*

a) Résoudre l'équation différentielle avec condition initiale suivante :

$$y'(x) + \tan(x) \cdot y(x) = \sin(2x)\,, \qquad y(0) = 1\,. \qquad (6 \textit{ points})$$

b) Déterminer une équation différentielle linéaire inhomogène du deuxième ordre à coefficients constants admettant comme solutions toutes les fonctions :

$$y(x) = \frac{\cos(x)}{2} + A\, e^x \cdot \cos(2x) + B\, e^x \cdot \sin(2x)\,, \quad A, B \in \mathbb{R}\,. \qquad (4 \textit{ points})$$

Corrigé

a) • Résolution de l'équation différentielle sans condition initiale

◦ Une méthode

∗ Résolution de l'équation homogène : $y'(x) + \tan(x) \cdot y(x) = 0\,, \quad x \in D_{\tan}$

$$\ln|\,y(x)\,| = \int -\tan(x)\, dx = \int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\, dx\,, \qquad \ln|\,y(x)\,| = \ln|\cos(x)\,| + C\,,$$

$$y(x) = A \cdot \cos(x)\,, \quad A \in \mathbb{R}\,.$$

∗ Recherche d'une solution particulière de l'équation inhomogène : variation de la constante

$$y_P(x) = A(x) \cdot \cos(x)\,, \quad y_P'(x) = A'(x) \cdot \cos(x) - A(x) \cdot \sin(x)\,,$$

$$y_P'(x) + \tan(x) \cdot y_p(x) = \sin(2x) \;\Rightarrow\; A'(x) \cdot \cos(x) - A(x) \cdot \sin(x) + \tan(x) \cdot A(x) \cdot \cos(x) = \sin(2x)$$

$$\Leftrightarrow\; A'(x) \cdot \cos(x) = \sin(2x) \;\Leftrightarrow\; A'(x) = 2\,\sin(x)\,, \quad A(x) = -2\cos(x)\,.$$

$$y_P(x) = -2\,\cos^2(x)\,.$$

∗ La solution générale de l'équation différentielle inhomogène s'écrit comme somme de la solution particulière et de la solution homogène :

$$y(x) = -2\,\cos^2(x) + A \cdot \cos(x)\,, \quad x \in D_{\tan}\,, \quad A \in \mathbb{R}\,.$$

◦ Une autre méthode : résolution à l'aide du facteur intégrant

Le facteur intégrant s'écrit : $e^{\int \tan(x)\, dx} = e^{-\ln\cos(x)} = \dfrac{1}{\cos(x)}\,.$
L'équation différentielle devient :

$$\frac{1}{\cos(x)} \cdot y'(x) + \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} \cdot y(x) = \frac{1}{\cos(x)} \cdot \sin(2x) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\frac{1}{\cos(x)} \cdot y(x)\right]' = 2\,\sin(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\cos(x)} \cdot y(x) = -2\,\cos(x) + A \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = -2\,\cos^2(x) + A \cdot \cos(x)\,, \quad x \in D_{\tan}\,.$$

• Solution définie par la condition initiale

La condition initiale définit une unique solution :

$$y(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad -2\,\cos^2(0) + A \cdot \cos(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad A = 3\,.$$

La condition initiale définit non seulement la constante A mais aussi le domaine de définition de la solution :

$$y(x) = -2\,\cos^2(x) + 3 \cdot \cos(x)\,, \quad x \in \left]-\tfrac{\pi}{2}\,, \tfrac{\pi}{2}\right[\,.$$

Barème : 6 points

* Une méthode : 4 points
  - 1,5 points pour résoudre l'équation homogène
  - 2 points pour la solution particulière
  - 0,5 point pour l'expression de la solution générale
* Une autre méthode : résolution à l'aide du facteur intégrant : 4 points
  - 1,5 points pour calculer le facteur intégrant
  - 1,5 points pour utiliser le facteur intégrant
  - 1 point pour conclure
* 2 points pour la solution correspondant à la condition initiale
  - 1,5 points pour la constante $A = 3$
  - 0,5 point pour le domaine de définition de la solution

b) Les solutions de cette équation différentielle sont constituées

* d'une solution particulière de l'équation inhomogène : $y_p = \frac{\cos(x)}{2}$
* et de la solution générale de l'équation homogène : $y_H = A\, e^x \cdot \cos(2x) + B\, e^x \cdot \sin(2x)$.

La solution générale de l'équation homogène décrit une oscillation, donc le discriminant de l'équation caractéristique est négatif et les solutions de cette équation caractéristique sont deux nombres complexes conjugués.

Si $\lambda = u \pm i\, v$, alors $y_H = A\, e^{u\, x} \cdot \cos(v\, x) + B\, e^{u\, x} \cdot \sin(v\, x)$, on en déduit donc que $u = 1$ et $v = 2$ et que les zéros du polynôme caractéristique sont $\lambda = 1 \pm 2\, i$.

Le polynôme caractéristique s'écrit donc : $[\,\lambda - (1 - 2\, i)\,]\,[\,\lambda - (1 + 2\, i)\,] = \lambda^2 - 2\,\lambda + 5$.

On en déduit l'équation homogène associée : $y''(x) - 2\, y'(x) + 5\, y(x) = 0$.

L'équation différentielle inhomogène a pour forme $y''(x) - 2\, y'(x) + 5\, y(x) = r(x)$ et elle est vérifiée par $y(x) = \frac{\cos(x)}{2}$, on en déduit $r(x)$:

$$y(x) = \frac{\cos(x)}{2} \quad \Rightarrow \quad y'(x) = -\frac{\sin(x)}{2} \quad \Rightarrow \quad y''(x) = -\frac{\cos(x)}{2}\,.$$

$$y''(x) - 2\, y'(x) + 5\, y(x) = r(x) \;\Rightarrow\; -\frac{\cos(x)}{2} + \sin(x) + 5\,\frac{\cos(x)}{2} = r(x) \;\Leftrightarrow\; r(x) = \sin(x) + 2\, \cos(x)\,.$$

L'équation différentielle linéaire inhomogène du deuxième ordre à coefficients constants est donc :

$$y''(x) - 2\, y'(x) + 5\, y(x) = \sin(x) + 2\, \cos(x)\,.$$

Barème : 4 points

* 1 point pour identifier la solution homogène et la solution particulière
* 1 point pour déterminer les zéros du polynôme caractéristique : $\lambda = 1 \pm 2i$
* 1 point pour donner l'équation homogène
* 1 point pour donner l'équation inhomogène
* 1 point pour calculer $y'(x)$ et $y''(x)$ et essayer de remplacer dans $y''(x) + p\, y'(x) + q\, y(x) = r(x)$

Remarque : si le total des points est $n, 5$ pts, $n = 0, 1, \cdots, 9$, alors arrondir le total à $n + 1$.