Enseignants : Friedli, Maatouk, Woringer
Math 1B - MAN
26 juin 2019
Durée : 180 minutes

1

Student One

SCIPER : **111111**

Signature :

Indications

- Durée de l'examen : **180 minutes**.
- Posez votre **carte d'étudiant** sur la table.
- Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page.
- Ce document est imprimé recto-verso, il contient 28 pages.
- Ne pas séparer les feuilles.
- Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.
- La réponse à chaque question doit être **justifiée** et rédigée **à l'encre** sur la place réservée à cet effet à la suite de la question.
- Si la place prévue pour une question ne suffit pas, vous pouvez demander des feuilles supplémentaires aux surveillants. Chaque feuille ne peut être utilisée que pour **cette seule question**. Il convient de **coller l'un des codes-barre fourni en haut de la feuille supplémentaire et l'autre, identique, en bas de la dernière page de la question**.
- Les feuilles de brouillon sont à rendre mais **ne seront pas** corrigées ; des feuilles de brouillon supplémentaires peuvent être demandées en cas de besoin auprès des surveillants.
- Aucune documentation, ni machine à calculer ne sont autorisées.
- Veuillez **signer** votre examen.

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide
de auto-multiple-choice.

Trigonométrie circulaire

Formules d'addition :

$$\sin(x+y) = \sin x\,\cos y + \cos x\,\sin y \qquad \cos(x+y) = \cos x\,\cos y - \sin x\,\sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\,\tan y}$$

Formules de bissection :

$$\sin^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{2} \qquad \cos^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1+\cos x}{2} \qquad \tan^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

Expressions de $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$ en fonction de $\tan(\frac{x}{2})$:

$$\sin x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \cos x = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \tan x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1-\tan^2(\frac{x}{2})}$$

Formules de transformation somme-produit :

$$\cos x + \cos y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \cos x - \cos y = -2\sin(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \sin x - \sin y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

Trigonométrie hyperbolique

Définitions :

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Formules d'addition :

$$\sinh(x+y) = \sinh x\,\cosh y + \cosh x\,\sinh y \qquad \cosh(x+y) = \cosh x\,\cosh y + \sinh x\,\sinh y$$

$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x\,\tanh y}$$

Formules de bissection :

$$\sinh^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x - 1}{2} \qquad \cosh^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x + 1}{2} \qquad \tanh(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x - 1}{\sinh x} = \frac{\sinh x}{\cosh x + 1}$$

Dérivée de quelques fonctions

$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\arg\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\arg\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\arg\tanh x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\arg\coth x$	$\frac{1}{1-x^2}$

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide de auto-multiple-choice.

Question 1 : *Cette question est notée sur 9 points.*

$\square_0$ $\square_1$ $\square_2$ $\square_3$ $\square_4$ $\square_5$ $\square_6$ $\square_7$ $\square_8$ $\square_9$ *Réservé au correcteur*

a) Donner la définition de $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L\,,\quad L \in \mathbb{R}\,.$

b) Montrer à l'aide de la définition que $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\ln(x)} = 0\,.$

c) Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{\ln^2(x)+1}\cdot \sin\left(\frac{1}{\ln(x)}\right).$

Pour chaque feuille supplémentaire, coller l'étiquette avec le code-barre par dessus un des cadres ci-après.

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide
de auto-multiple-choice.

Question 2 : *Cette question est notée sur 9 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 *Réservé au correcteur*

On empile des boîtes B_1, B_2, $B_3, \ldots$. Chaque boîte B_n est un parallélépipède rectangle dont la base est un carré d'aire A_n et dont la hauteur est h_n, $n \in \mathbb{N}^*$.
On suppose que $A_1 = 4$, $h_1 = 1$ et que pour tout $n \geq 1$, on a $A_{n+1} = \dfrac{A_n}{2}$ et $h_{n+1} = \beta\, h_n$ $(\beta > 0)$.

a) Calculer la valeur de β pour laquelle le volume total de la pile est égal à $V = 6$.

b) Pour la valeur de β trouvée en a), calculer la hauteur totale H de la pile.

c) Pour quelles valeurs de β la pile a-t-elle un volume total fini et une hauteur totale infinie ?

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide
de auto-multiple-choice.

Pour chaque feuille supplémentaire, coller l'étiquette avec le code-barre par dessus un des cadres ci-après.

Question 3 : *Cette question est notée sur 8 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 *Réservé au correcteur*

Soit f définie sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{2x-1}}{x-1}$, si $x \neq 1$ et $f(1) = -1$.

a) Montrer que f est dérivable en $x_0 = 1$ en utilisant la définition de la dérivabilité.

b) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \geq 1 \\ ax^2 + b & \text{si} \quad x < 1\,. \end{cases}$

Déterminer les paramètres $a, b \in \mathbb{R}$ de sorte que g soit dérivable en $x_0 = 1$.
Justifier rigoureusement votre réponse.

Pour chaque feuille supplémentaire, coller l'étiquette avec le code-barre par dessus un des cadres ci-après.

Question 4 : *Cette question est notée sur 10 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 *Réservé au correcteur*

Etudier les branches infinies de l'arc paramétré Γ défini par

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = \frac{1}{t} \\ y(t) = \ln\left[\cosh\left(\frac{1}{t}\right)\right], \end{cases} \qquad t \in D_{\text{def}}.$$

Pour chaque feuille supplémentaire, coller l'étiquette avec le code-barre par dessus un des cadres ci-après.

Question 5 : *Cette question est notée sur 7 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 *Réservé au correcteur*

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{x}+1} e^{-t^2+5t}\, dt\,, \qquad x > 0\,.$$

Déterminer x de sorte que $f(x)$ soit maximale. Justifier rigoureusement votre réponse.

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide
de auto-multiple-choice.

Pour chaque feuille supplémentaire, coller l'étiquette avec le code-barre par dessus un des cadres ci-après.

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide de auto-multiple-choice.

Question 6 : *Cette question est notée sur 8 points.*

☐ 0	☐ 1	☐ 2	☐ 3	☐ 4	☐ 5	☐ 6	☐ 7	☐ 8	*Réservé au correcteur*

Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{4e^x - 5}{e^{2x} - 2\,e^x + 5}\,.$$

Pour chaque feuille supplémentaire, coller l'étiquette avec le code-barre par dessus un des cadres ci-après.

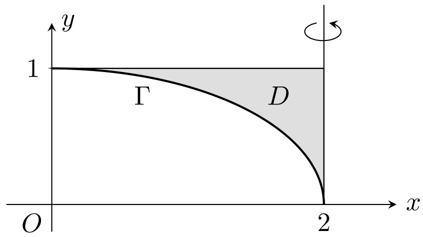
Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide de auto-multiple-choice.

Question 7 : *Cette question est notée sur 7 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 *Réservé au correcteur*

On considère le domaine D décrit ci-joint, limité par l'arc d'ellipse Γ d'équation $x^2+4y^2=4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, et les droites d'équations $x=2$ et $y=1$.

Calculer le volume du corps de révolution engendré par la rotation de ce domaine D autour de l'axe d'équation $x=2$.



Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide
de auto-multiple-choice.

Pour chaque feuille supplémentaire, coller l'étiquette avec le code-barre par dessus un des cadres ci-après.

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide
de auto-multiple-choice.

Question 8 : *Cette question est notée sur 7 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 *Réservé au correcteur*

On considère le domaine D du plan délimité par la droite d'équation $x = 1$ et par les graphes des deux fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \ln(x) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \ln(x+1)\,, \quad x \geq 1\,.$$

a) Esquisser le domaine D (on ne demande pas une étude complète des fonctions f et g).

b) Calculer l'aire A de ce domaine.

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide
de auto-multiple-choice.

Pour chaque feuille supplémentaire, coller l'étiquette avec le code-barre par dessus un des cadres ci-après.

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide de auto-multiple-choice.

Question 9 : *Cette question est notée sur 10 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ☐10 *Réservé au correcteur*

a) Résoudre l'équation différentielle avec condition initiale suivante :

$$y'(x) + \tan(x) \cdot y(x) = \sin(2x)\,, \qquad y(0) = 1\,. \qquad (\textit{6 points})$$

b) Déterminer une équation différentielle linéaire inhomogène du deuxième ordre à coefficients constants admettant comme solutions toutes les fonctions :

$$y(x) = \frac{\cos(x)}{2} + A\,e^{x} \cdot \cos(2x) + B\,e^{x} \cdot \sin(2x)\,, \quad A, B \in \mathbb{R}\,. \qquad (\textit{4 points})$$

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide
de auto-multiple-choice.

Pour chaque feuille supplémentaire, coller l'étiquette avec le code-barre par dessus un des cadres ci-après.

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide
de auto-multiple-choice.

Enseignants : Friedli, Maatouk, Woringer
Math 1B - MAN
26 juin 2019
Durée : 180 minutes

2

Student Two

SCIPER : **222222** Signature :

Indications

- Durée de l'examen : **180 minutes**.
- Posez votre **carte d'étudiant** sur la table.
- Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page.
- Ce document est imprimé recto-verso, il contient 28 pages.
- Ne pas séparer les feuilles.
- Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.
- La réponse à chaque question doit être **justifiée** et rédigée **à l'encre** sur la place réservée à cet effet à la suite de la question.
- Si la place prévue pour une question ne suffit pas, vous pouvez demander des feuilles supplémentaires aux surveillants. Chaque feuille ne peut être utilisée que pour **cette seule question**. Il convient de **coller l'un des codes-barre fourni en haut de la feuille supplémentaire et l'autre, identique, en bas de la dernière page de la question**.
- Les feuilles de brouillon sont à rendre mais **ne seront pas** corrigées ; des feuilles de brouillon supplémentaires peuvent être demandées en cas de besoin auprès des surveillants.
- Aucune documentation, ni machine à calculer ne sont autorisées.
- Veuillez **signer** votre examen.

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide
de auto-multiple-choice.

Trigonométrie circulaire

Formules d'addition :

$$\sin(x+y) = \sin x\,\cos y + \cos x\,\sin y \qquad \cos(x+y) = \cos x\,\cos y - \sin x\,\sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\,\tan y}$$

Formules de bissection :

$$\sin^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{2} \qquad \cos^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1+\cos x}{2} \qquad \tan^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

Expressions de $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$ en fonction de $\tan(\frac{x}{2})$:

$$\sin x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \cos x = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \tan x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1-\tan^2(\frac{x}{2})}$$

Formules de transformation somme-produit :

$$\cos x + \cos y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \cos x - \cos y = -2\sin(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \sin x - \sin y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

Trigonométrie hyperbolique

Définitions :

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Formules d'addition :

$$\sinh(x+y) = \sinh x\,\cosh y + \cosh x\,\sinh y \qquad \cosh(x+y) = \cosh x\,\cosh y + \sinh x\,\sinh y$$

$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x\,\tanh y}$$

Formules de bissection :

$$\sinh^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x - 1}{2} \qquad \cosh^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x + 1}{2} \qquad \tanh(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x - 1}{\sinh x} = \frac{\sinh x}{\cosh x + 1}$$

Dérivée de quelques fonctions

$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\arg\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\arg\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\arg\tanh x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\arg\coth x$	$\frac{1}{1-x^2}$

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide de auto-multiple-choice.

Question 1 : *Cette question est notée sur 9 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 *Réservé au correcteur*

a) Donner la définition de $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L\,, \quad L \in \mathbb{R}\,.$

b) Montrer à l'aide de la définition que $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\ln(x)} = 0\,.$

c) Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{\ln^2(x)+1}\cdot \sin\left(\frac{1}{\ln(x)}\right).$

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide
de auto-multiple-choice.

Pour chaque feuille supplémentaire, coller l'étiquette avec le code-barre par dessus un des cadres ci-après.

Question 2 : *Cette question est notée sur 9 points.*

$\square_0$ $\square_1$ $\square_2$ $\square_3$ $\square_4$ $\square_5$ $\square_6$ $\square_7$ $\square_8$ $\square_9$ *Réservé au correcteur*

On empile des boîtes B_1, B_2, B_3, ... Chaque boîte B_n est un parallélépipède rectangle dont la base est un carré d'aire A_n et dont la hauteur est h_n, $n \in \mathbb{N}^*$.
On suppose que $A_1 = 4$, $h_1 = 1$ et que pour tout $n \geq 1$, on a $A_{n+1} = \dfrac{A_n}{2}$ et $h_{n+1} = \beta\, h_n$ $(\beta > 0)$.

a) Calculer la valeur de β pour laquelle le volume total de la pile est égal à $V = 6$.

b) Pour la valeur de β trouvée en a), calculer la hauteur totale H de la pile.

c) Pour quelles valeurs de β la pile a-t-elle un volume total fini et une hauteur totale infinie ?

Pour chaque feuille supplémentaire, coller l'étiquette avec le code-barre par dessus un des cadres ci-après.

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide de auto-multiple-choice.

Question 3 : *Cette question est notée sur 8 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 *Réservé au correcteur*

Soit f définie sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{2x-1}}{x-1}$, si $x \neq 1$ et $f(1) = -1$.

a) Montrer que f est dérivable en $x_0 = 1$ en utilisant la définition de la dérivabilité.

b) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \geq 1 \\ ax^2 + b & \text{si} \quad x < 1\,. \end{cases}$

Déterminer les paramètres $a, b \in \mathbb{R}$ de sorte que g soit dérivable en $x_0 = 1$.
Justifier rigoureusement votre réponse.

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide de auto-multiple-choice.

Pour chaque feuille supplémentaire, coller l'étiquette avec le code-barre par dessus un des cadres ci-après.

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide de auto-multiple-choice.

Question 4 : *Cette question est notée sur 10 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ☐10 *Réservé au correcteur*

Etudier les branches infinies de l'arc paramétré Γ défini par

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = \frac{1}{t} \\ y(t) = \ln\left[\cosh\left(\frac{1}{t}\right)\right], \end{cases} \qquad t \in D_{\text{def}}.$$

Pour chaque feuille supplémentaire, coller l'étiquette avec le code-barre par dessus un des cadres ci-après.

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide de auto-multiple-choice.

Question 5 : *Cette question est notée sur 7 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 *Réservé au correcteur*

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{x}+1} e^{-t^2+5t}\, dt\,, \qquad x > 0\,.$$

Déterminer x de sorte que $f(x)$ soit maximale. Justifier rigoureusement votre réponse.

Pour chaque feuille supplémentaire, coller l'étiquette avec le code-barre par dessus un des cadres ci-après.

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide
de auto-multiple-choice.

Question 6 : *Cette question est notée sur 8 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 *Réservé au correcteur*

Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{4e^x - 5}{e^{2x} - 2\,e^x + 5}\,.$$

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide
de auto-multiple-choice.

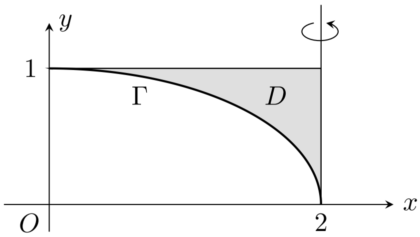
Pour chaque feuille supplémentaire, coller l'étiquette avec le code-barre par dessus un des cadres ci-après.

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide
de auto-multiple-choice.

Question 7 : *Cette question est notée sur 7 points.*

$\square_0$ $\square_1$ $\square_2$ $\square_3$ $\square_4$ $\square_5$ $\square_6$ $\square_7$ *Réservé au correcteur*

On considère le domaine D décrit ci-joint, limité par l'arc d'ellipse Γ d'équation $x^2+4y^2=4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, et les droites d'équations $x=2$ et $y=1$.



Calculer le volume du corps de révolution engendré par la rotation de ce domaine D autour de l'axe d'équation $x=2$.

Pour chaque feuille supplémentaire, coller l'étiquette avec le code-barre par dessus un des cadres ci-après.

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide
de auto-multiple-choice.

Question 8 : *Cette question est notée sur 7 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 *Réservé au correcteur*

On considère le domaine D du plan délimité par la droite d'équation $x = 1$ et par les graphes des deux fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \ln(x) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \ln(x+1)\,, \quad x \geq 1\,.$$

a) Esquisser le domaine D (on ne demande pas une étude complète des fonctions f et g).

b) Calculer l'aire A de ce domaine.

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide
de auto-multiple-choice.

Pour chaque feuille supplémentaire, coller l'étiquette avec le code-barre par dessus un des cadres ci-après.

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide
de auto-multiple-choice.

Question 9 : *Cette question est notée sur 10 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 *Réservé au correcteur*

a) Résoudre l'équation différentielle avec condition initiale suivante :

$$y'(x) + \tan(x) \cdot y(x) = \sin(2x)\,, \qquad y(0) = 1\,. \qquad (\textit{6 points})$$

b) Déterminer une équation différentielle linéaire inhomogène du deuxième ordre à coefficients constants admettant comme solutions toutes les fonctions :

$$y(x) = \frac{\cos(x)}{2} + A\,e^x \cdot \cos(2x) + B\,e^x \cdot \sin(2x)\,, \quad A, B \in \mathbb{R}\,. \qquad (\textit{4 points})$$

Pour chaque feuille supplémentaire, coller l'étiquette avec le code-barre par dessus un des cadres ci-après.

Enseignants : Friedli, Maatouk, Woringer
Math 1B - MAN
26 juin 2019
Durée : 180 minutes

3

Student Three

SCIPER : **333333**

Signature :

Indications

- Durée de l'examen : **180 minutes**.
- Posez votre **carte d'étudiant** sur la table.
- Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page.
- Ce document est imprimé recto-verso, il contient 28 pages.
- Ne pas séparer les feuilles.
- Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.
- La réponse à chaque question doit être **justifiée** et rédigée **à l'encre** sur la place réservée à cet effet à la suite de la question.
- Si la place prévue pour une question ne suffit pas, vous pouvez demander des feuilles supplémentaires aux surveillants. Chaque feuille ne peut être utilisée que pour **cette seule question**. Il convient de **coller l'un des codes-barre fourni en haut de la feuille supplémentaire et l'autre, identique, en bas de la dernière page de la question**.
- Les feuilles de brouillon sont à rendre mais **ne seront pas** corrigées ; des feuilles de brouillon supplémentaires peuvent être demandées en cas de besoin auprès des surveillants.
- Aucune documentation, ni machine à calculer ne sont autorisées.
- Veuillez **signer** votre examen.

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide
de auto-multiple-choice.

Trigonométrie circulaire

Formules d'addition :

$$\sin(x+y) = \sin x\,\cos y + \cos x\,\sin y \qquad \cos(x+y) = \cos x\,\cos y - \sin x\,\sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\,\tan y}$$

Formules de bissection :

$$\sin^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{2} \qquad \cos^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1+\cos x}{2} \qquad \tan^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

Expressions de $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$ en fonction de $\tan(\frac{x}{2})$:

$$\sin x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \cos x = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \tan x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1-\tan^2(\frac{x}{2})}$$

Formules de transformation somme-produit :

$$\cos x + \cos y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \cos x - \cos y = -2\sin(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \sin x - \sin y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

Trigonométrie hyperbolique

Définitions :

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Formules d'addition :

$$\sinh(x+y) = \sinh x\,\cosh y + \cosh x\,\sinh y \qquad \cosh(x+y) = \cosh x\,\cosh y + \sinh x\,\sinh y$$

$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x\,\tanh y}$$

Formules de bissection :

$$\sinh^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x - 1}{2} \qquad \cosh^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x + 1}{2} \qquad \tanh(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x - 1}{\sinh x} = \frac{\sinh x}{\cosh x + 1}$$

Dérivée de quelques fonctions

$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\text{arccot}\, x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\arg\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\arg\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\arg\tanh x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\arg\coth x$	$\frac{1}{1-x^2}$

Question 1 : *Cette question est notée sur 9 points.*

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 *Réservé au correcteur*

a) Donner la définition de $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L\,, \quad L \in \mathbb{R}\,.$

b) Montrer à l'aide de la définition que $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\ln(x)} = 0\,.$

c) Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{\ln^2(x) + 1} \cdot \sin\left(\frac{1}{\ln(x)}\right).$

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide
de auto-multiple-choice.

Pour chaque feuille supplémentaire, coller l'étiquette avec le code-barre par dessus un des cadres ci-après.

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide
de auto-multiple-choice.

Question 2 : *Cette question est notée sur 9 points.*

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 *Réservé au correcteur*

On empile des boîtes B_1 , B_2 , B_3 , ... Chaque boîte B_n est un parallélépipède rectangle dont la base est un carré d'aire A_n et dont la hauteur est h_n , $n \in \mathbb{N}^*$.

On suppose que $A_1 = 4$, $h_1 = 1$ et que pour tout $n \geq 1$, on a $A_{n+1} = \dfrac{A_n}{2}$ et $h_{n+1} = \beta\, h_n$ $(\beta > 0)$.

a) Calculer la valeur de β pour laquelle le volume total de la pile est égal à $V = 6$.

b) Pour la valeur de β trouvée en a), calculer la hauteur totale H de la pile.

c) Pour quelles valeurs de β la pile a-t-elle un volume total fini et une hauteur totale infinie ?

Pour chaque feuille supplémentaire, coller l'étiquette avec le code-barre par dessus un des cadres ci-après.

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide
de auto-multiple-choice.

Question 3 : *Cette question est notée sur 8 points.*

$\square_0$ $\square_1$ $\square_2$ $\square_3$ $\square_4$ $\square_5$ $\square_6$ $\square_7$ $\square_8$ *Réservé au correcteur*

Soit f définie sur $\left[\frac{1}{2}\,,\,+\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{2x-1}}{x-1}$, si $x \neq 1$ et $f(1) = -1$.

a) Montrer que f est dérivable en $x_0 = 1$ en utilisant la définition de la dérivabilité.

b) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \geq 1 \\ ax^2 + b & \text{si} \quad x < 1\,. \end{cases}$

Déterminer les paramètres $a, b \in \mathbb{R}$ de sorte que g soit dérivable en $x_0 = 1$.
Justifier rigoureusement votre réponse.

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide
de auto-multiple-choice.

Pour chaque feuille supplémentaire, coller l'étiquette avec le code-barre par dessus un des cadres ci-après.

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide de auto-multiple-choice.

Question 4 : *Cette question est notée sur 10 points.*

☐ 0	☐ 1	☐ 2	☐ 3	☐ 4	☐ 5	☐ 6	☐ 7	☐ 8	☐ 9	☐ 10	*Réservé au correcteur*

Etudier les branches infinies de l'arc paramétré Γ défini par

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = \frac{1}{t} \\ y(t) = \ln\left[\cosh\left(\frac{1}{t}\right)\right], \end{cases} \qquad t \in D_{\text{def}}\,.$$

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide
de auto-multiple-choice.

Pour chaque feuille supplémentaire, coller l'étiquette avec le code-barre par dessus un des cadres ci-après.

Question 5 : *Cette question est notée sur 7 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 *Réservé au correcteur*

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{x}+1} e^{-t^2+5t}\,dt\,, \qquad x > 0\,.$$

Déterminer x de sorte que $f(x)$ soit maximale. Justifier rigoureusement votre réponse.

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide
de auto-multiple-choice.

Pour chaque feuille supplémentaire, coller l'étiquette avec le code-barre par dessus un des cadres ci-après.

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide de auto-multiple-choice.

Question 6 : *Cette question est notée sur 8 points.*

$\square_0$ $\square_1$ $\square_2$ $\square_3$ $\square_4$ $\square_5$ $\square_6$ $\square_7$ $\square_8$ *Réservé au correcteur*

Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{4e^x - 5}{e^{2x} - 2\,e^x + 5}\,.$$

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide
de auto-multiple-choice.

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide
de auto-multiple-choice.

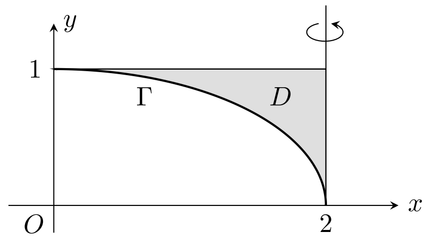
Pour chaque feuille supplémentaire, coller l'étiquette avec le code-barre par dessus un des cadres ci-après.

Question 7 : *Cette question est notée sur 7 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 *Réservé au correcteur*

On considère le domaine D décrit ci-joint, limité par l'arc d'ellipse Γ d'équation $x^2+4y^2=4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, et les droites d'équations $x=2$ et $y=1$.

Calculer le volume du corps de révolution engendré par la rotation de ce domaine D autour de l'axe d'équation $x=2$.



Pour chaque feuille supplémentaire, coller l'étiquette avec le code-barre par dessus un des cadres ci-après.

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide
de auto-multiple-choice.

Question 8 : *Cette question est notée sur 7 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 *Réservé au correcteur*

On considère le domaine D du plan délimité par la droite d'équation $x = 1$ et par les graphes des deux fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \ln(x) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \ln(x+1)\,, \quad x \geq 1\,.$$

a) Esquisser le domaine D (on ne demande pas une étude complète des fonctions f et g).

b) Calculer l'aire A de ce domaine.

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide
de auto-multiple-choice.

Pour chaque feuille supplémentaire, coller l'étiquette avec le code-barre par dessus un des cadres ci-après.

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide de auto-multiple-choice.

Question 9 : *Cette question est notée sur 10 points.*

☐ 0	☐ 1	☐ 2	☐ 3	☐ 4	☐ 5	☐ 6	☐ 7	☐ 8	☐ 9	☐ 10	*Réservé au correcteur*

a) Résoudre l'équation différentielle avec condition initiale suivante :

$$y'(x) + \tan(x) \cdot y(x) = \sin(2x)\,, \qquad y(0) = 1\,. \qquad (\textit{6 points})$$

b) Déterminer une équation différentielle linéaire inhomogène du deuxième ordre à coefficients constants admettant comme solutions toutes les fonctions :

$$y(x) = \frac{\cos(x)}{2} + A\,e^x \cdot \cos(2x) + B\,e^x \cdot \sin(2x)\,, \quad A, B \in \mathbb{R}\,. \qquad (\textit{4 points})$$

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide
de auto-multiple-choice.

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide
de auto-multiple-choice.

Pour chaque feuille supplémentaire, coller l'étiquette avec le code-barre par dessus un des cadres ci-après.

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide
de auto-multiple-choice.

Enseignants : Friedli, Maatouk, Woringer
Math 1B - MAN
26 juin 2019
Durée : 180 minutes

4

Student Four

SCIPER : **444444**

Signature :

Indications

- Durée de l'examen : **180 minutes**.
- Posez votre **carte d'étudiant** sur la table.
- Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page.
- Ce document est imprimé recto-verso, il contient 28 pages.
- Ne pas séparer les feuilles.
- Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.
- La réponse à chaque question doit être **justifiée** et rédigée **à l'encre** sur la place réservée à cet effet à la suite de la question.
- Si la place prévue pour une question ne suffit pas, vous pouvez demander des feuilles supplémentaires aux surveillants. Chaque feuille ne peut être utilisée que pour **cette seule question**. Il convient de **coller l'un des codes-barre fourni en haut de la feuille supplémentaire et l'autre, identique, en bas de la dernière page de la question**.
- Les feuilles de brouillon sont à rendre mais **ne seront pas** corrigées ; des feuilles de brouillon supplémentaires peuvent être demandées en cas de besoin auprès des surveillants.
- Aucune documentation, ni machine à calculer ne sont autorisées.
- Veuillez **signer** votre examen.

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide
de auto-multiple-choice.

Trigonométrie circulaire

Formules d'addition :

$$\sin(x+y) = \sin x\,\cos y + \cos x\,\sin y \qquad \cos(x+y) = \cos x\,\cos y - \sin x\,\sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\,\tan y}$$

Formules de bissection :

$$\sin^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{2} \qquad \cos^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1+\cos x}{2} \qquad \tan^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

Expressions de $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$ en fonction de $\tan(\frac{x}{2})$:

$$\sin x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \cos x = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \tan x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1-\tan^2(\frac{x}{2})}$$

Formules de transformation somme-produit :

$$\cos x + \cos y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \cos x - \cos y = -2\sin(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \sin x - \sin y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

Trigonométrie hyperbolique

Définitions :

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Formules d'addition :

$$\sinh(x+y) = \sinh x\,\cosh y + \cosh x\,\sinh y \qquad \cosh(x+y) = \cosh x\,\cosh y + \sinh x\,\sinh y$$

$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x\,\tanh y}$$

Formules de bissection :

$$\sinh^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x - 1}{2} \qquad \cosh^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x + 1}{2} \qquad \tanh(\tfrac{x}{2}) = \frac{\cosh x - 1}{\sinh x} = \frac{\sinh x}{\cosh x + 1}$$

Dérivée de quelques fonctions

$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\arg\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\arg\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\arg\tanh x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\arg\coth x$	$\frac{1}{1-x^2}$

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide de auto-multiple-choice.

Question 1 : *Cette question est notée sur 9 points.*

□0 □1 □2 □3 □4 □5 □6 □7 □8 □9 *Réservé au correcteur*

a) Donner la définition de $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L\,, \quad L \in \mathbb{R}\,.$

b) Montrer à l'aide de la définition que $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\ln(x)} = 0\,.$

c) Calculer la limite suivante : $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{\ln^2(x) + 1} \cdot \sin\left(\frac{1}{\ln(x)}\right).$

Pour chaque feuille supplémentaire, coller l'étiquette avec le code-barre par dessus un des cadres ci-après.

Question 2 : *Cette question est notée sur 9 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 *Réservé au correcteur*

On empile des boîtes B_1, B_2, $B_3, \ldots$. Chaque boîte B_n est un parallélépipède rectangle dont la base est un carré d'aire A_n et dont la hauteur est h_n, $n \in \mathbb{N}^*$.
On suppose que $A_1 = 4$, $h_1 = 1$ et que pour tout $n \geq 1$, on a $A_{n+1} = \dfrac{A_n}{2}$ et $h_{n+1} = \beta\, h_n$ $(\beta > 0)$.

a) Calculer la valeur de β pour laquelle le volume total de la pile est égal à $V = 6$.

b) Pour la valeur de β trouvée en a), calculer la hauteur totale H de la pile.

c) Pour quelles valeurs de β la pile a-t-elle un volume total fini et une hauteur totale infinie ?

Pour chaque feuille supplémentaire, coller l'étiquette avec le code-barre par dessus un des cadres ci-après.

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide de auto-multiple-choice.

Question 3 : *Cette question est notée sur 8 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8	*Réservé au correcteur*

Soit f définie sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{2x-1}}{x-1}$, si $x \neq 1$ et $f(1) = -1$.

a) Montrer que f est dérivable en $x_0 = 1$ en utilisant la définition de la dérivabilité.

b) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \geq 1 \\ ax^2 + b & \text{si} \quad x < 1 \,. \end{cases}$

Déterminer les paramètres $a, b \in \mathbb{R}$ de sorte que g soit dérivable en $x_0 = 1$.
Justifier rigoureusement votre réponse.

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide
de auto-multiple-choice.

Pour chaque feuille supplémentaire, coller l'étiquette avec le code-barre par dessus un des cadres ci-après.

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide
de auto-multiple-choice.

Question 4 : *Cette question est notée sur 10 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ☐10 *Réservé au correcteur*

Etudier les branches infinies de l'arc paramétré Γ défini par

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = \frac{1}{t} \\ y(t) = \ln\left[\cosh\left(\frac{1}{t}\right)\right], \end{cases} \qquad t \in D_{\text{def}}.$$

Pour chaque feuille supplémentaire, coller l'étiquette avec le code-barre par dessus un des cadres ci-après.

Question 5 : *Cette question est notée sur 7 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 *Réservé au correcteur*

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{x}+1} e^{-t^2+5t}\,dt\,, \qquad x > 0\,.$$

Déterminer x de sorte que $f(x)$ soit maximale. Justifier rigoureusement votre réponse.

Pour chaque feuille supplémentaire, coller l'étiquette avec le code-barre par dessus un des cadres ci-après.

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide de auto-multiple-choice.

Question 6 : *Cette question est notée sur 8 points.*

$\square_0$ $\square_1$ $\square_2$ $\square_3$ $\square_4$ $\square_5$ $\square_6$ $\square_7$ $\square_8$ *Réservé au correcteur*

Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{4e^x - 5}{e^{2x} - 2\,e^x + 5}\,.$$

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide
de auto-multiple-choice.

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide
de auto-multiple-choice.

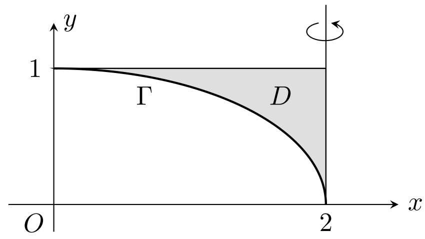
Pour chaque feuille supplémentaire, coller l'étiquette avec le code-barre par dessus un des cadres ci-après.

Question 7 : *Cette question est notée sur 7 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 *Réservé au correcteur*

On considère le domaine D décrit ci-joint, limité par l'arc d'ellipse Γ d'équation $x^2+4y^2=4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, et les droites d'équations $x=2$ et $y=1$.

Calculer le volume du corps de révolution engendré par la rotation de ce domaine D autour de l'axe d'équation $x=2$.



Pour chaque feuille supplémentaire, coller l'étiquette avec le code-barre par dessus un des cadres ci-après.

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide de auto-multiple-choice.

Question 8 : *Cette question est notée sur 7 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 *Réservé au correcteur*

On considère le domaine D du plan délimité par la droite d'équation $x = 1$ et par les graphes des deux fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \ln(x) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \ln(x+1)\,, \quad x \geq 1\,.$$

a) Esquisser le domaine D (on ne demande pas une étude complète des fonctions f et g).

b) Calculer l'aire A de ce domaine.

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide
de auto-multiple-choice.

Pour chaque feuille supplémentaire, coller l'étiquette avec le code-barre par dessus un des cadres ci-après.

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide
de auto-multiple-choice.

Question 9 : *Cette question est notée sur 10 points.*

☐ 0	☐ 1	☐ 2	☐ 3	☐ 4	☐ 5	☐ 6	☐ 7	☐ 8	☐ 9	☐ 10	*Réservé au correcteur*

a) Résoudre l'équation différentielle avec condition initiale suivante :

$$y'(x) + \tan(x) \cdot y(x) = \sin(2x)\,, \qquad y(0) = 1\,. \qquad (\textit{6 points})$$

b) Déterminer une équation différentielle linéaire inhomogène du deuxième ordre à coefficients constants admettant comme solutions toutes les fonctions :

$$y(x) = \frac{\cos(x)}{2} + A\,e^{x} \cdot \cos(2x) + B\,e^{x} \cdot \sin(2x)\,, \quad A, B \in \mathbb{R}\,. \qquad (\textit{4 points})$$

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide
de auto-multiple-choice.

Pour chaque feuille supplémentaire, coller l'étiquette avec le code-barre par dessus un des cadres ci-après.

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide de auto-multiple-choice.