Analyse A Mise à Niveau, EPFL

Série 09: Fonctions trigonométriques réciproques

Ex-09-01: Calculer, sans machine, les valeurs suivantes :

a) $\sin(\arccos(\frac{1}{5}))$ b) $\tan(\pi - \arctan(2))$ c) $\cos(2\arccos(\frac{2}{5}))$

d) $\arccos(\cos(\frac{17\pi}{3}))$ e) $\arctan(\tan(-\frac{7\pi}{12}))$ f) $\arcsin(\cos(-\frac{7\pi}{12}))$

Ex-09-02: Résoudre les équations et inéquations suivantes sur l'intervalle donné :

a) $\sin x = -\frac{2}{3}\,,\qquad x \in [\,0\,,\,2\pi\,]\,,$
b) $\sin(2x) = \frac{2}{3}\,,\qquad x \in [-\pi\,,\,0\,]\,,$
c) $\cos(\frac{x}{2}) = \frac{1}{3}\,,\qquad x \in [\,\pi\,,\,3\pi\,]\,,$
d) $\tan x = -\frac{3}{2}\,,\qquad x \in [\,0\,,\,2\pi\,]\,,$
e) $\cos(2x) > -\frac{3}{4}\,,\qquad x \in [\,0\,,\,2\pi\,]\,,$
f) $\tan(2x) \geq 2\,,\qquad -\pi \leq x \leq 0\,.$

Ex-09-03: Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{arccot}(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)\,.$$

Ex-09-04: Calculer, sans machine, l'angle $S = \arctan 7 + \arctan 8$.

Ex-09-05: Montrer que : $\arcsin(\frac{3}{5}) + \arccos(\frac{15}{17}) = \arcsin(\frac{77}{85})\,.$

Indication : commencer par montrer que $\arcsin(\frac{3}{5}), \arccos(\frac{15}{17}) \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[\,.$

Ex-09-06: Soit la fonction f de $A \subset \mathbb{R}$ dans $B \subset \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin x + \cos x\,.$

Déterminer A et B de sorte que f soit une bijection.

Déterminer alors la fonction réciproque de f.

Indication : Commencer par écrire $\sin x + \cos x$ comme une seule fonction trigonométrique.

Ex-09-07: **Exercice facultatif**

Calculer la dérivée de $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\,,\quad x \in \mathbb{R}^*$.

En déduire la représentation graphique de la fonction $\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ à partir de celle de la fonction $\arctan(x)\,.$

Réponses:

Ex-09-01:

a) $\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

b) -2

c) $-\dfrac{17}{25}$

d) $\dfrac{\pi}{3}$

e) $\dfrac{5\pi}{12}$

f) $-\dfrac{\pi}{12}$

Ex-09-02:

a) $S = \left\{\pi - \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)\ ,\ 2\pi + \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)\right\}$

b) $S = \left\{\frac{1}{2}\ \arcsin\left(\frac{2}{3}\right) - \pi\,,\ -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\ \arcsin\left(\frac{2}{3}\right)\right\}$,

c) $S = \emptyset$,

d) $S = \left\{\pi + \arctan\left(-\frac{3}{2}\right)\ ,\ 2\pi + \arctan\left(-\frac{3}{2}\right)\right\}$

e) En posant $\alpha = \frac{1}{2} \cdot \arccos(-\frac{3}{4})$,

$$S = [\,0\,,\ \alpha\,[\ \cup\ ]\,\pi - \alpha\,,\ \pi + \alpha\,[\ \cup\ ]\,2\pi - \alpha\,,\ 2\pi\,]\,,$$

f) $S = [-\pi + \frac{1}{2} \cdot \arctan(2)\,,\ -\frac{3\pi}{4}\,[\ \cup\ [-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cdot \arctan(2)\,,\ -\frac{\pi}{4}\,[\,.$

Ex-09-04: $S = \arctan 7 + \arctan 8 = \arctan(-\frac{3}{11}) + \pi$

Ex-09-06: Il y a plusieurs solutions à ce problème. En voici une :

$$A = [-\tfrac{3\pi}{4}\,,\ \tfrac{\pi}{4}\,]\,, \qquad B = [-\sqrt{2}\,,\ \sqrt{2}\,]\,,$$

$$f^{-1}(x) = -\tfrac{\pi}{4} + \arcsin\left(\tfrac{x}{\sqrt{2}}\right), \quad \forall\, x \in B\,.$$

Deux autres sont présentées dans le corrigé.