

Série 08: Formules trigonométriques

Ex-08-01: En utilisant les formules trigonométriques, calculer sans machine les valeurs suivantes :

a) $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

b) $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

c) $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

d) $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Ex-08-02: En utilisant les formules de transformation somme-produit, factoriser puis résoudre les équations suivantes :

a) $\sin(3x) + \sin x = \sin(2x)$

c) $\sin^2(5x) = \sin^2 x$

b) $\cos(3x) + \cos(5x) = \cos x$

d) $(1 + \tan x) [\cos(7x) + \cos x] = 0$

Ex-08-03: Résoudre les équations suivantes :

a) $\sin x - \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}$

b) $\sin x + 2 \cos x = 9$

c) $\frac{\sqrt{2}}{2} [\sin(3x) + \cos(3x)] = 1$

d) $\sin(2x) - \cos(2x) + 1 = 0 , \quad -5\pi \leq x \leq -3\pi$

e) $\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 , \quad -\pi \leq x \leq 0$

Ex-08-04: Résoudre les inéquations suivantes :

a) $\cos x + \sqrt{3} \sin x > 1$

b) $-\sqrt{3} \sin(2x) + \cos(2x) \leq -\sqrt{2} , \quad 5\pi \leq x \leq 6\pi$

c) $\sin x \geq \cos x , \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{5\pi}{2}$

Ex-08-05:

Factoriser avant de résoudre l'équation et l'inéquation suivantes :

a) $\sin(2x) - 2 \cos^2 x + 2 \cos x = 0$

b) $\cos(2x) + \sin x + \cos x > 0 , \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

Ex-08-06: Exercice facultatif

Calculer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$. En déduire la construction à la règle et au compas d'un pentagone régulier inscrit dans un cercle trigonométrique.

Indication : poser $x = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et chercher une équation polynomiale satisfaite par x en utilisant les formules trigonométriques pour exprimer tout d'abord $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$, puis $\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)$ de deux manières différentes.

Réponses:

Ex-08-01:

- a) $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$
- b) $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$
- c) $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2 + \sqrt{3}$
- d) $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1$

Ex-08-02:

- a) $S = \left\{ \frac{k\pi}{2}, -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
- b) $S = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$
- c) $S = \left\{ \frac{k\pi}{6}, \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$
- d) $S = \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, \frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

Ex-08-03:

- a) $S = \left\{ \frac{7\pi}{12} + 2k\pi, \frac{13\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
- b) $S = \emptyset$
- c) $S = \left\{ \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$
- d) $S = \left\{ -5\pi, -\frac{17\pi}{4}, -4\pi, -\frac{13\pi}{4}, -3\pi \right\}$
- e) $S = \left\{ -\frac{\pi}{2} \right\}$

Ex-08-04:

- a) $S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right[$
- b) $S = \left[\frac{125\pi}{24}, \frac{131\pi}{24} \right]$
- c) $S = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{9\pi}{4}, \frac{5\pi}{2} \right]$

Ex-08-05:

- a) $S = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
- b) $S = \left[0, \frac{\pi}{2} \right] \cup \left] \frac{3\pi}{4}, \pi \right[\cup \left] \frac{7\pi}{4}, 2\pi \right]$

Ex-08-06: $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$