

Série 07: Equations trigonométriques

Ex-07-01: En dessinant le cercle trigonométrique, observer la valeur des quantités suivantes :

- | | |
|---|---|
| a) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ | c) $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ et $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ |
| b) $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ et $\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ | d) $\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ et $\cot\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ |

Ex-07-02: Résoudre les équations suivantes dans l'intervalle donné :

- | | |
|--|---|
| a) $\cos x = \frac{1}{2}$, $15\pi \leq x \leq 16\pi$ | c) $\tan x = -1$, $-4\pi \leq x \leq -3\pi$ |
| b) $\sin x = -\frac{1}{2}$, $15\pi \leq x \leq 16\pi$ | d) $\cot x = \sqrt{3}$, $-\pi \leq x \leq 0$ |

Ex-07-03: Résoudre les équations suivantes :

- | | |
|----------------------------------|---|
| a) $(\cos t)(2 \cos t + 3) = -1$ | b) $4 - 5 \sin t = 2 \cos^2 t$, $-\frac{11\pi}{2} \leq t \leq -5\pi$ |
|----------------------------------|---|

Ex-07-04: Résoudre les équations suivantes sur l'intervalle donné.

- a) $\sin(4x + \frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in [0, \pi]$,
- b) $4 \sin^4(2x) - 11 \sin^2(2x) + 6 = 0$, $x \in [-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$,
- c) $\tan(2x + \frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x \in [0, \pi]$,
- d) $\cot^2(\frac{x}{2}) = \frac{1}{3}$, $x \in]0, 2\pi[$.

Ex-07-05: Résoudre les équations suivantes :

- | | |
|---|--|
| a) $\sin(2x) = \sin(x + \frac{\pi}{3})$ | c) $\cos(2x) = \sin(3x)$ |
| b) $\cos(2x) = \cos(\frac{x}{3})$ | d) $\tan(\frac{x}{3}) = \cot(x - \frac{\pi}{6})$ |

Ex-07-06: Résoudre les inéquations suivantes dans l'intervalle donné :

- a) $\sin x \geq \frac{1}{2}$, $4\pi \leq x < 5\pi$,
- b) $-\frac{1}{2} < \cos x < 0$, $-5\pi \leq x < -3\pi$,
- c) $\sin(3x + \frac{\pi}{4}) > \sin(-\frac{3\pi}{4})$, $-2\pi \leq x < 0$,
- d) $\tan x \leq -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $0 \leq x < 2\pi$,
- e) $\cot x > \sqrt{3}$, $-2\pi \leq x < \pi$,
- f) $\tan(2x + \frac{\pi}{6}) \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$, $x \in [-\pi, 0]$.

Ex-07-07: Exercice facultatif

Il est midi. Sur une montre analogique, l'aiguille des heures et celle des minutes sont superposées.

- a) A quels instants (heures, minutes, secondes) le seront-elles de nouveau ?

Indication : déterminer $\alpha_1(t)$, l'angle décrit par l'aiguille des heures en t secondes et $\alpha_2(t)$, l'angle décrit par l'aiguille des minutes.

- b) Même question avec les trois aiguilles, celle des heures, des minutes et des secondes.

Réponses:

Ex-07-01:

- a) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$
- b) $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot(x)$ et $\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan(x)$
- c) $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$ et $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$
- d) $\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot(x)$ et $\cot\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\tan(x)$

Ex-07-02:

- a) $S = \left\{\frac{47\pi}{3}\right\}$
- b) $S = \left\{\frac{91\pi}{6}, \frac{95\pi}{6}\right\}$
- c) $S = \left\{-\frac{13\pi}{4}\right\}$
- d) $S = \left\{-\frac{5\pi}{6}\right\}$

Ex-07-03:

- a) $S = \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
- b) $S = \left\{-\frac{31\pi}{6}\right\}$

Ex-07-04:

- a) $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right\},$
- b) $S = \left\{-\frac{4\pi}{3}, -\frac{7\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}, -\frac{2\pi}{3}\right\},$
- c) $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\},$
- d) $S = \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}.$

Ex-07-05:

- a) $S = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\},$
- b) $S = \left\{\frac{6k\pi}{5}, \frac{6k\pi}{7}, k \in \mathbb{Z}\right\},$
- c) $S = \left\{\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}, \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\},$
- d) $S = \left\{\frac{\pi}{2} + \frac{3k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}.$

Ex-07-06:

- a) $S = \left[\frac{25\pi}{6}, \frac{29\pi}{6}\right],$
- b) $S = \left]-\frac{14\pi}{3}, -\frac{9\pi}{2}\right[\cup \left]-\frac{7\pi}{2}, -\frac{10\pi}{3}\right[,$
- c) $S = \left[-2\pi, -\frac{5\pi}{3}\right[\cup \left]-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right[\cup \left]-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{3}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{6}, 0\right[,$
- d) $S = \left]\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right] \cup \left]\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}\right] ,$
- e) $S = \left]-2\pi, -\frac{11\pi}{6}\right[\cup \left]-\pi, -\frac{5\pi}{6}\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{6}\right[,$
- f) $S = \{-\pi\} \cup \left]-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left]-\frac{\pi}{3}, 0\right] .$

Ex-07-07:

- a) $t \approx k(1\text{h } 5' 27''), \quad k \in \mathbb{N}^*.$
- b) $t = 12\text{ h}.$