Analyse A Mise à Niveau, EPFL

Série 06: Racine

Ex-06-01: Simplifier les expressions suivantes où p et q sont des nombres réels strictement positifs.

a) $A = \left[-p\,(-p^{-2})^m\right]^{-2m}$, $m \in \mathbb{Z}$.

b) $B = 9\,\sqrt[3]{2\,p^6\,q} + 3\,\sqrt[3]{-16\,p^3\,q} + \sqrt[3]{2\,q}$.

Ex-06-02: Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Dans les cinq cas suivants, déterminer si les deux expressions données sont égales. Justifier rigoureusement votre réponse.

a) $A(x) = \dfrac{1}{x}\,\sqrt{x^2+x+1}$ et $a(x) = \sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$,

b) $B(x) = \operatorname{sgn}(x)\,\sqrt{x^6+1}$ et $b(x) = x^3\,\sqrt{1+\frac{1}{x^6}}$,

c) $C(x) = \sqrt[3]{x^4+x^3}$ et $c(x) = x\,\sqrt[3]{x+1}$,

d) $D(x) = \sqrt{x^6}$ et $d(x) = x^2\,|x|$,

e) $E(x) = \sqrt[4]{x^2}$ et $e(x) = \sqrt{x}$.

Ex-06-03: Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations irrationnelles suivantes :

a) $\sqrt{-x^2-x+6} = -(x+1)$,

b) $\dfrac{x-2\,(1+\sqrt{x-1})}{2x-\sqrt{x-1}-5} = 1$.

Ex-06-04: Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $x-3 > \sqrt{x^2+3x}$,

b) $\sqrt{\dfrac{x^2\,(2x-5)}{2\,(x+1)}} \geq 2-x$.

Ex-06-05: On considère l'équation suivante :

$$\sqrt{\sqrt{x^2-5x+4} + 5x - 2} = 5.$$

a) Déterminer le domaine de définition de cette équation.

b) Résoudre cette équation sur son domaine de définition.

Ex-06-06: Résoudre dans $\mathbb{R}$ les deux inéquations suivantes :

a) $\left|\,3x-5-\sqrt{-x^2+x+42}\,\right| \geq -x+11-\sqrt{-x^2+x+42}$,

b) $\sqrt{x^2-|3x+4|} \leq x-2$.

Ex-06-07: Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante par rapport à la variable x en fonction du paramètre m :

$$\sqrt{2\,(x^2+1)} = x-m\,, \qquad m \in \mathbb{R}.$$

Expliciter l'ensemble solution pour chaque valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$.

Ex-06-08: **Exercice facultatif**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante par rapport à la variable x en fonction du paramètre m :

$$\sqrt{|x^2 - 5m^2|} \leq x - m\,, \qquad m \in \mathbb{R}\,.$$

Expliciter l'ensemble solution pour chaque valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$.

Réponses:

Ex-06-01:

a) $A = p^{4m^2-2m}$

b) $B = \sqrt[3]{2\,q}\ \left(\,3p-1\,\right)^2$

Ex-06-03:

a) $S = \{-\frac{5}{2}\}$

b) $S = \{2\}$

Ex-06-04:

a) $S = \emptyset$

b) $S = \left[-2\sqrt{2}\,,\,-1\,\right[\,\cup\,\left[\,\frac{5}{2}\,,\,+\infty\,\right[$

Ex-06-05: $D_{\text{def}} = \left[\,0\,,\,1\,\right]\,\cup\,\left[\,4\,,\,+\infty\,\right[\,,\quad S = \left\{\,5\,\right\}$

Ex-06-06:

a) $S = \left[-6\,,\,3\,\right]\;\cup\;\left[\,4\,,\,7\,\right]$

b) $S = \left[\,4\,,\,8\,\right]$

Ex-06-07:

- si $\quad m \in \left]-\infty\,,\,-1\,\right],\quad$ alors $\quad S = \left\{-m - \sqrt{2\,(m^2-1)}\,,\,-m + \sqrt{2\,(m^2-1)}\,\right\},$
- si $\quad m \in \left]-1\,,\,+\infty\,\right[,\quad$ alors $\quad S = \emptyset\,.$

Ex-06-08:

- Si $\;m < 0\,,\;$ alors $\;S = \left[\,-m\,,\,+\infty\,\right[\,.$
- Si $\;m = 0\,,\;$ alors $\;S = \mathbb{R}_+\,.$
- Si $\;m > 0\,,\;$ alors $\;S = \left[\,2m\,,\,3m\,\right].$