Analyse A Mise à Niveau, EPFL

Série 05: Valeur absolue

Ex-05-01: Exercice facultatif

On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$ et $g(x) = -3x - \frac{11}{2}$.

a) Dans un repère orthonormé (unité = 2 carrés), représenter le graphe de f et de g, puis en déduire celui de $|f|$.

Déterminer graphiquement les solutions de l'équation $|f(x)| = g(x)$.

b) Interpréter graphiquement, sur l'exemple ci-dessus, l'équivalence suivante

$$|\,f(x)\,| = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad g(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad \begin{cases} f(x) = g(x) \\ \text{ou} \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$$

Ex-05-02: Résoudre dans $\mathbb{R}$ les deux équations suivantes :

a) $|-x+4| \;=\; -\dfrac{3}{x}$,

b) $\left|x^3 - 2x^2 - 4x + 3\right| \;=\; (x^2+1)\,(x-3)$.

Ex-05-03: Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante par rapport à la variable x en fonction du paramètre m :

$$\left|\,m\,x + m + 2\,\right| \;=\; x + 3\,.$$

Expliciter l'ensemble solution pour chaque valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$.

Ex-05-04: Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $|x^2 + 3x - 1| \geq x^2 + x + 1$,

b) $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| < x - 1$,

c) $\Big|\,2\,(x+3) - |x-1|\,\Big| \leq |x-1|$,

d) $\dfrac{1-x}{2+x} \leq 1 - \left|1 + \dfrac{2}{3x-4}\right|$.

Ex-05-05: Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante par rapport à la variable x en fonction du paramètre réel m.

$$\left|\,x^2 - x\,(m+3) + m\,\right| \;=\; -x^2 - x\,.$$

Ex-05-06: Dans le plan muni d'un repère cartésien (O, x, y), représenter les points de coordonnées (x, y) vérifiant

$$|x| + |y| = 5 \qquad \text{et} \qquad 2x - 3y - 5 = 0\,.$$

Puis résoudre algébriquement le système $\begin{cases} |x| + |y| = 5 \\ 2x - 3y - 5 = 0\,. \end{cases}$

Réponses:

Ex-05-02:

a) $S = \{2 - \sqrt{7}\}$

b) $S = \{3\}$

Ex-05-03:

- si $m \in \,]-\infty\,,\,-1\,[\,\cup\,]\,1\,,\,+\infty\,[\,,$ alors $S = \{-1\,,\,-\frac{m+5}{m+1}\}\,,$
- si $m \in [-1\,,\,1\,[\,,$ alors $S = \{-1\}\,,$
- si $m = 1\,,$ alors $S = [-3\,,\,+\infty\,[\,.$

Ex-05-04:

a) $S = [\,-2\;;\;0\,] \cup [\,1\;;\;+\infty\,[\,.$

b) $S = \,]\,1\;;\;+\infty\,[\,.$

c) $S = [\,-3\;;\;-1\,]\,.$

d) $S = \,]-\infty\;;\;-2\,[\,\cup\,[\,0\;;\;1\,] \cup [\,3\;;\;+\infty\,[\,.$

Ex-05-05:

- si $m \in \,]-\infty\,,\,-2\,[\,\cup\,]\,0\,,\,+\infty\,[\,,$ alors $S = \emptyset\,,$
- si $m \in [-2\,,\,0\,]\,,$ alors $S = \{\frac{m}{2}\,,\,\frac{m}{m+4}\}\,.$