Analyse A Mise à Niveau, EPFL

Série 04: Equations et inéquations

Ex-04-01: Résoudre par rapport à $x \in \mathbb{R}$ en fonction du paramètre réel m :

a) $(m-2)x + 7 = (11m+3)x - 3$

b) $(m-2)x + 20m^2 = (11m+3)x + 5$.

Ex-04-02: Résoudre par rapport $x \in \mathbb{R}$ en fonction du paramètre réel m :

a) $m^2 x \geq 4x - 3$

b) $(m+2)^2 x < 4\big((m+2)x + 1\big)$

c) $(m^2-4)x - 2(m+x) \geq 4 + mx$.

Ex-04-03: Résoudre en $x \in \mathbb{R}$ en fonction du paramètre réel m :

a) $\dfrac{m}{x+m} \leq 1$

b) $\dfrac{x^2-m^2}{x+2m} > 0$.

Ex-04-04: Résoudre en x : $p(x) = mx^2 - 4x + 4 - m \geq 0$ en fonction du paramètre réel m.

Ex-04-05:

On considère l'équation :

$$(m-1)\,x^2 - 2\,(m+1)\,x + 2m - 1 = 0\,.$$

Pour quelles valeurs de m cette équation admet-elle deux racines x_1 et x_2 vérifiant la relation :

$$-6 < x_1 < 4 < x_2 \quad ?$$

Ex-04-06: On considère le trinôme

$$P(x) \;=\; (m-1)\,x^2 - 4m\,x - 2\,(m+2)\,, \quad m \in \mathbb{R}\,.$$

Déterminer m pour que la courbe d'équation $y = P(x)$ soit une parabole vérifiant simultanément les conditions suivantes :

i) le sommet de la parabole est situé dans le demi-plan défini par $x > -5$,

ii) la parabole coupe l'axe Ox en deux points distincts, déterminant un segment ne contenant pas le point $M\,(2\,;\,0)$.

Ex-04-07: On donne le trinôme $P(x) = (m-2)\,x^2 - 4mx + 5m - 1\,,\quad m \in \mathbb{R}$.

a) Déterminer m pour que la courbe d'équation $y = P(x)$ soit entièrement contenue dans le demi-plan défini par : $y < -6x + 5$.

b) Déterminer l'équation de la parabole définie par $y = P(x)$ vérifiant les deux conditions suivantes :

i) la parabole est tangente à la droite d'équation $y = -6x + 5$,

ii) $P(x)$ admet un minimum.

Calculer alors la valeur de x pour laquelle $P(x)$ est minimum.

Ex-04-08: On considère l'équation : $x^2 + (m-2)\,x - (m+3) = 0$.

Déterminer m pour que la somme des carrés des racines soit égale à 9.

Réponses:

Ex-04-01:

a) Si $m \neq -\frac{1}{2}$, $S = \left\{\frac{2}{2m+1}\right\}$; si $m = -\frac{1}{2}$, $S = \emptyset$.

b) Si $m \neq -\frac{1}{2}$, $S = \{2m-1\}$; si $m = -\frac{1}{2}$, $S = \mathbb{R}$.

Ex-04-02:

a) Si $m \in]-\infty, -2\,[\cup]\,2, +\infty[$, $S = [-\frac{3}{m^2-4}, +\infty[$; si $m \in \{-2, 2\}$, $S = \mathbb{R}$; si $m \in]-2, 2\,[$, $S =]-\infty, -\frac{3}{m^2-4}\,]$.

b) Si $m \in]-\infty\,,\,-2\,[\cup]\,2\,,\,+\infty[$, $S =]-\infty\,,\,\frac{4}{m^2-4}\,[$; si $m \in \{-2, 2\}$, $S = \mathbb{R}$; si $m \in]-2\,,\,2\,[$, $S =]\,\frac{4}{m^2-4}\,,\,+\infty\,[$.

c) Si $m \in]-\infty\,,\,-2\,[\cup]\,3\,,\,+\infty[$, $S = \left[\frac{2}{m-3}\,,\,+\infty\right[$; si $m = -2$, $S = \mathbb{R}$; si $m = 3$, $S = \emptyset$; si $m \in]-2\,,\,3\,[$, $S = \left]-\infty\,,\,\frac{2}{m-3}\right]$.

Ex-04-03:

a) Si $m > 0$, $S =]-\infty\,,\,-m\,[\cup[\,0\,,\,+\infty[$; si $m = 0$, $S = \mathbb{R}^*$; si $m < 0$, $S =]-\infty\,,\,0\,]\cup]-m\,,\,+\infty[$.

b) Si $m > 0$, $S =]-2m\,,\,-m\,[\cup]\,m\,,\,+\infty[$; si $m = 0$, $S = \mathbb{R}_+^*$; si $m < 0$, $S =]\,m\,,\,-m\,[\cup]-2m\,,\,+\infty[$.

Ex-04-04:

- Si $m < 0$. $S = [\,\frac{4-m}{m}\,,\,1\,]$;
- si $m = 0$, $S =]-\infty\,,\,1\,]$;
- si $0 < m < 2$, $S =]-\infty\,,\,1\,] \cup [\,\frac{4-m}{m}\,,\,+\infty[$;
- si $m = 2$, $S = \mathbb{R}$;
- si $2 < m$, $S =]-\infty\,,\,\frac{4-m}{m}\,] \cup [\,1\,,\,+\infty[$.

Ex-04-05: $m \in]\,1\,,\,\frac{5}{2}\,[$.

Ex-04-06: $m \in]-\frac{4}{3}\,,\,-1\,[\,\cup\,]\,\frac{2}{3}\,,\,\frac{5}{7}\,[$.

Ex-04-07:

a) $m \in]-\infty\,,\,1\,[$

b) $y = x^2 - 12x + 14$; $\quad x_{\min} = 6$

Ex-04-08: $m = 1$