Analyse A Mise à Niveau, EPFL

Série 03: Méthode de preuve

Ex-03-01: En utilisant la méthode directe, démontrer les propositions suivantes :

a) Si n est un nombre pair alors n^2+1 est impair.

b) Si n est un nombre impair alors n^2-1 est pair.

c) Si n est un nombre impair alors n^2+2 est impair.

d) Si n est un entier positif alors n^2-n est pair.

e) Si n est un entier positif alors n^3-n est un multiple de 3.

f) Si n est impair alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n^2 = 8k+1$.

g) Soit $a \in \mathbb{N}$, si a n'est pas un multiple de 3 alors a^2+2 est un multiple de 3.

h) Si m est pair ou n est pair alors m^2+n^2 est impair ou m^2+n^2 est un multiple de 4.

i) Soit $m \in \mathbb{N}$, si m est la somme de 5 entiers consécutifs alors m est un multiple de 5. Peut-on généraliser cet énoncé à la somme d'un nombre quelconque d'entiers consécutifs ? Justifier la réponse par une démonstration.

j) Soient A et B des sous-ensembles de E :
$A \cup B = A \cap B \ \Rightarrow \ A = B$.

Ex-03-02: Ecrire l'énoncé contraposé des théorèmes suivants (on ne demande pas de démonstration).

a) Soient ABC un triangle et D le milieu du côté AB.
Si E est le milieu du côté AC alors DE est parallèle à BC.

b) $\forall a, b \in \mathbb{N}^*$, si a ou b sont pairs alors ab est pair.

c) $\forall x \in \mathbb{R},\ x(x-3) > 0 \ \Rightarrow \ x < 0$ ou $x > 3$.

d) $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 - 1 < 0 \ \Rightarrow \ x < 1$ et $x > -1$.

e) $\forall n, m \in \mathbb{N},\ (m \leq 3$ et $n \leq 3) \ \Rightarrow \ m \cdot n \neq 15$.

f) $\forall n, m \in \mathbb{N},\ m+n = 0 \ \Rightarrow \ m = 0$ et $n = 0$.

g) $\forall n, m \in \mathbb{N},\ (m = 0$ ou $n = 0) \ \Rightarrow m \cdot n = 0$.

h) $\forall a \in \mathbb{R},\ (\forall \varepsilon > 0,\ |a| < \varepsilon) \ \Rightarrow \ a = 0$.

Ex-03-03: Démontrer par la contraposée les théorèmes suivants :

a) $\forall n, m \in \mathbb{N},\ m \cdot n$ pair $\ \Rightarrow\ m$ est pair ou n est pair.

b) $\forall n, m \in \mathbb{N}^*,\ m^n$ impair $\ \Rightarrow\ m$ est impair ou n est impair.

c) $\forall n, m \in \mathbb{N},\ (m^2+n^2$ est impair ou $m^2+n^2 = 4k, k \in \mathbb{N}) \ \Rightarrow\ m$ est pair ou n est pair.

d) $\forall n, m \in \mathbb{N}^*,\ m^2 - n^2$ n'est pas une multiple de 8 $\ \Rightarrow\ m$ est pair ou n est pair.

e) Si n^2 est un multiple de 3 alors n est aussi un multiple de 3, n étant un entier positif.

f) $A \cap \overline{B} = \emptyset \ \Leftrightarrow \ A \subset B$.

g) $A \subset B \ \Leftrightarrow \ E = \overline{A} \cup B$.

h) $\forall\ A, B, C \subset E,\quad (A \cap B) \subset C \implies \mathcal{C}_A(C) \cap \mathcal{C}_B(C) = \emptyset$.
($\mathcal{C}_A(C)$ est le complémentaire de C dans A).

Ex-03-04: En utilisant la méthode par l'absurde, démontrer les propositions suivantes :

a) Si x est irrationnel et y rationnel alors $x+y$ est irrationnel.

b) $\forall a \in \mathbb{N}^*$, si a^2+2 est un multiple de 3 alors a n'est pas un multiple de 3.

c) $\forall m, n \in \mathbb{N}\,,\; m \leq 3$ et $n \leq 3 \;\Rightarrow\; m \cdot n \neq 15$.

d) Soient A et B des sous-ensembles du référentiel E.
$\forall\, A, B \subset E, \quad A \subset B \Rightarrow \bar{A} \cup B = E.$

e) $\sqrt{3}$ est irrationnel.
Indication : utiliser que si n^2 est un multiple de 3, alors n est un multiple de 3. (la preuve se fera plus loin)

Ex-03-05: Soit la proposition T suivante :

$$T:\; \forall m, n \in \mathbb{N}\,,\; n \neq 0 \;\Rightarrow\; m + n\sqrt{2} \text{ est irrationnel.}$$

a) Démontrer la proposition T par l'absurde.

b) Enoncer la contraposée C de la proposition T. C est-elle vraie ?

c) Enoncer la réciproque R de la proposition T et la démontrer par la méthode de la contraposée.

Ex-03-06: Ecrire la négation des propositions P suivantes.
Dans le cas où la proposition est fausse, donner un contre-exemple.

a) $\forall x \in \mathbb{R}\,,\; x^2 = 9 \;\Rightarrow\; x = 3\,.$

b) $\forall x, y \in \mathbb{R}\,,\; x^2 = y^2 \;\Rightarrow\; x = y\,.$

c) $\forall x \in \mathbb{R}\,,\; x \leq 2 \;\Rightarrow\; x \leq 0\,.$

d) $\forall x \in \mathbb{R}\,,\; x \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; x \in \mathbb{Q}\,.$

e) $\forall x \in \mathbb{R}\,,\; 2x^2 = 8 \;\Rightarrow\; x = 2$ ou $x = -2\,.$

f) $\forall\,(n;\, m) \in \mathbb{N}^2\,,\; n + m = 0 \;\Rightarrow\; n = m = 0\,.$

g) $\forall\,(a;\, b) \in \mathbb{R}^2\,,\; a < b \;\Rightarrow\; \exists x \in\; \mathbb{Q}\,,\; a < x < b\,.$

h) Un nombre est irrationnel lorsqu'il s'écrit comme produit de deux nombres irrationnels.

i) a et b étant irrationnels, leur quotient est irrationnel.

Ex-03-07: Démontrer par récurrence :

a) $\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}\, n(n+1)\,.$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad S_n = 2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)\,.$

c) $\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad S_n = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n\,(2n-1)\,(2n+1)}{3}\,.$

d) $\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad S_n = 2 + 6 + 18 + \cdots + 2 \cdot 3^{n-1} = 3^n - 1\,.$

e) $\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2.$

f) $\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad S_n = 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n = \frac{3}{2}\,(3^n - 1)\,.$

g) $\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\,(n+1)} = \frac{n}{n+1}\,.$

h) $\forall n \in \mathbb{N}^* \; : \quad S_n = 1^2 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (-1)^{n+1} n^2 = \frac{1}{2}(-1)^{n+1} n\,(n+1)\,.$

i) $\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad 5^n + 5 < 5^{n+1}\,.$

j) $\forall\, n \in \mathbb{N}$: $10^n - 1$ est un multiple de 9.

k) $\forall\, n \in \mathbb{N}$: $2^{2n} + 2$ est divisible par 3.

l) $\forall\, n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 6$: $2^n \geq 6n + 7$.

m) $\forall\, n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 4$: $2^n < n!$.

n) $\forall\, n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 7$: $\left(\frac{4}{3}\right)^n > n$.

o) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{(2n)!}{n!n!} \leq 2^{2n-1}$

p) $3^{3n} + 1$ est un multiple de 7 pour tout n impair et $n \geq 1$.