Analyse A Mise à Niveau, EPFL

Série 01: Ensembles

Ex-01-01: Soient $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{2, 4\}$; trouver tous les ensembles X vérifiant :

a) $X \subset B$ et $X \subset C$,

b) $X \subset B$ et $X \not\subset C$,

c) $X \subset A$ et $X \not\subset B$,

d) $X \subset C$ et $X \not\subset B$.

Ex-01-02: Soient $A \subset E$ et $B \subset E$. Quels sont les éléments de A, B et E si :

$$A \cup B = \{2,\ 3, 5, 7, 8, 9, 10\}, \quad C_E(A) = \{1,\ 4, 5, 6, 8, 9\}, \quad C_E(B) = \{1, 2, 3, 4, 6\}.$$

Ex-01-03: Soient $A, B, C \subset E$. Quels sont les éléments de A, B, C et E sachant que :

$C_E(A \cup B \cup C) = \{1, 8, 12\}$,

$C_E(B) = \{1, 2, 5, 6, 8, 10, 11, 12\}$,

$B \cap C = \emptyset$,

$A \cap C = \{5\}$,

$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 7, 9\}$,

$A \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, 10, 11\}$.

Ex-01-04: Trouver des ensembles A, B, C tels que : $A \cap B \cap C = \emptyset$ mais ni $A \cap B$, ni $A \cap C$, ni $B \cap C$ ne soient vides.

Ex-01-05: On considère les ensembles suivants :

$$A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -x^2 + x + 12 > 0\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R}_+ \,|\, (x-1)^2 > 0\}, \quad C = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - 25 \le 0\}.$$

En vous aidant d'une représentation sur l'axe réel, expliciter :

a) $A \cap B$

b) $A \cup B$

c) $A \cup (B \cap C)$

d) $A \cap (B \cup C)$

e) $C_C(A \cap B)$

f) $C_C(A) \cup B$

g) Peut-on trouver une formulation équivalente dans les cas c) et d) ?

Ex-01-06:

a) Soit D l'ensemble défini par

$$D = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\tfrac{\pi}{6} + 2k\pi, \tfrac{5\pi}{6} + 2k\pi\right[.$$

Représenter D sur la droite réelle, puis, en s'aidant de la représentation, calculer

$$D \cap [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[\text{ et } D \cap [-5\pi, -3\pi].$$

b) (**Facultatif**) On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les ensembles

$$A_n =]-\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}[, \quad B_n =]\tfrac{1}{2^n}, \tfrac{1}{2^{n-1}}].$$

Exprimer les ensembles ci-dessous sous forme compacte simplifiée :

$$\bigcup_{n \ge 1} A_n, \quad \bigcap_{n \ge 1} A_n, \quad \bigcup_{n \ge 1} B_n, \quad \bigcap_{n \ge 1} B_n,$$

Réponses:

Ex-01-02: $A=\{2,\ 3,\ 7,\ 10\}$, $B=\{5,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$, $E=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$
Ex-01-03: $E=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12\}$, $A=\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $B=\{3,\ 4,\ 7,\ 9\}$, $C=\{5,\ 6,\ 10,\ 11\}$
Ex-01-05:

a) $A\cap B=\ [0\,,\,1[\,\cup\,]1\,,4[\,,$

b) $A\cup B=\,]-3\,,\,+\infty[\,,$

c) $A\cup(B\cap C)\ =\,]-3\,,5]\,,$

d) $A\cap(B\cup C)=\,]-3\,,4[\,,$

e) $C_C(A\cap B)=\ [-5\,,\,0[\,\cup\,\{1\}\ \cup\ [4\,,5]\,,$

f) $C_C(A)\cup B=\ [-5\,,\,-3]\ \cup\ [0\,,\,1[\,\cup\,]1\,,\,+\infty[\,.$

Ex-01-06:

a) $D\cap\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[=\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right[,D\cap[-5\pi,-3\pi]=\left[-\frac{23\pi}{6},-\frac{19\pi}{6}\right[$

b) $\bigcup_{n\geq1}A_n=]-1,1[,\bigcap_{n\geq1}A_n=\{0\},\bigcup_{n\geq1}B_n=]0,1]\,,\bigcap_{n\geq1}B_n=\emptyset$