

Série 14: Exponentielles et logarithmes

Ex-14-01: Calculer sans machine les quantités suivantes :

a) $A = \log_2 \frac{1}{16}$

c) $C = \log_\pi 1$

e) $E = \log(\log 10^{10})$

b) $B = \log_4 2$

d) $D = \log_{1/2} 8$

f) $F = e^{2 \ln 5}$

Ex-14-02: Exprimer les quantités suivantes à l'aide d'une seule fonction logarithme ou exponentielle :

a) $A = \log 15 - \log 6 + 3 \log 2$

b) $B = \sqrt{e^9} \cdot e^{2-\ln 3} \cdot e^{-3/2}$

Ex-14-03: Résoudre les équations suivantes par rapport à $x \in \mathbb{R}$:

a) $e^{3x/2} - e^{-3x/2} = \frac{1}{2} (e^{x/2} + 5 e^{-x/2})$

b) $e^{\sin x} - e^{-\sin x} = 2 (1 + e^{-\sin x})$

c) $3 + \log_2 \left(\frac{1}{2} - x \right) = \log_2 \left(\frac{x-9}{x+1} \right)$

d) $\log_{1/2} \left(2x - 13 - \frac{15}{x} \right) - \frac{1}{2} = \log_{1/2} [2(x-15)] + \frac{1}{2}$

Ex-14-04: Résoudre les inéquations suivantes par rapport à $x \in \mathbb{R}$:

a) $\ln(2x - e^{-\ln x}) < 2 + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

c) $e^9 \cdot e^x > \left(e^{\sqrt{6-x}}\right)^2$

b) $3^{x+4} - 1458 \leq 9^x$

Indication : $1458 = 27 \cdot 54$

d) $\ln(x^2 \sqrt{e^{2x}}) > x + \ln(16x - 48)$

Ex-14-05: Résoudre les inéquations suivantes par rapport à $x \in \mathbb{R}$:

a) $\log_a \frac{x-4}{x-6} \leq -1 + \log_a(2x) - 2 \log_a |x-6|$

(i) avec $a = 2$,

(ii) puis avec $a = \frac{1}{2}$.

b) $\log_a(4-x) + a \leq a \cdot \log_a(x+2) - 1$

(i) avec $a = 2$,

(ii) puis avec $a = \frac{1}{2}$.

Ex-14-06: Calculer, là où elles existent, les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

a) $a(x) = \tan(a^x)$,

d) $d(x) = \arcsin(e^x)$,

b) $b(x) = e^{1/\ln x}$,

c) $c(x) = \ln(\ln x)$,

e) $e(x) = x \cdot \sin(\ln x - \frac{\pi}{4})$.

Réponses:**Ex-14-01:**

- a) $A = -4$
- b) $B = \frac{1}{2}$
- c) $C = 0$
- d) $D = -3$
- e) $E = 1$
- f) $F = 25$

Ex-14-02:

- a) $A = 1 + \log 2$
- b) $B = \frac{1}{3} e^5$

Ex-14-03:

- a) $S = \{ \ln 2 \}$
- b) $S = \emptyset$
- c) $S = \{ -\frac{13}{8} \}$
- d) $S = \emptyset$

Ex-14-04:

- a) $S = \left] \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{\frac{1+e^2}{2}} \right[$
- b) $S =] -\infty, 3] \cup [3 + \log_3 2, +\infty[$
- c) $S =] -3, 6]$
- d) $S =]3, 4[\cup]12, +\infty[$

Ex-14-05:

- a)
 - (i) $S = [3, 4[\cup]6, 8]$
 - (ii) $S =]0, 2] \cup [12, +\infty[$
- b)
 - (i) $S = [2, 4[$
 - (ii) $S =]-2, 0]$

Ex-14-06:

- a) $a'(x) = a^x \ln a [1 + \tan^2(a^x)]$,
- b) $b'(x) = -\frac{e^{1/\ln x}}{x \ln^2 x}$,
- c) $c'(x) = \frac{1}{x \ln x}$,
- d) $d'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$,
- e) $e'(x) = \sqrt{2} \sin \ln x$.