Analyse A Mise à Niveau, EPFL

Série 13: Logarithme naturel

Ex-13-01: Exprimer les nombres suivants à l'aide de la fonction logarithme :

a) $A=-1\,,$ b) $B=\frac{1}{2}\,,$ c) $C=3\,.$

Ex-13-02: Exprimer les quantités suivantes de la façon la plus simple possible, à l'aide d'une seule fonction logarithme :

a) $A=\ln 15-\ln 6+3\,\ln 2\,,$ b) $B=\ln\left(3\cdot\sqrt{e}\,\right)+\ln\left(\frac{2\sqrt{2}}{9}\right)-\frac{1}{2}\,\ln 8\,.$

Ex-13-03: Résoudre les équations suivantes par rapport à $x\in\mathbb{R}$:

a) $3\,\ln 2+\ln\left(\frac{1}{2}-x\right)=\ln\left(\frac{x-9}{x+1}\right)$

b) $\ln(\sin x)=1+\ln(\cos x)$

c) $\ln\left(2x-13-\frac{15}{x}\right)+\ln\sqrt{2}=\ln\left(2x-30\right)-\ln\sqrt{2}$

Ex-13-04: Résoudre les trois inéquations suivantes par rapport à $x\in\mathbb{R}$:

a) $\ln\sqrt{3-x}+\ln\sqrt{x+1}\leq\ln\sqrt{10-6x}$

b) $\ln\left(2x-\frac{1}{x}\right)<2+\ln\left(\frac{1}{x}\right)$

c) $\ln\frac{x-4}{x-6}\leq-\frac{1}{2}\,\ln\left(\frac{1}{4}\right)+\ln(2x)-2\,\ln|x-6|$

Ex-13-05: Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant :

$$\begin{cases}\ln\left(6-x\right)-\ln y=\ln\left(\frac{6-x}{4x}\right)+3\ln 2\\ \ln(2)+\ln(4y^2+1)-\ln(2y+3)\leq\ln(x^2-2)\end{cases}$$

Ex-13-06:
En utilisant l'interprétation géométrique de $\ln(x)$, démontrer que

$$\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty.$$

Indication : On pourra utiliser que la somme

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=+\infty.$$

Réponses:

Ex-13-01:

a) $A = \ln\left(\frac{1}{e}\right)$,

b) $B = \ln\left(\sqrt{e}\right)$,

c) $C = \ln\left(e^3\right)$.

Ex-13-02:

a) $A = \ln 20$

b) $B = \frac{1}{2} - \ln(3)$

Ex-13-03:

a) $S = \left\{-\frac{13}{8}\right\}$

b) $S = \{\arctan e + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

c) $S = \emptyset$

Ex-13-04:

a) $S = \,]-1\,,\,1\,]$

b) $S = \left]\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\,\sqrt{\frac{1+e^2}{2}}\,\right[$

c) $S = \,[\,2\,,\,4\,[\,\cup\,]\,6\,,\,12\,]$

Ex-13-05: $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2y \ \text{ et } \ y \in [\,1\,,\,3\,[\,\}$