Analyse A Mise à Niveau, EPFL

Série 12: Polynômes

Ex-12-01: Sans effectuer la division, donner pour les cas suivants les restes de la division de $P(x)$ par $Q(x)$. Puis à l'aide du schéma de Hörner, effectuer la division euclidienne de $P(x)$ par $Q(x)$.

a) $P(x) = -x^3 + 2x^2 - 3x + 1 \quad Q(x) = x + 5$

b) $P(x) = (x+1)^5 \quad Q(x) = x - 1$

c) $P(x) = x^2 + 1 \quad Q(x) = 2x + 1$

Ex-12-02:

a) Déterminer $a \in \mathbb{R}$ pour que $x^4 - a^2x + 3 - a$ admette 4 comme reste après division par $x - 3$ et 24 comme reste après division par $x + 1$;

b) Trouver un polynôme réel $P(x)$ du troisième degré admettant 5 comme racine double, -5 comme reste de la division par $x + 1$, et tel que $x - 2$ divise $P(x)$.

Ex-12-03: Sans utiliser les nombres complexes, décomposer les polynômes suivants en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[x]$.

a) $P(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$

b) $Q(x) = 5x^6 - 21x^4 + 16$

c) $R(x) = x^5 - 2x^3 - 2x^2 - 3x - 2$.

Ex-12-04: Décomposer les polynômes suivants en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[x]$.

a) $A(x) = x^3 - x^2 + 2x - 2$,

b) $B(x) = x^4 - 1$,

c) $C(x) = x^4 + 4$.

Ex-12-05: Décomposer les polynômes suivants en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[x]$.

a) $A(x) \;=\; x^4 + 1$,

b) $B(x) \;=\; x^{12} - x^8 - x^4 + 1$.

Ex-12-06: Décomposer le polynôme P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[x]$, sachant que $x = 2 - i$ est une racine de P.

$$P(x) \;=\; 3x^4 + 2x^3 - 46x^2 + 90x - 25\,.$$

Ex-12-07:

a) Montrer les formules de Viète pour un polynôme de degré 3 : soit $P_3(z) = az^3 + bz^2 + cz + d, a, b, c, d \in \mathbb{C}, a \neq 0$, soient $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ les racines de P. Alors On a

$$z_1 + z_2 + z_3 = \frac{-b}{a}, \quad z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3 = \frac{c}{a}, \quad z_1z_2z_3 = \frac{-d}{a}.$$

Indication : écrire $P_3(z) = a(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$ et développer l'expression.

b) Déterminer les polynômes P_3 du troisième degré vérifiant les quatre conditions suivantes :

i) $P_3(1) = 0$,

ii) le reste de la division de P_3 par $z - i$ est égal à i - 1 ,

iii) le produit des racines de P_3 vaut 1 + i ,

iv) la somme des racines non réelles de P_3 est égale à 1 + i .

Indication : séparer la discussion selon que P_3 a deux racines non réelles ou une seule.

Réponses:

Ex-12-01:

a) Reste 191, résultat $-x^2 + 7x - 38$

b) Reste 32, résultat $x^4 + 6x^3 + 16x^2 + 26x + 31$

c) Reste $\frac{5}{4}$, résultat $\frac{1}{4}(2x - 1)$

Ex-12-02:

a) 5

b) $\frac{5}{108}(x-5)^2(x-2)$

Ex-12-03:

a) $(x-1)(x+1)(2x+1)$

b) $(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)(5x^2+4)$

c) $(x+1)^2(x-2)(x^2+1)$

Ex-12-04:

a) $(x-1)\,(x+i\sqrt{2})\,(x-i\sqrt{2})$

b) $(x-1)\,(x+1)\,(x-i)\,(x+i)$

c) $(x-1-i)\,(x+1-i)\,(x+1+i)\,(x-1+i)$

Ex-12-05:

a) $(x^2 - \sqrt{2}\,x + 1)\,(x^2 + \sqrt{2}\,x + 1)$

b) $(x+1)^2\,(x-1)^2\,(x^2+1)^2\,(x^2 + \sqrt{2}\,x + 1)\,(x^2 - \sqrt{2}\,x + 1)$

Ex-12-06: $(3x-1)\,(x+5)\,(x^2-4x+5)$

Ex-12-07: b) $P_3(z) = z^3 - (2+i)z^2 + 2(1+i)z - (1+i)$ ou $P_3(z) = \frac{1}{2}(1+i)z^3 - (1+2i)z^2 + \frac{1}{2}(1+5i)z - i$