Série 11: Nombres complexes

Ex-11-01: Trouver le module et un argument de :

a) $z = 5 + 12i$;

b) $z = \sqrt{3} + i$;

c) $z = \dfrac{1 + i \tan\alpha}{1 - i\tan\alpha}$.

Ex-11-02: Mettre sous la forme $[r;\varphi]$ les nombres complexes suivants :

a) $z = -2$;

b) $z = 7i - \dfrac{3}{i}$;

c) $z = -1 + i$;

d) $z = \sqrt{3} + i$;

e) $z = \dfrac{1}{1-i}$;

f) $z = -3\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Ex-11-03: Mettre sous la forme $a + bi$:

a) $z = \left[5; -\dfrac{\pi}{2}\right]$;

b) $z = \left[2; \dfrac{\pi}{8}\right]$;

c) $z = [\pi; \pi - t]$;

d) $z = \dfrac{\left[2; -\frac{\pi}{4}\right]}{\left[\frac{1}{2}; \frac{\pi}{4}\right]}$;

e) $z = \dfrac{\left[2; -\frac{\pi}{3}\right]^4}{\left[4; \frac{\pi}{4}\right]}$.

Ex-11-04: Déterminer $\varphi \in [0,\pi]$ pour que $\mathrm{Re}\left(\left[\sqrt{3}; \dfrac{2}{3}\right]^3 \cdot [4;\varphi]\right) = \mathrm{Im}\left(\dfrac{[6; 1+\varphi]^2}{[3;\varphi]}\right)$.

Ex-11-05: Résoudre :

a) $z - i\overline{z} = 0$ sachant que $|z| = 2\sqrt{2}$;

b) $2iz + \overline{z} = 0$ sachant que $|z| = 2$;

c) $z^{11} = \overline{z}$ sachant que $0 < \mathrm{Im} z < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Ex-11-06:

a) Trouver les racines cubiques de $\quad z = 1 - i\sqrt{3} \quad$ et $\quad z = \dfrac{1}{(1+i)^2}$;

b) Calculer tous les nombres complexes $z = \dfrac{\omega}{\omega'}$ où ω est une racine carrée de $(-1+i)^3$ et ω' est une racine 7-ième de i.

Ex-11-07: Soit $z \in \mathbb{C}$, on définit z' par

$$z' = z\overline{z} - (1+3i)z - 6 + 9i$$

Déterminer dans le plan complexe l'ensemble des nombres z tels que z' soit situé sur l'axe des nombres imaginaires.

Ex-11-08:

a) Déterminer l'ensemble des points du plan complexe satisfaisant

$$|z - i| = |z + 4 + 7i|.$$

b) Dans le plan complexe, on considère z_1 et z_2 tels

$$z_1 = 2 - 3i\,,\ z_2 = 8 + 3i.$$

Déterminer le point z_3 sachant que z_1, z_2, z_3 forment un triangle équilatéral d'orientation positive (c'est-à-dire que l'on parcourt les sommets z_1, z_2, z_3 dans le sens trigonométrique).

Ex-11-09:

a) Calculer le nombre complexe obtenu en faisant tourner $z = 5 - i$ d'un angle de $-\dfrac{\pi}{2}$ autour de l'origine ;

b) On se donne les deux points $z_0 = 2 + 3i$ et $z_1 = 6 + 5i$. Calculer le point z_2 connaissant les informations suivantes :

- la distance de z_0 à z_1 et la même que la distance de z_0 à z_2
- l'angle aigu φ orienté défini par $\widehat{z_2 z_0 z_1}$ est tel que $\tan\varphi = \dfrac{4}{3}$;

c) Soient $z_1 = 2+2i$ et $z_2 = 4+3i$. Déterminer le point z_0 satisfaisant les conditions suivantes :

- La distance de z_0 au point z_1 vaut $\sqrt{10}$
- L'angle $\widehat{z_2 z_1 z_0}$ vaut $-\dfrac{\pi}{4}$

Réponses:

Ex-11-01:

a) $|z| = 13$, $\varphi = \arccos(\frac{5}{13})$

b) $|z| = 2$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$

c) $|z| = 1$, $\varphi = 2\alpha$

Ex-11-02:

a) $z = [2; \pi]$

b) $z = [10; \pi/2]$

c) $z = [\sqrt{2}; 3\pi/4]$

d) $z = [2; \pi/6]$

e) $z = [\sqrt{2}/2; \pi/4]$

f) $z = [3; -3\pi/4]$

Ex-11-03:

a) $z = -5i$

b) $z = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$

c) $z = -\pi\cos t + i\pi\sin t$

d) $z = -4i$

e) $z = (\sqrt{6}-\sqrt{2}) + i(\sqrt{6}+\sqrt{2})$

Ex-11-04: $\varphi = 4\pi/3 - 2$

Ex-11-05:

a) $z = \pm(2+2i)$

b) pas de solution

c) $z = \frac{1}{2}(\pm\sqrt{3}+i)$

Ex-11-06:

a) $z = [2^{1/3}; -\pi/9 + 2k\pi/3]$, $k = 0, 1, 2$

b) $z = [2^{3/4}; 59\pi/56 + (l - 2k/7)\pi]$, $l = 0, 1$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

Ex-11-07: Le cercle de centre $\Omega(1/2; -3/2)$ et de rayon $r = \sqrt{17/2}$.

Ex-11-08:

a) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\, x + 2y + 8 = 0\}$

b) $z_3 = 5 - 3\sqrt{3} + 3\sqrt{3}i$

Ex-11-09:

a) $z' = -1 - 5i$

b) $z_2 = 6 + i$

c) $z_0 = 5 + i$