Analyse A Mise à Niveau, EPFL

Série 10: Nombres complexes

Ex-10-01: Mettre sous la forme $a+ib$:

a) $(4-i)+(2+3i)(1-i)$;

b) $\dfrac{1}{3-2i}$;

c) i^n n entier ;

d) $\dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$.

Ex-10-02:

a) Résoudre en complétant le membre de gauche pour former un carré parfait :

$$z^2+2(1+i)z-\frac{5}{1+2i}=0$$

b) Résoudre en devinant une solution : $z^3+9z-10=0$.

Ex-10-03: Montrer que :

a) Si $z=x+iy\in\mathbb{C},\ (y\neq 0)$, il existe deux nombres réels T et N tels que :

$$z^2-Tz+N=0$$

- Donner une interprétation de ces nombres.
- Résoudre cette équation en prenant les valeurs de $T=1$ et $N=2$;

b) $|z|<1$ implique $\left|(1-i)z^3-iz\right|<\dfrac{5}{2}$.

Ex-10-04: On considère l'équation : $|z|^2=\left(-\dfrac{3}{4}+bi\right)\cdot\left(\dfrac{z}{1-z}\right),\quad b\in\mathbb{R}^+$

Déterminer b pour que cette équation ne possède qu'une solution ($\neq 0$) ;

Quelle est cette solution ?

Ex-10-05: Trouver parmi les solutions de l'équation : $(z+\overline{z})z^3+4(\overline{z}^2-z^2)=0$
celle(s) satisfaisant $2\mathrm{Re}z>|z|$.

Ex-10-06: Donner sous la forme algébrique (ou cartésienne) les racines carrées des nombres complexes suivants :

a) $z=9i$;

b) $z=5-12i$;

c) $z=\dfrac{1}{1-i}+\dfrac{1}{i}$.

Réponses:

Ex-10-01:

a) $a = 9, \quad b = 0$

b) $a = \frac{3}{13}, \quad b = \frac{2}{13}$

c) $i^{4k} = 1,\ i^{4k+1} = i,\ i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i \quad k \in \mathbb{N}$

d) $a = 2, \quad b = 0$

Ex-10-02:

a) $z = -i$ ou $z = -2 - i$

b) $z_1 = 1,\ z_{2,3} = -\frac{1 \pm i\sqrt{39}}{2}$

Ex-10-03: $T = 2\mathrm{Re}z, \quad N = |z|^2$

Ex-10-04: $b = 1, \quad z = \frac{1}{2} - i$

Ex-10-05: $z = \sqrt{3} \pm i$

Ex-10-06:

a) $\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}(1 + i)$

b) $\pm(3 - 2i)$

c) $\pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{\sqrt{2} + 1} - i\sqrt{\sqrt{2} - 1}\right)$