

3.5 Fonctions trigo réciproques

22.04.24
Cours 8
Analyse A

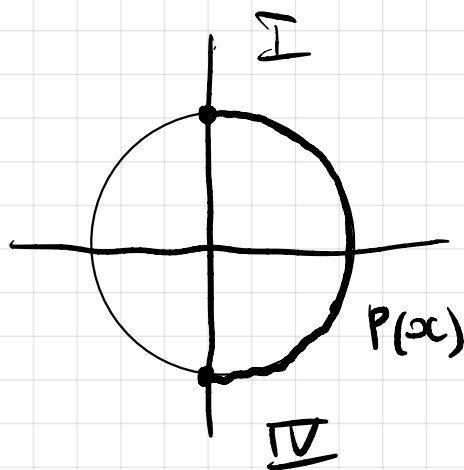
3.5.1 $\text{Arcsin} = \sin^{-1}$ = la réciproque
de la fonction
sinus

Rem: $\sin: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$

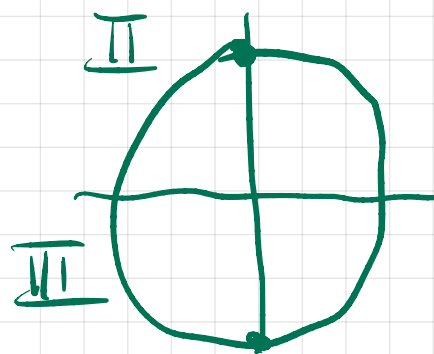
est surjective
mais pas injective
(car 2π -périodique)

Par contre si on prend $x \in \mathbb{R}$ t.q

★ $P(x) \in \text{I} \cup \text{IV}$ (1^{er} ou 4^{ème} cadran)
 $P(x) \in \text{II} \cup \text{III}$



$\frac{1}{2}$ cercle de droite
sinus est injective
 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



$\frac{1}{2}$ cercle de gauche
sinus est injective

Rem : ★ signifie, il existe un $k \in \mathbb{Z}$

$$\text{t.q. } x \in \left[-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$$

sur ces intervalles la fonction sinus est bijective
(inj. + surj.) et donc elle possède
une fonction réciproque.

Def 3.5.1 :

1) Un intervalle de la forme $\left[-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$
est une détermination du sinus

2) $k=0$ l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est
la détermination principale du sinus.

Def 3.5.2 : On définit

$$\arcsin: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

comme la fonction réciproque de sinus

$$\sin: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1], \text{ car}$$

$$\arcsin: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

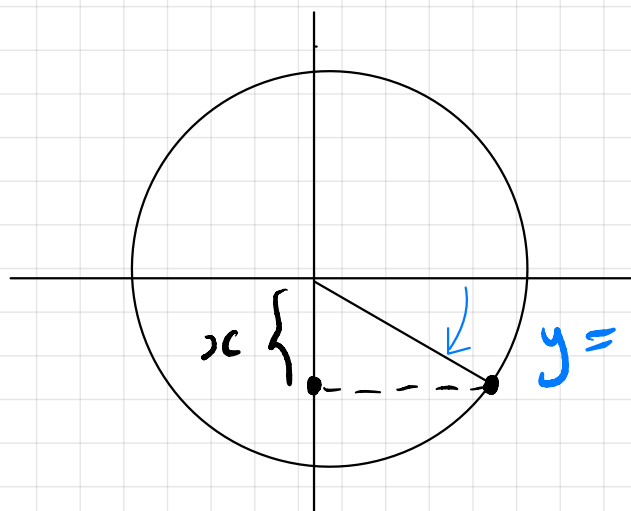
$$x \mapsto y = \arcsin(x)$$

où y est **le** seul
"arc" $\in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

dont le sinus vaut x

⚠ D_{def} $\arcsin = [-1, 1]$

$$x \in [-1, 1]$$



val. remarquables:

$$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(0) = 0$$

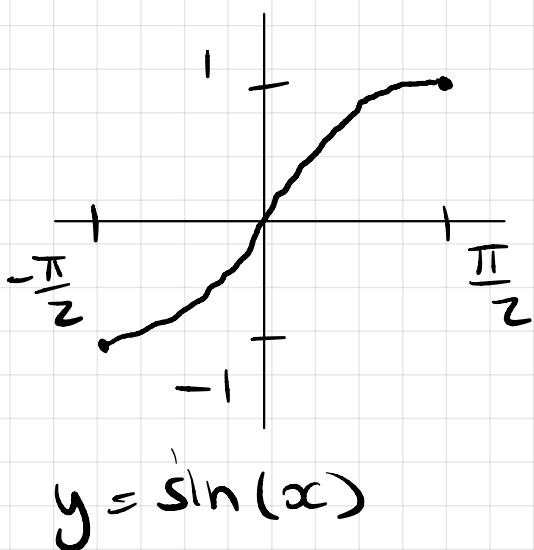
$$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

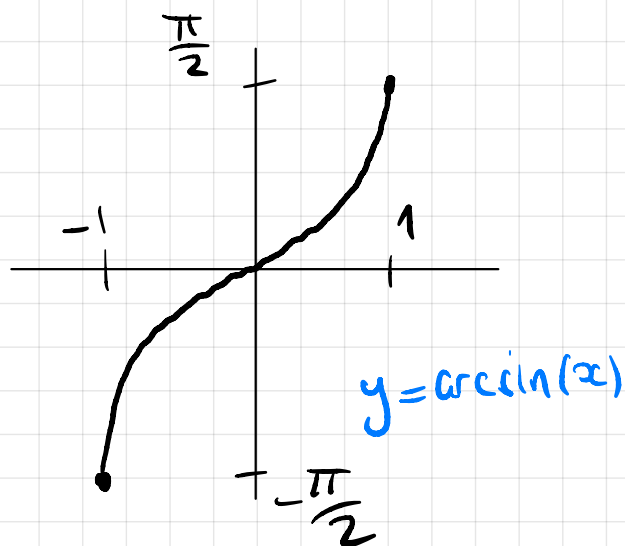
$$\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$$

Graphes:



miroir
↔
d'axe
 $x = y$



Propriétés:

1) $\forall x \in [-1, 1]$ on a

$$\sin(\arcsin(x)) = x \quad (\text{par def})$$

2) $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ on a

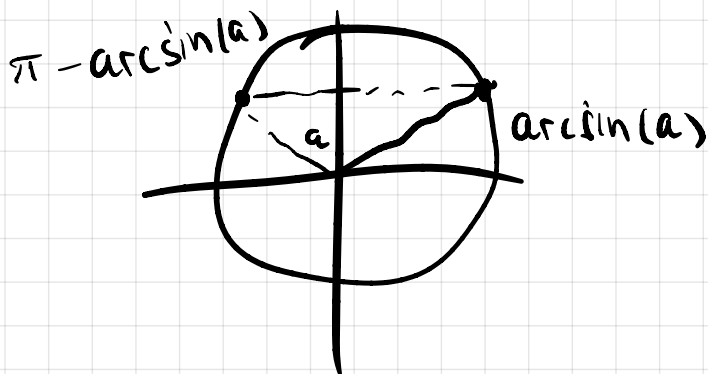
$$\arcsin(\sin(x)) = x$$

$$\left(\textcircled{!} \arcsin(\sin(2\pi)) \neq 2\pi \right)$$

" $\arcsin(0) = 0$

3) $\forall a \in [-1, 1]$ on a l'équiv.

$$\sin(x) = a \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arcsin(a) + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \pi - \arcsin(a) + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



4) $\forall x \in [-1, 1]$ on a

$$\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$$

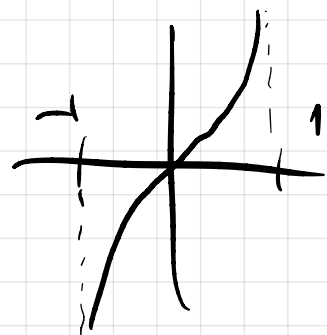
($\arcsin$ est impaire)

5) $\forall x \in [-1, 1]$ on a

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

6) $\forall x \in]-1, 1[$ on a qe

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$



ex: $\arcsin(\sin(\frac{7\pi}{6}))$

rem: $\frac{7\pi}{6} \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

par contre $\sin(\frac{7\pi}{6}) = \sin(\pi + \frac{\pi}{6}) = \sin(-\frac{\pi}{6})$

et $-\frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ donc $\arcsin(\sin(\frac{7\pi}{6})) = -\frac{\pi}{6}$

ex: Résoudre $\sin(x) = -\frac{3}{4}$ sur $\underline{\underline{[\pi, 2\pi]}}$

1) On résoud sur $\mathbb{R}$

3) $\Rightarrow$

$$x = \arcsin\left(-\frac{3}{4}\right) + 2k\pi$$



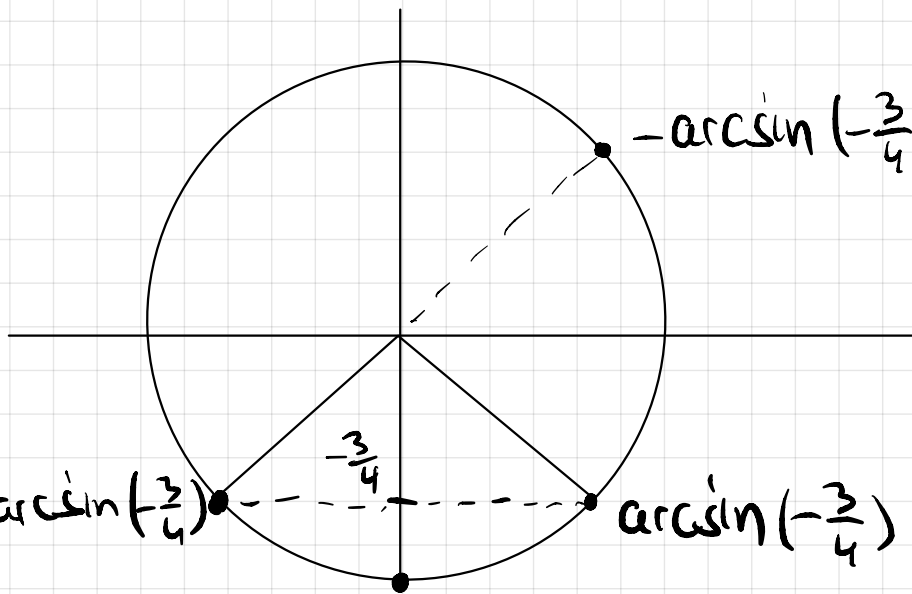
04

$$x = \pi - \arcsin\left(-\frac{3}{4}\right) + 2k\pi$$



4622

Dessin pour localiser les sol. avec $k=0, k=-1, k=1$


$$-\arcsin\left(-\frac{3}{4}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$
$$\pi - \arcsin\left(-\frac{3}{4}\right)$$
$$\arcsin\left(-\frac{3}{4}\right) \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$$
$$\in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$$

$k=0$ ♠ ⊗

$$h = 0$$

dens ♥

$$\arcsin\left(-\frac{3}{4}\right) + 2\pi \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$$

$h=1$ dans $\mathbb{Q}$



done $S = \{ \pi - \arcsin(-\frac{3}{4}), \arcsin(-\frac{3}{4}) + 2\pi \}$

3.5.2 : $\text{Arccos} = \cos^{-1}$

Def 3.5.3 : un intervalle de type

$$[0 + k\pi, \pi + k\pi]$$

est appelé une détermination
du cosinus

(car la fonction $\cos$
 y est injective)

$[0, \pi]$ = la détermination principale
du cosinus

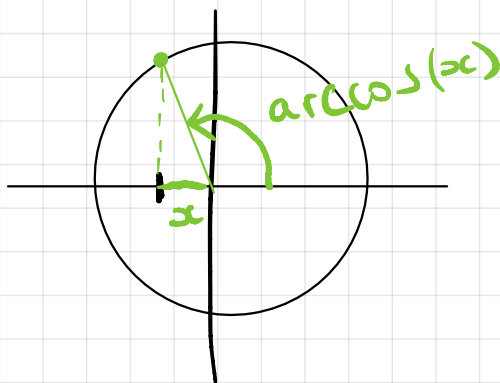
Def. 3.5.4 :

On définit : $\text{arccos} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$

$$x \mapsto y = \text{arccos}(x)$$

où y = "unique" "arc" $\in [0, \pi]$

$$\text{t.q. } \cos(y) = x$$



⚠ D_{def} arccos
 $[-1, 1]$

Propriétés :

$$1) \forall x \in [-1, 1], \cos(\arccos(x)) = x$$

$$2) \arccos(\cos(x)) = x \iff x \in [0, \pi]$$

$$3) \forall a \in [-1, 1] \text{ on } a$$

$$\cos(x) = a \iff \begin{cases} x = \arccos(a) + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\arccos(a) + 2k\pi \end{cases}$$

$$4) \forall x \in [-1, 1] \text{ on } a$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$$

$$5) \forall x \in [-1, 1] \text{ on } a$$

$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

$$6) \forall x \in]-1, 1[\text{ on } a$$

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

dém

$$4) \cos(\arccos(-x)) \stackrel{\text{par définition car } x \in [-1,1]}{=} -x$$

$$= -\cos(\arccos(x))$$

$$= \cos(\pi - \arccos(x))$$

or la fonct. $\cos$ est injective sur $[0, \pi]$

$$\text{donc } \arccos(-x) = \pi - \arccos(x).$$

$$5) \sin(\arccos(x)) = ?$$

$$\text{or } \sin^2(\arccos(x)) + \underbrace{\cos^2(\arccos(x))}_{x^2} = 1$$

$$\text{donc } \sin^2(\arccos(x)) = 1 - x^2$$

$$\Rightarrow \sin(\arccos(x)) = \pm \sqrt{1 - x^2}$$

$$\text{or } \arccos(x) \in \text{I} \cup \text{II} \quad \in [0, \pi]$$

$$\text{donc } \sin(\arccos(x)) \geq 0$$

$$\text{donc } \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$6) \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{en effet}$$

$$\cos(\arccos(x)) = x$$

$$\forall x \in [-1, 1]$$

()' ↘

$$\cos'(\arccos(x)) \arccos'(x) = 1$$

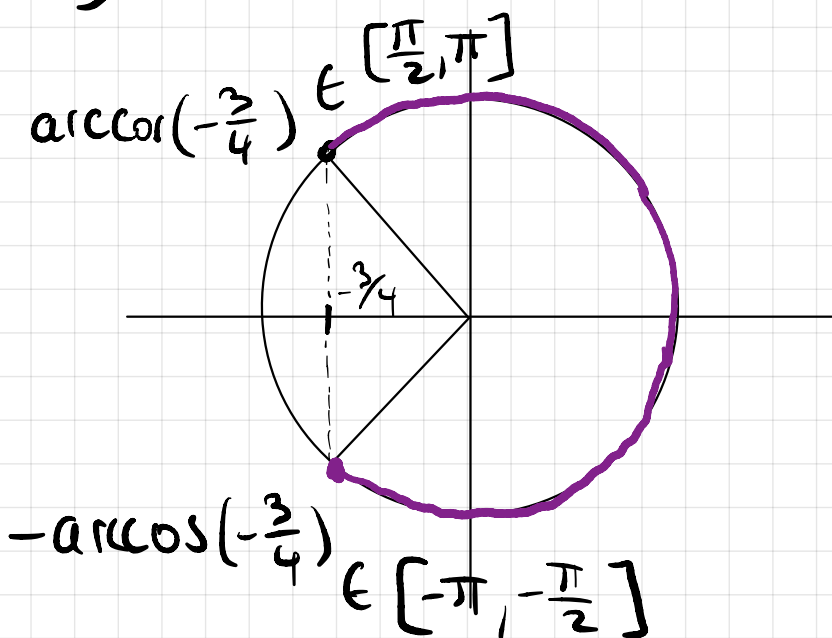
$$-\sin(\arccos(x)) \arccos'(x) = 1$$

$$\downarrow \forall x \in]-1, 1[$$

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ex : Résoudre l'inéquation $\cos(x) \geq -\frac{3}{4}$
sur $\left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$

1) Résoudre sur $\mathbb{R}$



donc $\cos(x) \geq -\frac{3}{4} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tq}$

$$-\arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + k2\pi \leq x \leq \arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + k2\pi$$

2) on cherche les k tq $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$

$$-\arccos\left(-\frac{3}{4}\right) \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \quad \checkmark \quad k=0$$

$$\arccos\left(-\frac{3}{4}\right) \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

donc $\arccos\left(-\frac{3}{4}\right) - 2\pi \in \left[-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right] \quad \checkmark$

Puis on intersecte avec $\left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$

$$S = \left[-\frac{3\pi}{2}, \arccos\left(-\frac{3}{4}\right) - 2\pi\right] \cup \left[-\arccos\left(-\frac{3}{4}\right), -\frac{\pi}{2}\right]$$

$$k=-1$$

$$k=0$$

exemple + troncage :

calculer $\alpha = \arcsin(x) + \arccos(x)$

pour $x \in [-1, 1]$.

1. Localiser α : $\arcsin(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$\arccos(x) \in [0, \pi]$$

$$\text{donc } \alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$$

2. $\sin(\alpha) = ?$ Formule d'addition

$$(\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y))$$

$$\sin(\alpha) = \sin(\overbrace{\arcsin(x)}^x) \cos(\overbrace{\arccos(x)}^x)$$

$$+ \underbrace{\cos(\arcsin(x))}_{\sqrt{1-x^2}} \underbrace{\sin(\arccos(x))}_{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= x^2 + \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-x^2} = x^2 + 1 - x^2 = 1.$$

$$\text{donc } \begin{cases} \sin(\alpha) = 1 \\ \alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{donc } \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2} \quad (\text{angles complémentaires})$$

3.5.3 Arctan & Arc cotg

Def :

 int, ouvert

1) Int. de type $] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi [$

s'appelle une détermination de la tangente

$] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$ = la détermination principale de tan

$\tan :] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [\rightarrow \mathbb{R}$ est bijective

(elle est donc inversible)

2) Int de type $] k\pi, (k+1)\pi [$

s'appelle détermination de la cotangente

et $] 0, \pi [\xrightarrow{\cot} \mathbb{R}$ est bijective
donc inversible.

1') On pose $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$

$x \mapsto y = \arctan(x)$

où $y =$ l'unique arc $\in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$

t.q. $\tan(y) = x$

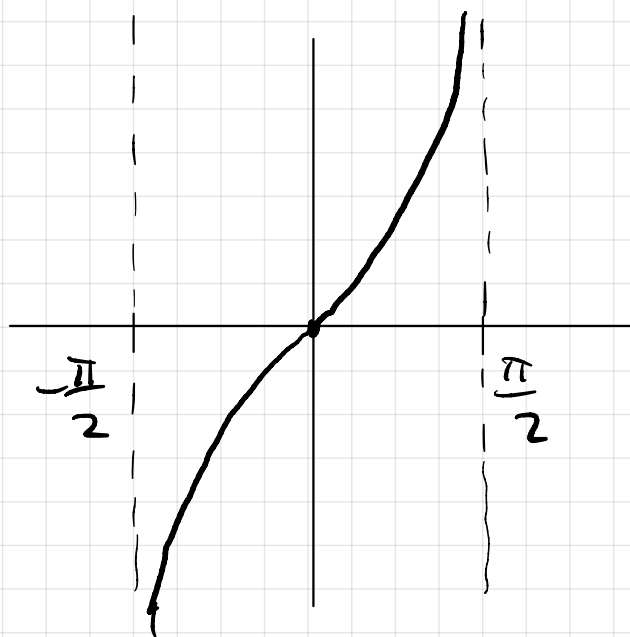
2') On pose $\operatorname{arccotg}: \mathbb{R} \rightarrow]0, \pi[$

$$x \mapsto y = \operatorname{arccotg}(x)$$

y = l'unique arc $\in]0, \pi[$

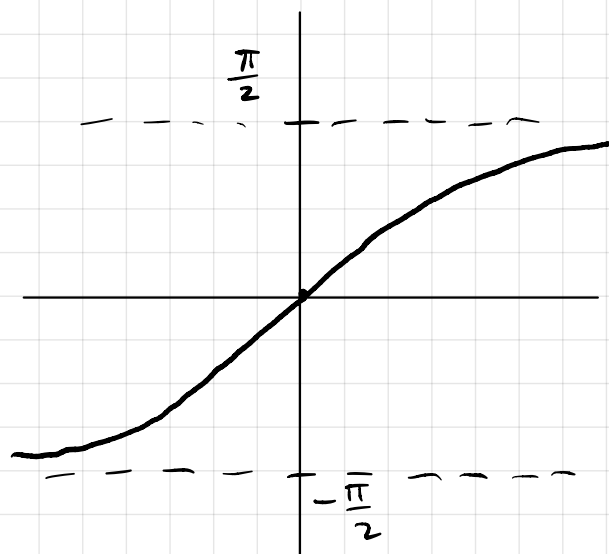
$$\text{b.g. } \cotg(y) = x$$

Graphes pour $\arctan$



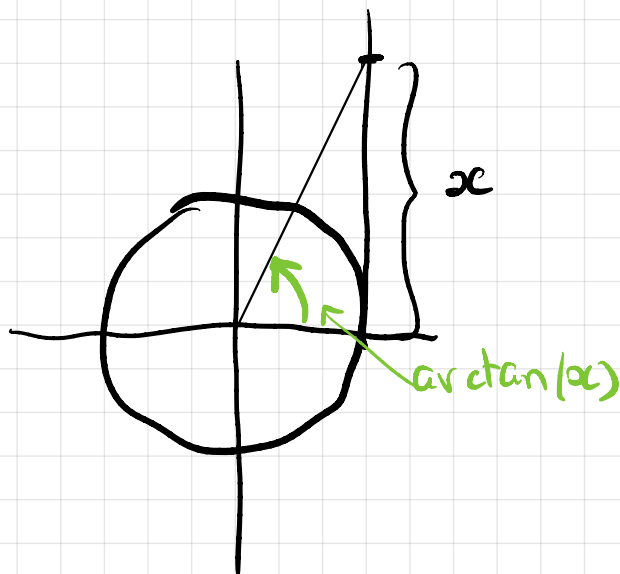
$$y = \tan(x)$$

miroir
 $x=y$



$$y = \arctan(x)$$

Geom:



Propriétés

arctan

$$1) \tan(\arctan(x)) = x$$

$$2) \arctan(\tan(x))$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

$$3) \forall a \in \mathbb{R} \quad \text{on}$$

$$\tan(x) = a \Leftrightarrow x = \arctan(a) + k\pi$$

$$4) \arctan(-x) = -\arctan(x)$$

$$5) \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

arccotg

$$\cotg(\arccotg(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\arccotg(\cotg(x)) = x$$

$$\Leftrightarrow x \in]0, \pi[$$

$$\cotg(x) = a \Leftrightarrow x = \arccotg(a) + k\pi$$

$$\arccotg(-x) = \pi - \arccotg(x)$$

$$\arccotg'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

Val. rem :

$$\arctan(0) = 0$$

$$\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

$$\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pi/6$$

pour trouver
les décimales
de π

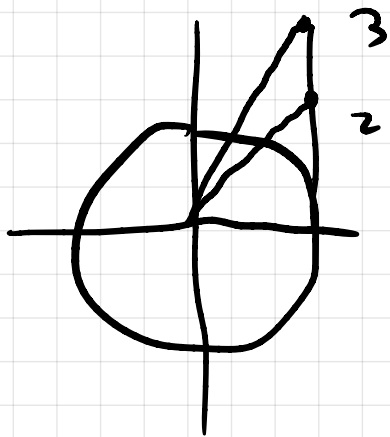
ex: calculer $\Delta = \arctan(2) + \arctan(3)$.

1) localiser Δ .

comme $2, 3 > 0$

$$\arctan(2) \in]0, \frac{\pi}{2}[$$

$$\arctan(3) \in]0, \frac{\pi}{2}[$$



donc

$$\Delta \in]0, \pi[$$

2) calculer $\tan(\Delta)$

$$\tan(\Delta) = \frac{2 + 3}{1 - 2 \cdot 3} = \frac{5}{-5} = -1$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

donc

$$\begin{cases} \Delta \in]0, \pi[\\ \tan(\Delta) = -1 \end{cases} \Rightarrow \Delta = \frac{3\pi}{4}$$

$$\arctan(2) + \arctan(3) = \frac{3\pi}{4}$$