

§ 3.4 Formules trigonométriques

Cours 7
15.04.24

3.4.1: Formules d'addition: (Ptolémée, 150 AD)

Proposition: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$



$$\sin(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta)$$

dém:

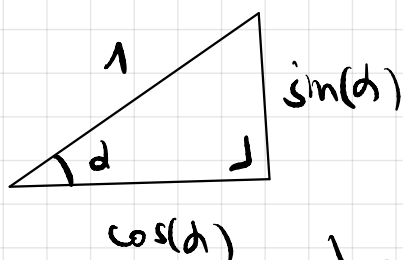
provient du fait que la rotation d'angle α , R_α centrée en $(0,0)$ est linéaire

$$R_\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

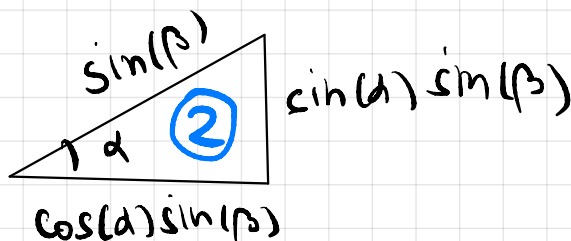
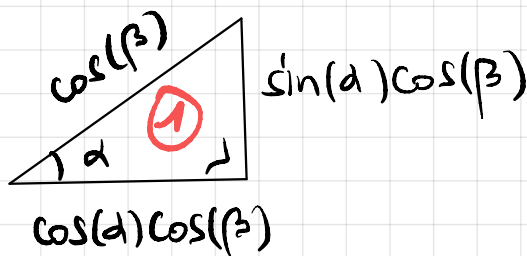
version
algébrique

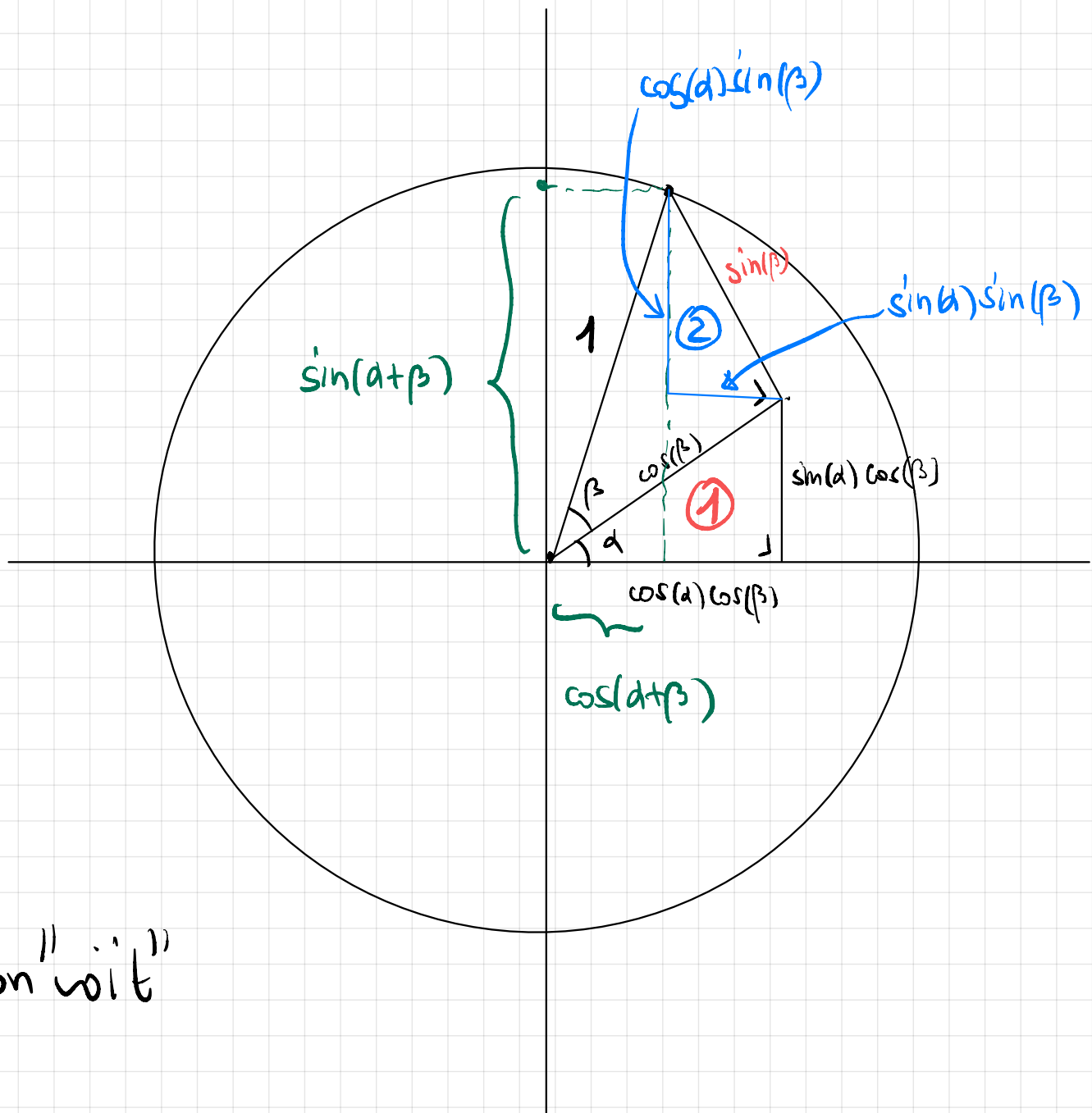
géométriquement:



$\sin(\beta)$

$\cos(\beta)$





on "wit"

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

cqfd.

3.4.2 : Zoo de formules

Bonne nouvelle: il y a un formulaire à l'examen de Analyse A.

I) Formules de soustraction
et formule d'addition pour tan. & cotg.

de ♥ on déduit

$$\begin{aligned}\sin(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha) \overbrace{\sin(-\beta)}^{-\sin(\beta)} + \sin(\alpha) \overbrace{\cos(-\beta)}^{\cos(\beta)} \\ &= \sin(\alpha) \cos(\beta) - \cos(\alpha) \sin(\beta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha) \cos(-\beta) - \sin(\alpha) \sin(-\beta) \\ &= \cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \sin(\beta)\end{aligned}$$

puis si $\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\cos(\alpha) \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cos(\beta)}{\cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)}$$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha) \cos(\beta) \neq 0 &\Rightarrow \frac{\cos(\alpha) \cos(\beta)}{\cos(\alpha) \cos(\beta)} \cdot \frac{\frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)} + \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}{\left(1 - \frac{\sin(\alpha) \sin(\beta)}{\cos(\alpha) \cos(\beta)}\right)}\end{aligned}$$

$$= \frac{\tan(\beta) + \tan(\alpha)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

$$\forall \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\forall \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

et idem

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

et de même pour cotg :

$$\cotg(\alpha + \beta) = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\cotg(\alpha)\cotg(\beta) - 1}{\cotg(\alpha) + \cotg(\beta)}$$

II) Formules de duplication

prendre $\alpha = \beta$ ci-dessus ♥

$$\begin{cases}
 \sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \\
 \cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = \begin{cases} 1 - 2\sin^2(\alpha) \\ 2\cos^2(\alpha) - 1 \end{cases} \\
 \tan(2\alpha) = \frac{2 \tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)} \\
 \cotg(2\alpha) = \frac{\cotg^2(\alpha) - 1}{2 \cotg(\alpha)}
 \end{cases}$$

$\uparrow$
 $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$

III) Formules de bisection

remplacer α par $\frac{\alpha}{2}$ (ci-dessus $\star$)

$$\cos(\alpha) = \begin{cases} 2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1 \\ 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{cases}$$

$$\leadsto \begin{cases} \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 + \cos(\alpha)}{2} \\ \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{2} \end{cases}$$

$$\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}$$

⚠ les formules nous donnent seulement le carré de $\cos(\frac{\alpha}{2})$, donc

$$\cos(\frac{\alpha}{2}) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}}$$

et ensuite on prend $+$ ou $-$ selon si $\frac{\alpha}{2}$ possède un cosinus positif ou négatif.

IV) Formules transto produit $\rightarrow$ somme

♥
♠ donnent :

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ &\quad + \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ &= 2\cos(\alpha)\cos(\beta)\end{aligned}$$

$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$

 a)

$$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2 \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\sin(\alpha) \sin(\beta) = -\frac{1}{2} (\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)) \quad b)$$

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2 \sin(\alpha) \cos(\beta)$$

$$\sin(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} (\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)) \quad c)$$

V) Formules somme $\rightsquigarrow$ produit

Remplacer α par $\frac{\alpha+\beta}{2}$ et β par $\frac{\alpha-\beta}{2}$ (ci-dessus $\uparrow$ IV)

$$a) \Rightarrow \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \frac{1}{2} (\cos(\alpha) + \cos(\beta))$$

$$b) \Rightarrow \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = -\frac{1}{2} (\cos(\alpha) - \cos(\beta))$$

$$\boxed{\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

$$c) \Rightarrow \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \frac{1}{2} (\sin(\alpha) + \sin(\beta))$$

$$\boxed{\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

$$\boxed{\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2 \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

VI) Formules en fonction de $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$$\sin(\alpha) = 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= \frac{2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad \text{si } \frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\sin(\alpha) = 2 \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\left(\text{mais } \cos^2\left(\frac{d}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{d}{2}\right) = 1 \right.$$

$$\cos^2\left(\frac{d}{2}\right) \left(1 + \frac{\sin^2\left(\frac{d}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{d}{2}\right)} \right) = 1$$

$$\cos^2\left(\frac{d}{2}\right) (1 + \tan^2\left(\frac{d}{2}\right)) = 1$$

$$\cos^2\left(\frac{d}{2}\right) = \frac{1}{1 + \tan^2\left(\frac{d}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \sin(d) = \frac{2 \tan\left(\frac{d}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{d}{2}\right)}$$

de même on trouve (grâce à $\cos(d) = \cos^2\left(\frac{d}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{d}{2}\right)$)

$$\cos(d) = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{d}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{d}{2}\right)}$$

et

$$\tan(d) = \frac{2 \tan\left(\frac{d}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{d}{2}\right)}$$

(Fin du zoo auf)

3.4.3 : Calcul de val. de $\cos$, $\sin$

ex: $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = ?$

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 + \cos(\alpha)}{2} \quad \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \pm \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}}$$

mais $\frac{\pi}{8} \in I^e$ cadran donc $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}}$$

ex: $\frac{\alpha}{3} - \frac{\beta}{4} = \frac{4\pi}{12} - \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \underset{\uparrow}{=} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$$

$$\left(\text{autre façon: } \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1+\cos(\frac{\pi}{6})}{2} \right)$$

3.4.4. Factorisation d'équations ^{trig.} simples

ex: Résoudre en $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin(5x) - \sin(x) \stackrel{*}{=} \cos(3x)$$

$$\text{Vc)} \Rightarrow \sin(5x) - \sin(x) = 2 \cos\left(\frac{5x+x}{2}\right) \sin\left(\frac{5x-x}{2}\right)$$

$$\left(\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \right)$$

$$= 2 \cos(3x) \sin(2x)$$

$$* \Rightarrow 2 \cos(3x) \sin(2x) = \cos(3x)$$

$$\Leftrightarrow \cos(3x) (2 \sin(2x) - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(3x) = 0 \\ \text{ou} \\ 2\sin(2x) - 1 = 0 \end{cases} \begin{cases} \cos(3x) = 0 & \text{a)} \\ \text{ou} \\ \sin(2x) = \frac{1}{2} & \text{b)} \end{cases}$$

$$\text{a)} \Leftrightarrow \cos(3x) = 0 \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$S_a = \left\{ \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\text{b)} \sin(2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ \text{ou} \\ \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$$

$$S_b = \left\{ \frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$S = S_a \cup S_b = \left\{ \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{12} + k'\pi, \frac{5\pi}{12} + k''\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

k'
 k''

3.4.5. (In)equations trigo. linéaires

But: Résoudre qqch de la forme

$$a \cos(x) + b \sin(x) = c$$

ex (simple)

$$\frac{1}{2} \cos(x) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{observer: } \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos(x) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\heartsuit \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\begin{array}{l} \text{eq simple en sin} \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi}{6} + x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ \text{ou} \\ \frac{\pi}{6} + x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array} \right. \quad k \in \mathbb{Z} \end{array}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{12} + k2\pi, \frac{7\pi}{12} + k2\pi \right\} \\ k \in \mathbb{Z}$$

ex 2: Résoudre pour $x \in]-4\pi, \pi[$

l'équation $\cos(x) + \sin(x) > 1$

Plus généralement comment résoudre

$$a \cos(x) + b \sin(x) \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} c \quad ?$$

1) Normalisation: on divise par $\sqrt{a^2+b^2}$ de chaque côté

$$2) \underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{[-1,1]} \cos(x) + \underbrace{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{[-1,1]} \sin(x) \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{et} \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1$$

3) si $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \in [-1,1]$ on peut résoudre le problème.

$$\left(\begin{array}{l} \text{car dans ce cas } \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin(\delta) \\ \text{pour un certain } \delta \end{array} \right)$$

4) on cherche α t.q. $\sin(\alpha) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

et t.q. $\cos(\alpha) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

5) on récrit $\sin(\alpha+x)$

$$\sin(\alpha) \cos(x) + \cos(\alpha) \sin(x) \stackrel{<}{=} \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

6) on cherche δ t.q. $\sin(\delta) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

7) on résoud ⁽ⁱⁿ⁾ l'eq. trig. simple:

$$\sin(\alpha+x) \stackrel{<}{=} \sin(\delta)$$

ex 2: $\cos(x) + \sin(x) > 1$ sur $] -4\pi, -\pi[$

1) $1 \cdot \cos(x) + 1 \cdot \sin(x) > 1$ $a=b=c=1$

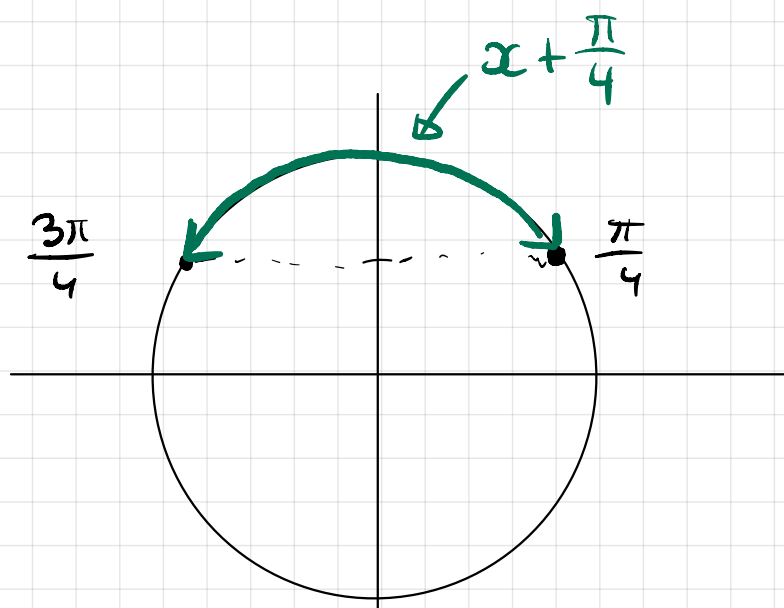
$\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}} \downarrow$ $\frac{1}{\sqrt{2}} \cos(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(x) > \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos(x) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin(x) > \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$



$\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) > \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Desun:



$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + k2\pi < x + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4} + k2\pi$

$\Leftrightarrow k2\pi < x < \frac{\pi}{2} + k2\pi$

ens. sol. sur $\mathbb{R}$: $E = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]k2\pi, \frac{\pi}{2} + k2\pi[$

$$S = E \cap]-4\pi, -\pi[= \underbrace{]-4\pi, -\frac{7\pi}{2}[}_{k=-2} \cup \underbrace{]-2\pi, -\frac{3\pi}{2}[}_{k=-1}$$

prendre: $k = -2$
et $k = -1$

(dès que $k \geq 0$ on sort de l'intervalle $]-4\pi, -\pi[$)

fin #7

Conseils série 7:

ex1: exprimer $d = d_1 + d_2$
 $d = \frac{d_1}{2}$

avec d_i
remarquable

ex2: Faites a), b) c) d) + longs
utiliser $\sin(\alpha) + \sin(\beta) = \dots$

ex4: a) ✓
⚠ b) sur l'intervalle $(5\pi, 6\pi]$

ex5) b) Plus long ⚠

ex7) Pour les plus balèzes.