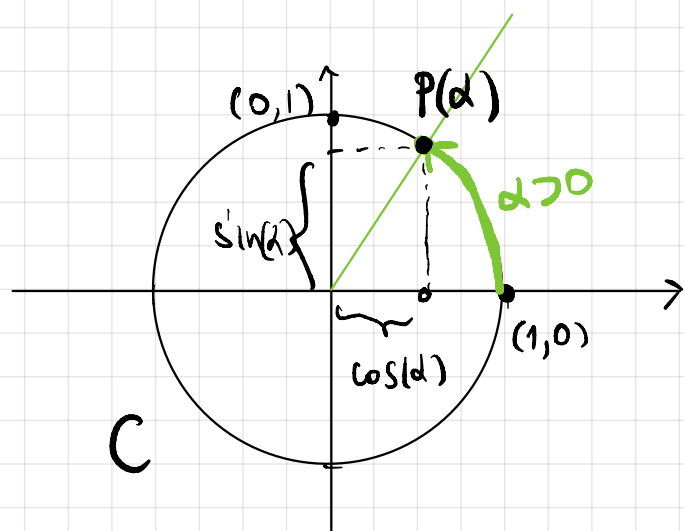


Chap. 3: Trigonométrie

Cours 6

8.01.24

Rappels 3.1-3.2



$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

permet de définir
2 fonctions 2π -périodiques

$$\cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\alpha \mapsto \cos(\alpha)$$

$$\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\alpha \mapsto \sin(\alpha)$$

$$\text{où } P(\alpha) = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$$

Rem: les fonct. $\cos$ et $\sin$

1) sont déf sur $\mathbb{R}$: $D_{\cos} = D_{\sin} = \mathbb{R}$

2) ne sont pas injectives (pas du tout)

$$(\cos(\alpha) = \cos(\beta) \not\Rightarrow \alpha = \beta)$$

car elles sont 2π -périodiques

$$\cos(\alpha + 2\pi k) = \cos(\alpha)$$

$$\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin(\alpha)$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}$$

3) ne sont pas monotones

$$\alpha < \beta \not\Rightarrow \cos(\alpha) < \cos(\beta)$$

(idem pour $\sin$)

4) ne sont pas surjectives

$$-1 \leq \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \leq 1$$

(p. ex: $\cos(\alpha^{III}) - \alpha^{IIII} = \sqrt{2}$)

↑
pas de sol.

5) cos est paire

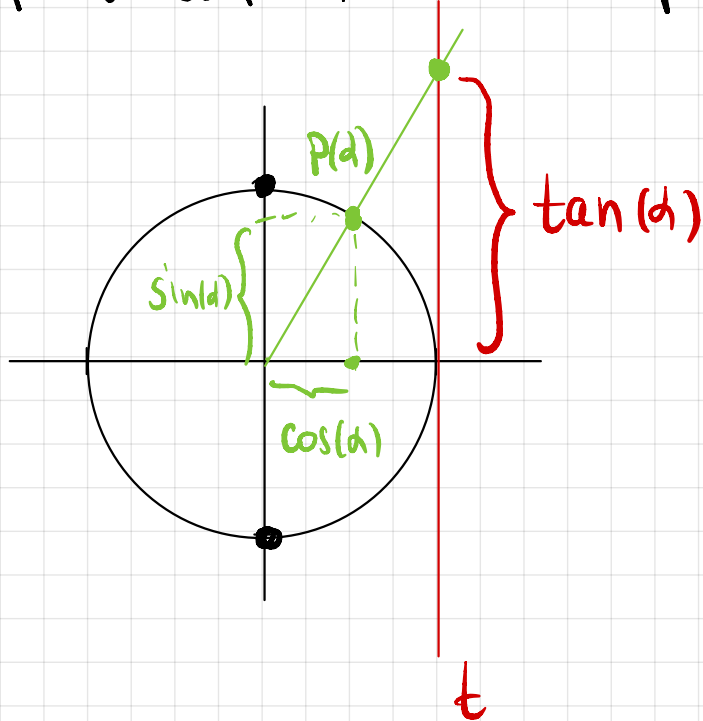
$$\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$$

sin est impaire

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Puis pour $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ càd $P(\alpha) \neq (0, \pm 1)$
on peut définir $\tan(\alpha)$ par



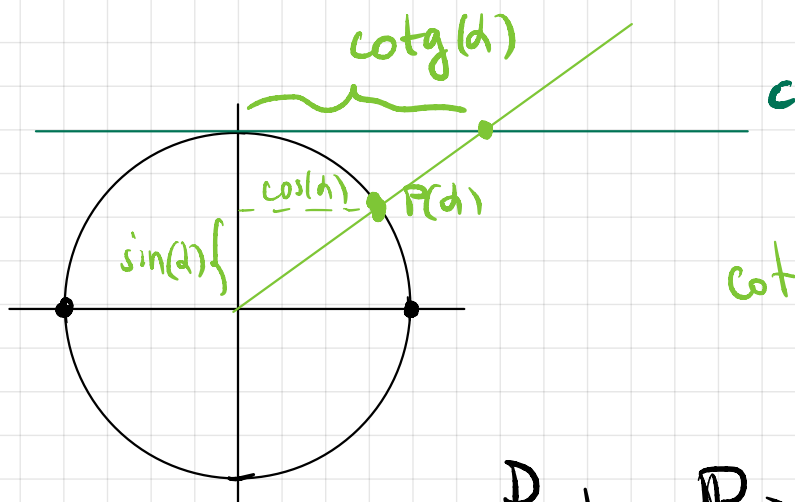
Partholès

$$\frac{\tan(\alpha)}{1} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

$$D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

De façon analogue $\forall \alpha \neq k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

càd $P(\alpha) \neq (\pm 1, 0)$ on peut définir $\cotg(\alpha)$



$$\cotg(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

$$D_{\cotg} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

Rem: ces fonch.

- 1) ne sont pas injectives (elles sont π -périodiq.)
- 2) sont surjectives
- 3) mais elles ne sont pas monotones

Autres propriétés et val. remarquables

- $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$
 $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$ (angles supplémentaires)
- $\cos(\alpha + \pi) = -\cos(\alpha)$
 $\sin(\alpha + \pi) = -\sin(\alpha)$ (angles opposés)
- $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin(\alpha)$
 $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos(\alpha)$ (angles complémentaires)

Val. rem. dans le premier quadr.

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(\alpha)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	ND
$\cotg(\alpha)$	ND	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

ND = non déf.

NB: $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

3.3 Les 4 eq. trig. elem.

3.3.1 $\cos(x) = a$

1) admet (une infinité) de solutions $\Leftrightarrow a \in [-1, 1]$

2) $D_{\text{def}} = \mathbb{R}$

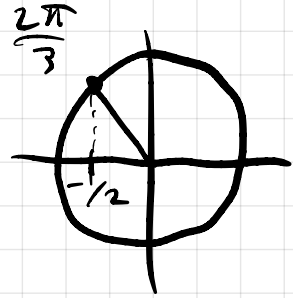
3) on cherche un angle $\alpha \in \mathbb{R}$ t.q. $\cos(\alpha) = a$

4) on résoud $\cos(x) = \cos(\alpha)$ comme suit

$$\cos(x) = \cos(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2\pi k & k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = -\alpha + 2\pi k' & k' \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ex 1: Résoudre $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ pour $x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \cos(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$



$$\Leftrightarrow x = \begin{cases} \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k', & k' \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$S = \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k' \mid k' \in \mathbb{Z} \right\}$$

ex 2: $\cos(3x) = \frac{1}{2}$ pour $x \in \mathbb{R}$

$$y = 3x, \quad \cos(y) = \frac{1}{2}, \quad \cos(y) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow y = \begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \quad \boxed{y = 3x}$$

$$x = \begin{cases} \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} k \\ -\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

ex 2⁺) Résoudre $\cos(3x) = \frac{1}{2}$
pour $x \in [0, 2\pi]$

on a trouvé $S = \left\{ \pm \frac{\pi}{3} + k \frac{2\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

et on doit faire $S \cap [0, 2\pi]$

Pour $x = \frac{\pi}{3} + k \frac{2\pi}{3}$, si $k < 0$ on a $x < 0$

$k=0$ $\frac{\pi}{3}$ ✓

$k=1$ $\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{9}$ ✓ $\in [0, 2\pi]$

$k=2$ $\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = \frac{13\pi}{9}$ ✓ $\in [0, 2\pi]$

$k=3$ $\frac{\pi}{3} + 2\pi > 2\pi$ ✗

Pour $x = -\frac{\pi}{3} + k \frac{2\pi}{3}$, si $k < 0$ on a $x < 0$

$k=0$ $-\frac{\pi}{3} < 0$ ✗

$k=1$ $-\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$ ✓

$k=2$ $-\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = \frac{3\pi}{3} = \pi$ ✓

$k=3$ $-\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$ ✓

$k=4$ $-\frac{\pi}{3} + \frac{8\pi}{3} = \frac{7\pi}{3} > 2\pi$ ✗

Donc $S = \left\{ \frac{\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}, \frac{7\pi}{9}, \frac{11\pi}{9}, \frac{13\pi}{9}, \frac{17\pi}{9} \right\}$

6 solutions.

ex 3: $\cos(2x) = \frac{1}{2}$ pour $x \in [-4\pi, -3\pi]$

sol générale $x = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + k\pi \\ -\frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

But: trouver $k \in \mathbb{Z}$ tq $x \in [-4\pi, -3\pi]$
↖ largeur π

• $\frac{\pi}{6} \in [0, \pi]$ et donc

$\frac{\pi}{6} - 4\pi \in [-4\pi, -3\pi]$ ✓ ($k = -4$)

• $-\frac{\pi}{6} \in [-\pi, 0]$ et donc

$-\frac{\pi}{6} - 3\pi \in [-4\pi, -3\pi]$ ✓ ($k = -3$)

or $\frac{\pi}{6} - 4\pi = -\frac{23\pi}{6}$

$-\frac{\pi}{6} - 3\pi = -\frac{19\pi}{6}$

$S = \left\{ -\frac{23\pi}{6}, -\frac{19\pi}{6} \right\}$

3.3.2 l'(in) equation $\sin(x) = a$

1) possède une infinité de sol. $\Leftrightarrow a \in [-1, 1]$
(pas de sol. sinon)

2) $D_{\text{def}} = \mathbb{R}$

3) On cherche un α t.q. $\sin(\alpha) = a$ et

4) $\sin(x) = \sin(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2\pi k \\ \text{ou} \\ x = \pi - \alpha + 2\pi k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

ex : on peut aussi résoudre des inéquations simples :

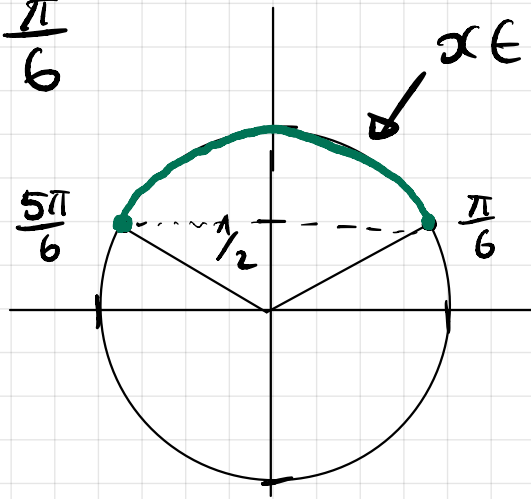
$$\sin(x) \geq \frac{1}{2}$$

démarche : 1) trouver α t.q. $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}$

2) trouver (graphiquement) tous les x
t.q. $\sin(x) \geq \sin(\alpha)$ sur le cercle C

3) Faire tourner (i.e. ajouter $2\pi k$) les solutions
trouvées en 2).

p.ex $a = \frac{\pi}{6}$ $x \in [0, 2\pi]$ t.q. $\sin(x) \geq \frac{1}{2}$



donc $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$

puis on fait tourner de $2\pi k$

donc $x \in S \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ t.q.

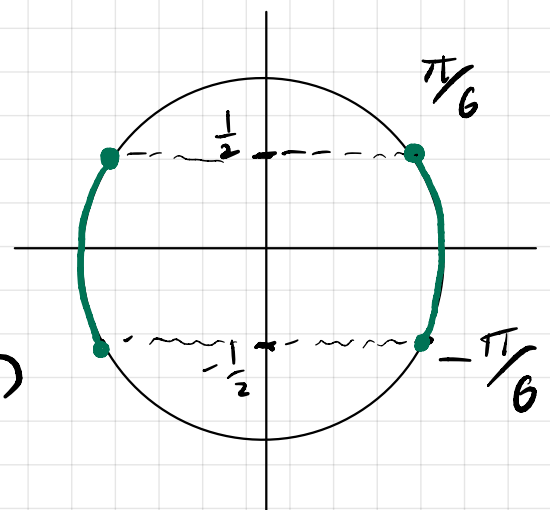
$$\frac{\pi}{6} + k2\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + k2\pi$$

$$S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{6} + k2\pi, \frac{5\pi}{6} + k2\pi \right]$$

ex + résoudre $|\sin(x)| \leq \frac{1}{2}$ $\swarrow$ sur $\mathbb{R}$ càd $|\sin(x)| \leq \sin(\frac{\pi}{6})$

val. abs. $\Rightarrow$
$$\begin{cases} \sin(x) \leq \frac{1}{2} \\ \text{et} \\ \sin(x) \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

sur $\mathbb{C}$



sol. "évidentes" $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ et on fait tourner de $k\pi$

$$S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right]$$

ex + t : résoudre $|\sin(x)| \leq \frac{1}{2}$ sur $[0, 2\pi]$

$$S \cap [0, 2\pi] = \underbrace{\left[0, \frac{\pi}{6}\right]}_{k=0 \text{ (et on jette } < 0)} \cup \underbrace{\left[\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]}_{k=1} \cup \underbrace{\left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right]}_{k=2 \text{ (et on jette } > 2\pi)}$$

3.3.3 l'eq. $\tan(x) = a$

1) a tjrs une infinité de sol. $\forall a \in \mathbb{R}$

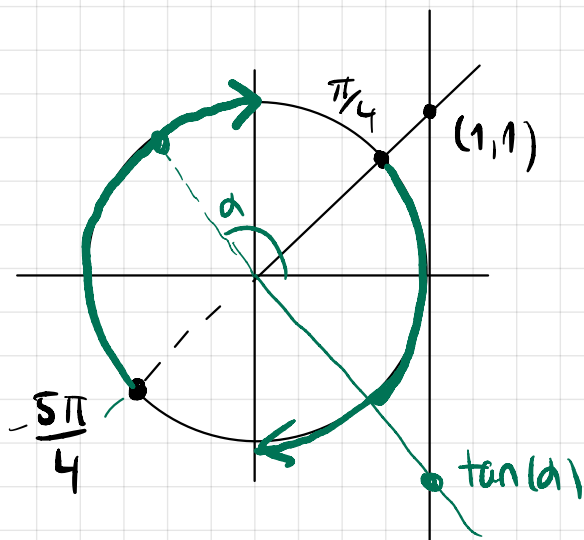
$$2) D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

3) chercher $\alpha \in \mathbb{R}$ t.q. $\tan(\alpha) = a$

$$4) \tan(x) = \tan(\alpha) \iff x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

ex: Rés. $\tan(3x) \leq 1$ sur $\mathbb{R}$

Posons $y = 3x$, $\tan(y) \leq \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$



On remarque que

$$\forall y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right]$$

on a $\tan(y) \leq 1$

et comme

$$\tan(y + \pi k) = \tan(y)$$

on a se $\forall y \in \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, -\frac{\pi}{4} + k\pi\right]$ $k \in \mathbb{Z}$

vérifiant $\tan(y) \leq 1$.

$$\tan(3x) \leq 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tq}$$

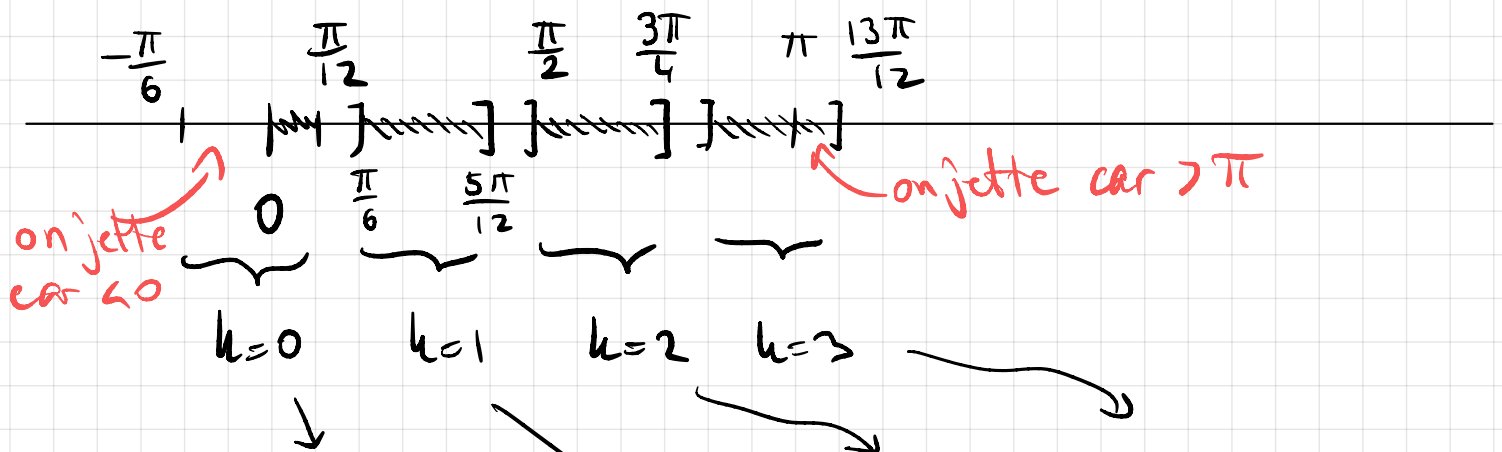
$$-\frac{\pi}{2} + k\pi < 3x \leq \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\div 3 \downarrow -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} < x \leq \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}$$

$$S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}\right]$$

ext résoudre $\tan(3x) \leq 1$ sur $[0, \pi]$

on doit faire $S \cap [0, \pi]$ (dans le pdf sur $[0, 2\pi]$)



$$S_+ = \left[0, \frac{\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$$

3.3.4 L'équat. $\cotg(x) = a$

1) a tjrs une ∞ -té de sol. $\forall a \in \mathbb{R}$

$$2) D_{\cotg} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

3) chercher α t.g $\cotg(\alpha) = a$

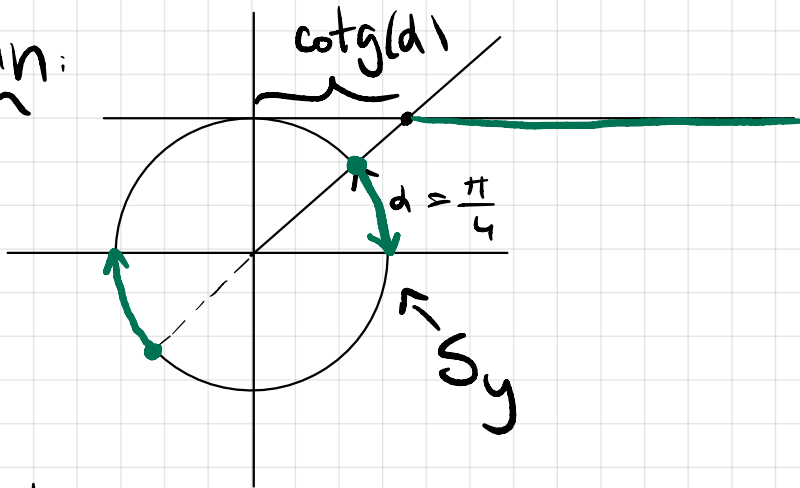
$$4) \boxed{\cotg(x) = \cotg(\alpha) \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}}$$

ex 1 : $\cotg(y) = 1 \quad \cotg(y) = \cotg(\frac{\pi}{4})$

$\Leftrightarrow y = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

ex 1⁺ : $\cotg(4x) \geq 1 \quad y = 4x \quad \cotg(y) \geq 1$

Dessin:



$\cotg(y) \geq 1 \quad \Leftrightarrow 0 + k\pi < y \leq \frac{\pi}{4} + k\pi$

$k\pi < 4x \leq \frac{\pi}{4} + k\pi$

$k \frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{16} + k \frac{\pi}{4}$

$S_x = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]k \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{16} + k \frac{\pi}{4}]$

$S_x \cap [0, \pi] = \underbrace{]0, \frac{\pi}{16}]}_{k=0} \cup \underbrace{]\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{16}]}_{k=1} \cup \underbrace{]\frac{\pi}{2}, \frac{9\pi}{16}]}_{k=2}$

$\cup \underbrace{]\frac{3\pi}{4}, \frac{13\pi}{16}]}_{k=3} \cup \underbrace{]\pi, \frac{17\pi}{16}]}_{k=4}$ > π

