

2.5 Racines & in(eguations)

25.03.24

Cours 5

radicielles

2.5.1 Racines positives (arithmétiques)

Déf: $a \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N} - \{0\}$

Alors, il existe un unique $x \in \mathbb{R}_+$

t.q. $x^n = a$.

(grâce à un théorème

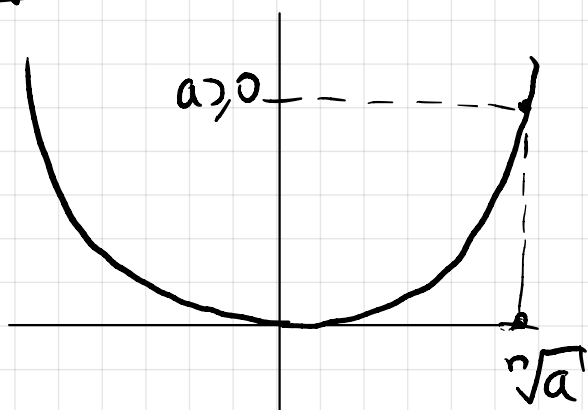
" $\mathbb{R}$ est complet")

Ce x s'appelle

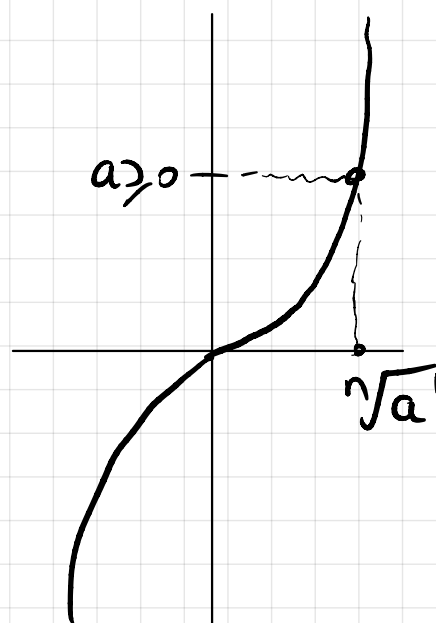
la racine n-ème positive de a et noté $\sqrt[n]{a} = x$

Graph:

$$y = x^n$$



n pair



n impair

ex: $\sqrt[10]{1024} = 2$, $\sqrt[12]{-10}$ pas défini.

⚠ le symbole $\sqrt[n]{}$ est exclus, réservé
à la racine n^{ème} positive $\in \mathbb{R}$

Propriétés: $a, b \in \mathbb{R}_+$ $m, n \in \mathbb{N} - \{0\}$

0) $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

1) $(\sqrt[n]{a})^n = a = \sqrt[n]{a^n}$ (par def et car $a \geq 0$)

2) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$

(provient de $(a^n)^m \stackrel{*}{=} a^{nm}$)

3) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$

(provient de $(ab)^n = a^n b^n$)

4) $\sqrt[m]{a^n} = (\sqrt[m]{a})^n$ (provient de $*$)

Rem/Not: les racines sont des puissances
rationnelles:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \text{ et + généralement}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

ex: $\sqrt[4]{7^3} = 7^{\frac{3}{4}}$

en effet :

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n} \cdot n} = a^1 = a$$

$$\text{donc } a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

Rappel : si $a \neq 0$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$(a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1)$$

et donc on peut définir des puissances rationnelles y compris négatives

$$a^{\frac{m}{n}}$$

$$\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$$

$$a > 0$$

et donc on a les règles de puissances

$$a > 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} a^p \cdot a^q = a^{p+q} \\ (a^p)^q = a^{pq} \end{array} \right. \quad \forall p, q \in \mathbb{Q}$$

ex: $7^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{7^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{7^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{7^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{7}}$

$$= \frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{7^3}} = \frac{\sqrt[3]{7}}{7}$$

⚠ ($\sqrt{\quad} = \sqrt[2]{\quad}$)

$\sqrt{x^2} \neq x$ en général car x n'est pas forcément positif.

en fait $\sqrt{x^2} = |x|$

(car $\sqrt{\quad}$ est positive par def.)

(et + général.

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a| & \text{si } n \text{ pair} \\ a & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

2.5.2 Racines réelles

Soit $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ (un corps comm.)

Déf: soit $a \in K$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Un $x \in K$ est une racine n^{ème} de a
si x vérifie $x^n = a$.

ex: dans $\mathbb{R}$

- 8 et -8 sont les 2 racines carrées de 64
- -3 est la racine cubique de -27
- 2 et -2 sont racines 4^{èmes} de 16
- -16 ne possède pas de racines dans $\mathbb{R}$.
(mais dans $\mathbb{C}$)
oui

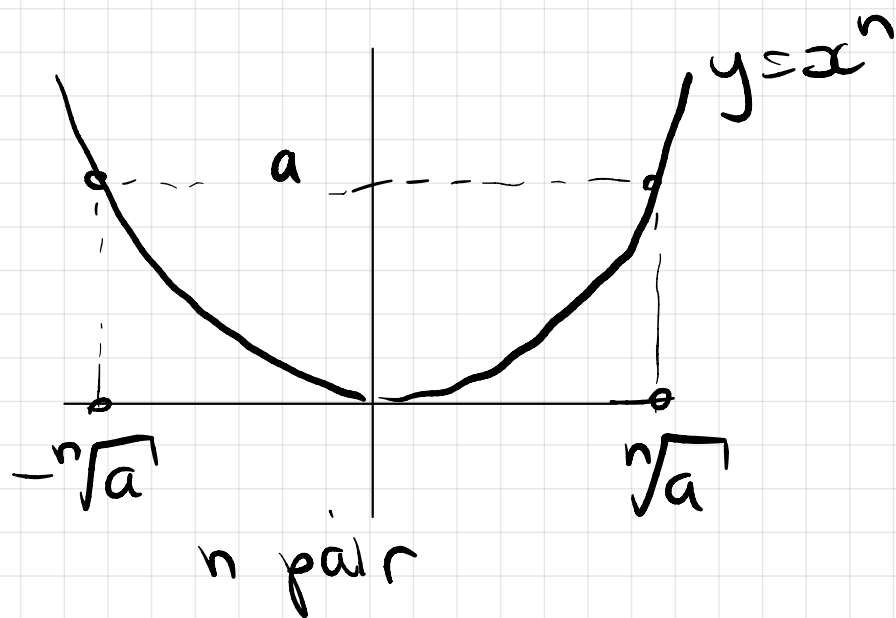
Discussion des solutions de $x^n = a$ dans $\mathbb{R}$:

- n pair : la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^n$
est paire

càd $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(symétrie axiale d'axe $x=0$)

en particulier f n'est pas bijective



$$S = \left\{ \pm \sqrt[n]{a} \right\} \quad \text{si } a > 0$$

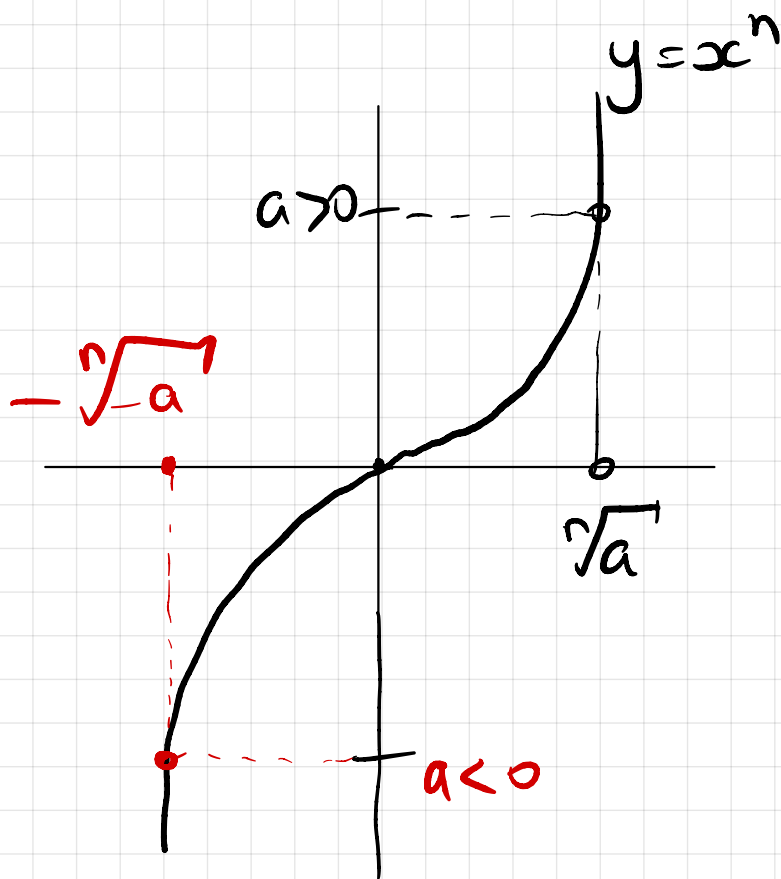
$$S = \{0\} \quad \text{si } a = 0$$

$$S = \emptyset \quad \text{si } a < 0$$

• n impair: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est impaire
 $x \mapsto x^n$

càd $(f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R})$

(f possède une symétrie centrale
de centre $(0,0)$)



$$S = \{\sqrt[n]{a}\} \text{ si } a \geq 0$$

$$S = \{-\sqrt[n]{-a}\} \text{ si } a < 0$$

en effet $(-\sqrt[n]{-a})^n = (-1)^n (\sqrt[n]{-a})^n$

$$= (-1)^n (-a) \underset{\substack{\uparrow \\ n \text{ impair}}}{=} (-1) \cdot (-a) = a$$

ex: $x^6 = 64$ 2 sol. $S = \{-2, 2\}$

$x^7 = -128$ 1 sol $S = \{-2\}$ $\sqrt[6]{64}$ et $-\sqrt[6]{64}$

Notation : Si $a < 0$ et n impair
on peut poser $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{-a}$

Propriétés de $\sqrt[n]{}$ et $()^n$ p.r. $a \in \mathbb{R}$

1) Si $a \in \mathbb{R}$, alors $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ on a

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{si } n \text{ impair} \\ |a| & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

2) Si $a, b \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ pair
alors

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow a^n = b^n$$

(marche aussi si a et b sont tous les 2 négatifs)

$$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a < b \Leftrightarrow a^n < b^n$$

car $\sqrt[n]{}$ et $()^n$ sont des fonch
strictement croissantes sur $\mathbb{R}_+$ n pair

3) si $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ impair
alors

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow a^n = b^n$$

$$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a < b \Leftrightarrow a^n < b^n$$

car $\sqrt[n]{}$ et $()^n$ sont des fonch
strict. croissantes sur $\mathbb{R}$ $(n \text{ impair})$

2.5.3 (in)Equations radicielles (aka irrationnelles)

But: Résoudre des (in)équations du type

$$\sqrt[n]{f(x)} \stackrel{*}{=} g(x)$$

f, g des
fonctions
réelles

⚠ au D_{def} de $*$: on doit considérer $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq 0\}$

⚠ $f(x) = g^2(x)$ équivaut à $*$ seulement si $g(x) \geq 0$ (car $\sqrt{f(x)} \geq 0$ per def)

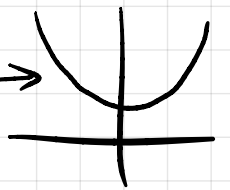
Prop: $f, g: D_{\text{def}} \rightarrow \mathbb{R}$, alors $\forall x \in D_{\text{def}}$
on a

$$\sqrt{f(x)} \stackrel{*}{=} g(x) \iff \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ \text{et} \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$$

ex: $\sqrt{x^2 - 3x + 6} \stackrel{*}{=} 4x - 6$

$$D_{\text{def}} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 6 \geq 0\} = \mathbb{R}$$

$\uparrow \Delta < 0$



$$D_{\text{pos}} = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 4x - 6 \geq 0\}$$

$$= \left[\frac{3}{2}, +\infty \right[$$

sous cette cond. on peut élever au carré *

$$* \Leftrightarrow x^2 - 3x + 6 = (4x - 6)^2 = 16x^2 - 48x + 36$$

$$\Leftrightarrow 15x^2 - 45x + 30 = 0$$

$$\Leftrightarrow 15 \underbrace{(x^2 - 3x + 2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow 15(x-1)(x-2) = 0$$

$$S_{\text{partielle}} = \{1, 2\}$$

$$S = D_{\text{def}} \cap D_{\text{pos}} \cap S_{\text{partielle}} = \{2\}.$$

ex: Rés. en $x \in \mathbb{R}$ l'éq. $\star_m$

$$\sqrt{x+m^2} = x+m \quad \text{en fonction de } m$$

$\star_m$

$$\begin{aligned} D_{\text{def}} &= \{x \in \mathbb{R} \mid x+m^2 \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -m^2\} = [-m^2, +\infty[\end{aligned}$$

$$D_{\text{pos}} = \{x \in \mathbb{R} \mid x+m \geq 0\} = [-m, +\infty[$$

élever au carré $\star_m$:

$$x+m^2 = (x+m)^2$$

$$\Leftrightarrow x+m^2 = x^2 + 2mx + m^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (2m-1)x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x + 2m - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = 1 - 2m \end{cases}$$

• Pour $x=0$ on a

$$1) \quad 0 \stackrel{?}{\in} D_{\text{def}} = [-m^2, +\infty[$$

$$\text{donc } \boxed{0 \in D_{\text{def}} \quad \forall m \in \mathbb{R}}$$

$$2) \quad 0 \stackrel{?}{\in} D_{\text{pos}} = [-m, +\infty[$$

$$0 \in [-m, +\infty[\Leftrightarrow -m \leq 0$$

$$\Leftrightarrow m \geq 0$$

$$\text{donc } \boxed{0 \in D_{\text{pos}} \quad \forall m \geq 0}$$

• Pour $x=1-2m$ on a

$$1) \quad 1-2m \in [-m^2, +\infty[\Leftrightarrow 1-2m \geq -m^2$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 \geq 0$$

$$\text{donc } \boxed{1-2m \in D_{\text{def}} \quad \forall m \in \mathbb{R}}$$

$$2) 1-2m \in [-m, +\infty[$$

$$\Leftrightarrow 1-2m \geq -m$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq m$$

$$\text{donc } 1-2m \in D_{\text{pos}} \Leftrightarrow m \leq 1.$$

En résumé on a trouvé:

- si $m < 0$ alors $0 \notin D_{\text{pos}}$, $1-2m \in D_{\text{pos}}$

$$\text{donc } S = \{1-2m\}$$

- $0 \leq m \leq 1$ alors $0 \in D_{\text{pos}}$, $1-2m \in D_{\text{pos}}$

$$\text{donc } S = \{0, 1-2m\}$$

- $m > 1$ alors $0 \in D_{\text{pos}}$, $1-2m \notin D_{\text{pos}}$

$$\text{donc } S = \{0\}.$$

$$S = \begin{cases} \{1-2m\} & \text{si } m < 0 \\ \{0, 1-2m\} & \text{si } 0 \leq m \leq 1 \\ \{0\} & \text{si } m > 1. \end{cases}$$

Inéquations radicales

Prop: $f, g: D_{\text{def}} \rightarrow \mathbb{R}$, alors

$$1) \sqrt{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ \text{et} \\ f(x) \leq g^2(x) \end{cases}$$

$$2) \sqrt{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) < 0 \\ \text{ou} \\ g(x) \geq 0 \text{ et } f(x) \geq g^2(x) \end{cases}$$

ex: $\sqrt{6-x} \leq 3+2x$ $D_{\text{def}} =]-\infty, 6]$

sous D_{pos} on peut
élever au carré:

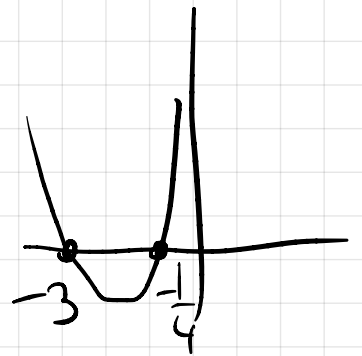
$$D_{\text{pos}} = \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right[$$

$$6-x \leq (3+2x)^2 = 9+12x+4x^2$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 13x + 3 \geq 0$$

$$(4x+1)(x+3) \geq 0$$

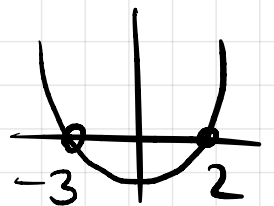
$$S_{\text{partielle}} =]-\infty, -3] \cup \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right[$$



$$S = S_{\text{part}} \cap D_{\text{def}} \cap D_{\text{pos}} = \left[-\frac{1}{4}, 6\right].$$

ex: $\sqrt{-x^2-x+6} \geq x+1$

$$D_{\text{def}} = \{x \in \mathbb{R} \mid -x^2-x+6 \geq 0\}$$



$$x^2+x-6 \leq 0 \quad \Leftrightarrow (x+3)(x-2) \leq 0$$

$$D_{\text{def}} = [-3, 2].$$

$$D_{\text{pos}} = \{x \in \mathbb{R} \mid x+1 \geq 0\} = [-1, +\infty[$$

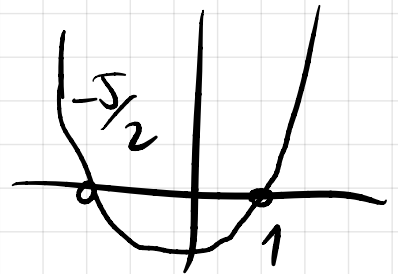
sur D_{pos} on a l'équiv.

$$\sqrt{-x^2-x+6} \geq x+1 \quad \Delta \neq 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} 1) x+1 < 0 \quad S_1 \\ \text{ou} \\ 2) x+1 \geq 0 \text{ et } -x^2-x+6 \geq (x+1)^2 \end{array} \right.$$

$$2) -x^2-x+6 \geq x^2+2x+1$$

$$2x^2+3x-5 \leq 0$$

$$(2x+5)(x-1) \leq 0$$



$$S_{\text{part.}} = [-5/2, 1].$$

$$S = (S_1 \cup \underbrace{(S_{\text{part.}} \cap [-1, +\infty[) }_{D_{\text{pos}}}) \cap \underbrace{[-3, 2] }_{D_{\text{def}}})$$

$$= (]-\infty, -1[\cup [-1, 1]) \cap [-3, 2]$$

$$= [-3, 1].$$

Dernier exemple :

$$\sqrt{x^2 - |3x+4|} \leq x-2 \quad \text{😊}$$

$$D_{\text{def}} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - |3x+4| \stackrel{?}{\geq} 0\}$$

$$? \Leftrightarrow |3x+4| \leq x^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+4 \leq x^2 \\ \text{et} \\ 3x+4 \geq -x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 4 \geq 0 & (x-4)(x+1) \geq 0 \\ \text{et} \\ x^2 + 3x + 4 \geq 0 & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$\nwarrow \Delta < 0$

$$D_{\text{def}} =]-\infty, -1] \cup [4, +\infty[$$

$$D_{\text{pos}} = [2, +\infty[$$

② donne $x^2 - |3x+4| \leq (x-2)^2$

$$x^2 - |3x+4| \leq x^2 - 4x + 4$$

$$\Leftrightarrow |3x+4| \geq 4x-4$$

Sol $\Rightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+4 \geq 4x-4 \\ \text{ou} \\ 3x+4 \leq -4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 8 \\ \text{ou} \\ x \leq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow]-\infty, 8] = S_{\text{②}}$$

$$S = S_{\text{②}} \cap D_{\text{pos}} \cap D_{\text{def}} =$$

$$=]-\infty, 8[\cap [2, +\infty[\cap (]-\infty, -1] \cup [4, +\infty[)$$

$$= [2, 8] \cap (\dots) = [4, 8].$$

(Bonnes vacances de Pâques)

Fin