

§ 2.4 Valeur absolue

18.03.2024

Cours 4

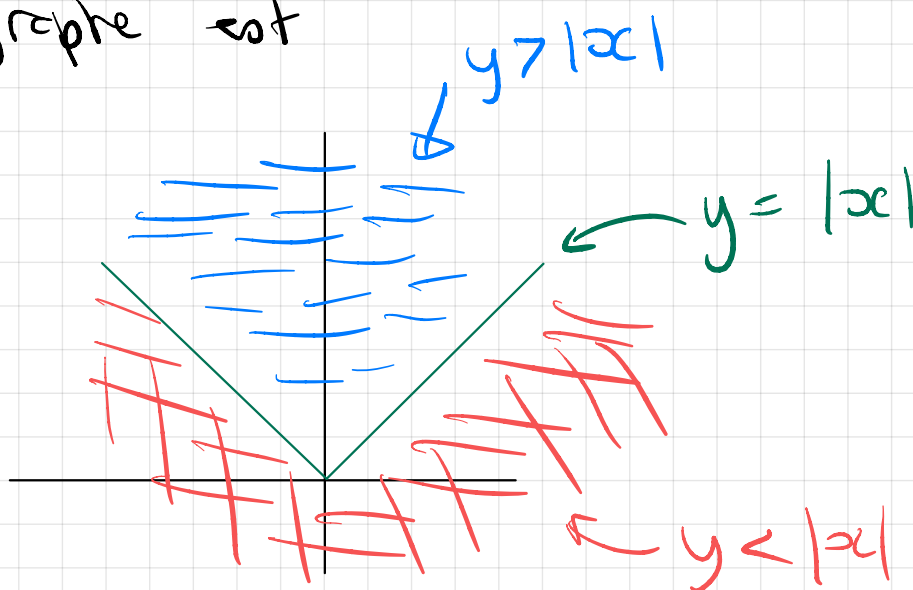
Def: Soit $x \in \mathbb{R}$, la val. absolue de x est le nombre, noté $|x|$, déf. par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Cela donne une fonction

$$\begin{aligned} ||: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\mapsto |x| \end{aligned}$$

dont le graphe est
(en vert)



Prop: Pour $x, y \in \mathbb{R}$ on a

1) $|x| \geq 0$ et $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2) $|x|^2 = x^2$, $|x| = ||x||$
↳ double val. abs. (utile)

3) $|x| = |-x|$

(done $||$ est une fonction paire)
 $f(-x) = f(x)$

4) $x = \operatorname{sgn}(x)|x|$

$|x| = \operatorname{sgn}(x)x$

où $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

5) $-|x| \leq x \leq |x|$

milieu: $x = |x|$ ou $x = -|x|$

5⁺) $|x| = \max \{-x, x\}$

6) $|x+y| \leq |x| + |y|$ (inég. triangulaire)

6⁺) $||x| - |y|| \leq |x - y|$ (inég. triang. inverse)

7) $|xy| = |x||y|$

8) $|x| = \sqrt{x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\sqrt{x^2} = x \quad \forall x \in \mathbb{R}_{\geq 0})$

dem:

$$|x+y| \leq |x|+|y|$$

6) 2 cas possibles:

si $x+y > 0$ alors

$$|x+y| = x+y \stackrel{5)}{\leq} |x|+|y|$$

si $x+y < 0$ alors

$$|x+y| = -(x+y) = -x-y \stackrel{5)}{\leq} |x|+|y|$$

$$6^+) \quad |x| = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{astuce}}}{|x-y+y|} \leq |x-y| + |y| \quad \underset{\substack{\uparrow \\ 6)}}{\leq}$$

$$\Rightarrow \underbrace{|x|-|y|}_a \leq |x-y|$$

idem $|y| \leq |y-x| + |x|$

$$\Rightarrow \underbrace{|y|-|x|}_{-a} \leq |y-x| \stackrel{3)}{=} |x-y|$$

done $|a| \leq |x-y|$ càd $||x|-|y|| \leq |x-y|$ cqfd.

§ 2.4.1 Equat. avec | |

Prop. Pour $a \in \mathbb{R}$ on a (pour $x \in \mathbb{R}$)

$$1) |x| = a \Leftrightarrow \left(a \geq 0 \quad \underline{\text{et}} \quad \begin{cases} x = a \\ \underline{\text{ou}} \\ x = -a \end{cases} \right)$$

$$\text{donc } S = \begin{cases} \{-a, a\} & \text{si } a \geq 0 \\ \emptyset & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

+ généralement
2) si f, g fonctions réelles, alors $\forall x \in D_{\text{def}}$
on a

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \left(g(x) \geq 0 \quad \underline{\text{et}} \quad \begin{cases} f(x) = g(x) \\ \underline{\text{ou}} \quad \star \\ f(x) = -g(x) \end{cases} \right)$$

Donc : on discute du signe de g pour trouver

$$D_{\text{pos}} := \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \geq 0\} = \text{domaine de positivité}$$

et on regarde les solutions de $\star$ dans $D_{\text{def}} \cap D_{\text{pos}}$

ex

1) Rés. en $x \in \mathbb{R}$ $|x^2 + 2x - 5| = x + 1$

- $D_{\text{def}} = \mathbb{R}$

- $|x^2 + 2x - 5| = x + 1 \Leftrightarrow$

- $D_{\text{pos}} = [-1, +\infty[$

$$\left\{ \begin{array}{l} x+1 \geq 0 \\ \underline{\text{et}} \\ \left\{ \begin{array}{l} x^2 + 2x - 5 = x + 1 \quad \text{a)} \\ \underline{\text{ou}} \\ x^2 + 2x - 5 \leq -x - 1 \quad \text{b)} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

- Eq a) $\Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x-2) = 0$$

$$S_a = \{-3, 2\}$$

- Eq b) $\Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow (x+4)(x-1) = 0$$

$$S_b = \{-4, +1\}$$

Au final

$$S = D_{\text{def}} \cap D_{\text{pos}} \cap (S_a \cup S_b)$$

$$= \mathbb{R} \cap [-1, +\infty[\cap \{-4, -3, 1, 2\} = \{1, 2\}$$

2) Rés. en $x \in \mathbb{R}$, en fonction de $m \in \mathbb{R}$

l'éq. $|x - 3m + 4| = x + m$

$$D_{\text{def}} = \mathbb{R}, \quad D_{\text{pos}} = \{x \in \mathbb{R} \mid x + m \geq 0\} = [-m, +\infty[$$

$$|x - 3m + 4| = x + m \Leftrightarrow \left(x \in [-m, +\infty[\text{ et } \begin{cases} \text{a) } x - 3m + 4 = x + m \\ \text{ou} \\ \text{b) } x - 3m + 4 = -x - m \end{cases} \right)$$

a) sur $D_{\text{def}} \cap D_{\text{pos}}$

$$x - 3m + 4 = x + m \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \cdot x = 4m - 4 \\ \text{et} \\ x \in [-m, +\infty[\end{cases}$$

donc • si $m = 1$ on a $0 \cdot x = 0$

$$\text{donc } S_a = [-1, +\infty[$$

• si $m \neq 1$ on a $0 \cdot x = \underbrace{4m - 4}_{\neq 0}$

$$\text{donc } S_a = \emptyset$$

donc
$$S_a = \begin{cases} \emptyset & \text{si } m \neq 1 \\ [-1, +\infty[& \text{si } m = 1 \end{cases}$$

b) sur $D_{\text{def}} \cap D_{\text{pos}}$

$$\begin{cases} x - 3m + 4 = -x - m \\ \text{et} \\ x \in [-m, +\infty[\end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = 2m - 4 \\ \text{et} \\ x \in [-m, +\infty[\end{cases}$$

$$\begin{cases} x = m - 2 \\ \text{et} \\ x \geq -m \end{cases}$$

d'où $S_b =$

$$\begin{cases} \{m-2\} & \text{si } m \geq 1 \\ \emptyset & \text{si } m < 1 \end{cases}$$

(car $m-2 \geq -m$)

$$\begin{matrix} 2m-2 \geq 0 \\ m-1 \geq 0 \end{matrix} \quad m \geq 1$$

Donc
$$S = D_{\text{def}} \cap D_{\text{pos}} \cap (S_a \cup S_b)$$

$$S = \begin{cases} \emptyset & \text{si } m < 1 \\ [-1, +\infty[& \text{si } m = 1 \\ \{m-2\} & \text{si } m > 1 \end{cases}$$

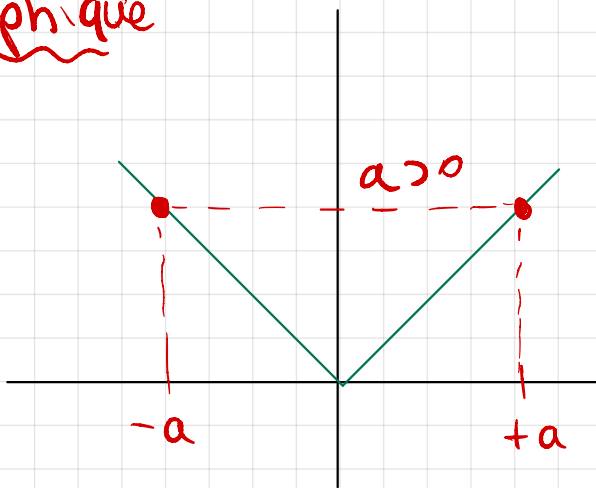
§ 2.4.2 Irreg. avec 11

Prop: Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors pour $x \in \mathbb{R}$

$$|x| \leq a \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \leq a \\ \text{et} \\ x \geq -a \end{cases}$$

Donc
$$S = \begin{cases} [-a, a] & \text{s) } a \geq 0 \\ \emptyset & \text{s) } a < 0 \end{cases}$$

Graphique



dém : $|x| = \max \{-x, x\}$

donc $|x| \leq a \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq a \\ \text{et} \\ -x \leq a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq a \\ \text{et} \\ x \geq -a \end{cases}$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty, a] \cap [-a, +\infty[\quad \text{c.q.f.d.}$

Rem : Pas besoin d'étudier le signe de a .

Généralisation

Prop : f, g fonct. réelles, alors $\forall x \in D_{\text{def}}$ on a

$$|f(x)| \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ \text{et} \\ f(x) \geq -g(x) \end{cases}$$

Rem : pas besoin d'étudier $\text{sgn}(g(x))$

ex : Résoudre en $x \in \mathbb{R}$

a) $|x| + \frac{x-1}{2} \stackrel{*}{<} 0$ $D_{\text{def}} = \mathbb{R}$

$$* \Leftrightarrow |x| < -\left(\frac{x-1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -\left(\frac{x-1}{2}\right) & 1) \\ \underline{\text{et}} \\ x > \frac{x-1}{2} & 2) \end{cases}$$

a.1) $x < \frac{-x+1}{2} \Leftrightarrow 2x < -x+1$

$$\Leftrightarrow 3x < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3}$$

$$S_{a,1} =]-\infty, \frac{1}{3}[$$

a.2) $x > \frac{x-1}{2} \Leftrightarrow 2x > x-1 \Leftrightarrow x > -1$

$$S_{a,2} =]-1, +\infty[$$

au final

$$S = D_{\text{def}} \cap (S_{a,1} \cap S_{a,2}) =]-1, \frac{1}{3}[$$

b) Résoudre en $x \in \mathbb{R}$ (en fonction de $m \in \mathbb{R}$)

$$|x-m| - 1 < 2x$$

$$D_{\text{def}} = \mathbb{R} \quad |x-m| < 2x+1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-m < 2x+1 & 1) \\ \text{et} \\ x-m > -2x-1 & 2) \end{cases}$$

$$b.1) \Leftrightarrow -m-1 < x$$

$$\text{donc } S_{b,1} =]-m-1, +\infty[$$

$$b,2) \Leftrightarrow 3x > m-1 \Leftrightarrow x > \frac{m-1}{3}$$

$$S_{b,2} =]\frac{m-1}{3}, +\infty[$$

Donc $S = S_{b,1} \cap S_{b,2}$ à écrire
en fonction de m .

Pour cela on compare $-m-1$ et $\frac{m-1}{3}$

$$\text{on a } -1-m \geq \frac{m-1}{3} \Leftrightarrow -3-3m \geq m-1$$

$$\Leftrightarrow -2 \geq 4m \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \geq m$$

donc

$$S = \begin{cases}]-m-1, +\infty[& \text{si } m \leq -\frac{1}{2} \\ \left[\frac{m-1}{3}, +\infty[& \text{si } m \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

~ . ~

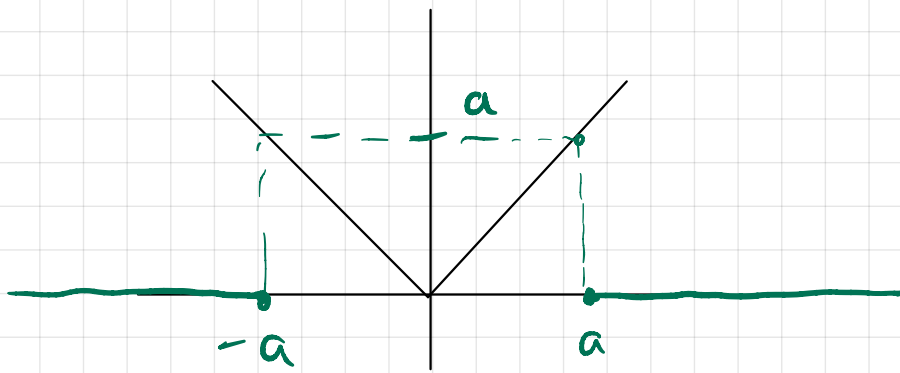
Regardons les ineq. du type $|x| \geq a$

Prop : $a \in \mathbb{R}$ on a $|x| \geq a \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq a \\ \text{ou} \\ x \leq -a \end{cases}$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$$

déu : $|x| = \max\{-x, x\}$

$$|x| = \max\{-x, x\} \geq a \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq a \\ \text{ou} \\ -x \geq a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq a \\ \text{ou} \\ x \leq -a \end{cases}$$



Rem:
générale

$$\left(\begin{array}{ll} \max\{x, y\} < a & \Leftrightarrow \begin{cases} x < a \\ \text{et} \\ y < a \end{cases} \\ \max\{x, y\} > a & \Leftrightarrow \begin{cases} x > a \\ \text{ou} \\ y > a \end{cases} \end{array} \right)$$

Généralisation à des fonctions réelles

Prop: f, g fonctions réelles, alors $\forall x \in D_{\text{def}}$
on a

$$|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ \text{ou} \\ f(x) < -g(x) \end{cases}$$

ex: Résoudre en $x \in \mathbb{R}$

a) $|x-2| > \frac{2x-4}{x}$

$$D_{\text{def}} = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$|x-2| > \frac{2x-4}{x} \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-2 > \frac{2x-4}{x} & 1) \\ \text{ou} \\ x-2 < -\left(\frac{2x-4}{x}\right) & 2) \end{cases}$$

$$1) x-2 - \left(\frac{2x-4}{x}\right) > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x - 2x + 4}{x} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{x} > 0$$

$$S_{a,1} = \mathbb{R}_{>0} \setminus \{2\} =]0,2[\cup]2,+\infty[$$

$$2) x-2 + \left(\frac{2x-4}{x}\right) < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x + 2x - 4}{x} < 0 \quad \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4}{x} < 0$$

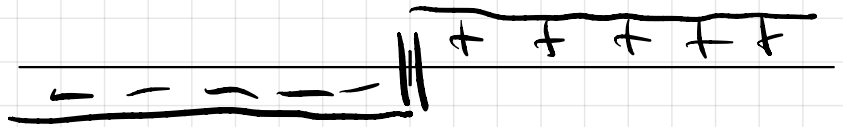
$$\frac{(x-2)(x+2)}{x} < 0$$

tableau des
signes

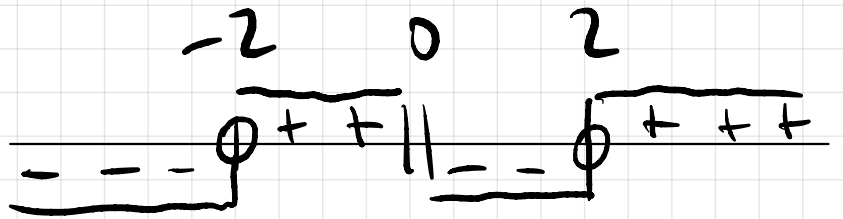
$$x^2 - 4$$



$$\frac{1}{x}$$



$$\frac{x^2 - 4}{x}$$



$$S_{a,2} =]-\infty, -2[\cup]0, 2[$$

donc $S = D_{\text{def}} \cap (S_{a,1} \cup S_{a,2})$

$$\begin{aligned} S &= \mathbb{R}^* \cap (]0, 2[\cup]2, +\infty[\cup]-\infty, -2[\cup]0, 2[) \\ &=]-\infty, -2[\cup]0, 2[\cup]2, +\infty[\end{aligned}$$

(b) Bcp + dur (facultatif)

$$|x - m| > \frac{2x - 2m}{x}$$