

Chapitre 2 :

11.03.24

Cours 3

Algèbre élémentaire

§2.1. Ensemble(s) solution d'équations / inéquations

Déf : Soient f, g fonct. déf.
sur un ens. $E \subseteq \mathbb{R}$

$$E = D_{\text{def}} \quad \text{où} \quad D_{\text{def}} = D_f \cap D_g$$

où D_f est le plus grand sous-ens de $\mathbb{R}$
pour lequel f a un sens

ex. $f(x) = \frac{1}{x-2}$ $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

$$g(x) = \frac{1}{x-3} \quad D_g = \mathbb{R} - \{3\}$$

$$D_{\text{def}} = \mathbb{R} - \{2, 3\}$$

But:
Résoudre des équations / inéquations du type

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) < g(x) \\ f(x) \leq g(x) \\ f(x) > g(x) \\ f(x) \geq g(x) \end{array} \right\} \star$$

c'est chercher l'ensemble

$$S = \{ x \in E \subseteq \mathbb{R} \mid x \text{ satisfait } \star \}$$

- $\mathbb{R}$ le référentiel / l'univers
- E = l'ens. des val. où $\star$ a un sens
- l'éq./l'inég. $\star$ est une contrainte imposée sur les éléments de E .

$$S \subseteq E \subseteq \mathbb{R}$$

Rem: Plus général. on peut résoudre
des équations dans un
corps commutatif K

p.ex: $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$
 ↑ ↑ ↑
 rationnels réels complexes

(ou plein d'autres K

notamment

$$\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq \mathbb{R}$$

et $K = \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_5, \dots, \mathbb{F}_{1291}$

 ↑
 corps à 2 élém. $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$

Pour résoudre $\star$ on se ramène
par des équivalences, à des contraintes
plus simples

ex: Résoudre en $x \in \mathbb{R}$

$$P(x): \sqrt[3]{x} \leq 2$$

$$E = \mathbb{R}$$

on a une
équivalence :

$$\boxed{\sqrt[3]{x} \leq a \iff x \leq a^3}$$

$$\text{ici } \sqrt[3]{x} \leq 2 \iff x \leq 2^3 = 8$$

$$A = A_P = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt[3]{x} \leq 2\} \quad \underbrace{x \leq 8}_{Q(x)}$$

$$B = A_Q = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 8\}$$

Alors

$A=B$ car la fonction $h(x) = x^3$
est strictement croissante

ex: $P(x) \quad x^2 = 64 \quad E = \mathbb{R}$

$Q(x) \quad x = 8 \quad E = \mathbb{R}$

$$Q \Rightarrow P \text{ mais } P \not\Rightarrow Q$$

$$A_P = \{x \in \mathbb{R} \mid P(x)\} = \{-8, +8\}$$

$$A_Q = \{8\}$$

$A_p \neq A_q$ car la fonction $h(x) = x^2$ n'est pas injective.

Rem générale :

$$1) f(x) = g(x) \Leftrightarrow h(f(x)) = h(g(x))$$

Ceci est vrai si et seul. si h est injective

Rappel : h injective si

$$h(x) = h(y) \Leftrightarrow x = y$$

$$2) f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow h(f(x)) \leq h(g(x))$$

est vrai si et seul. si h est strictement croissante

Rappel

h strict. croissante

$$\text{si } x < y \Rightarrow h(x) < h(y)$$

Rem : h strict. croissante $\Rightarrow h$ injective

§ 2.2 (in) Equations linéaires

Def: Pour $a, b \in \mathbb{R}$ fixes, une (in)équation du type

$$ax = b$$

$$(ax < b)$$

s'appelle linéaire

$$E = \mathbb{R} \quad S = \{x \in \mathbb{R} \mid ax = b\}$$

2 cas: si $a \neq 0$ $ax = b \Leftrightarrow x = \frac{b}{a}$

$$S = \left\{ \frac{b}{a} \right\}$$

↑
diviser par a
est fonction
(injective)
si $a \neq 0$

• si $a = 0$ $0 \cdot x = b$

$$\boxed{0 = b}$$

deux sous-cas

• si $b = 0$ $0 \cdot x = 0$ $S = \mathbb{R}$

• si $b \neq 0$ $0 \cdot x = b$ $S = \emptyset$

en résumé

$$S = \begin{cases} \left\{ \frac{b}{a} \right\} & \text{si } a \neq 0 \\ \mathbb{R} & \text{si } a = 0 \text{ et } b = 0 \\ \emptyset & \text{si } a = 0 \text{ et } b \neq 0 \end{cases}$$

Ex paramétrisée :

Résoudre en $x \in \mathbb{R}$ l'éq. (l'h. en x)

$$m^2 x - m - 4x = 2$$

en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$

Donc $\forall m \in \mathbb{R}$ donner l'ens. sol. S_m

↑
solution
dépend
de m

* isoler x
d'un côté

$$(m^2 - 4)x = m + 2$$

Faire des cas :

- si $m^2 - 4 \neq 0$ (donc si $m \notin \{-2, 2\}$)

alors $S_m = \left\{ \frac{m+2}{m^2-4} \right\} = \left\{ \frac{1}{m-2} \right\}$
car $m \neq \pm 2$

- si $m^2 - 4 = 0$ (donc $m = \pm 2$)

- si $m = -2$

$\star$ devient $0 \cdot x = 0$

$$S_{-2} = \mathbb{R}$$

- si $m = 2$

$\star$ devient $0 \cdot x = 4$

$$S_2 = \emptyset$$

$$S = \begin{cases} \left\{ \frac{1}{m-2} \right\} & \text{si } m \notin \{-2, 2\} \\ \mathbb{R} & \text{si } m = -2 \\ \emptyset & \text{si } m = 2 \end{cases}$$

Inéquations du type $ax > b$ ($a, b \in \mathbb{R}$) fixés

Pour résoudre $ax > b$ on discute en fonction du signe de a

• $a > 0$ alors

$$ax > b \Leftrightarrow x > \frac{b}{a}$$

$$S =]\frac{b}{a}, +\infty[$$

(car si $a > 0$, la division par a est strict. croiss.)

• $a = 0$ $0x > b$

• si $b < 0$ alors $S = \mathbb{R}$

• si $b \geq 0$ alors $S = \emptyset$

• $a < 0$ alors

$$ax > b \Leftrightarrow x < \frac{b}{a}$$

$a < 0$

$$S =]-\infty, \frac{b}{a}[$$

ex : Résoudre $x \in \mathbb{R}$, $\forall m \in \mathbb{R}$.

$$m^2 x - m - 4x \leq 2$$

en fonct. de
 $m \in \mathbb{R}$

isoler x : $(m^2 - 4)x \leq m + 2$

disc. en fonct. du signe de $m^2 - 4$

① • $m^2 - 4 = (m - 2)(m + 2) > 0$

$$\Leftrightarrow m \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$$

$\Rightarrow$ devient $x \leq \frac{m+2}{m^2-4} = \frac{1}{m-2}$

$\Rightarrow S =]-\infty, \frac{1}{m-2}]$ (pour $m^2 - 4 > 0$)

② • $m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m \in \{-2, 2\}$

2.1 • si $m = -2 \Rightarrow$ devient $0 \cdot x \leq 0$
 $S = \mathbb{R}$

2.2 • si $m = 2 \Rightarrow$ devient $0 \leq x \leq 4$
 $S = \mathbb{R}$

③. $m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow m \in]-2, 2[$

$\Rightarrow \Leftrightarrow x \geq \frac{m+2}{m^2-4} = \frac{1}{m-2}$

$S = \left[\frac{1}{m-2}, +\infty \right[$

en résumé on a trouvé

$$S = \begin{cases}]-\infty, \frac{1}{m-2}] & \text{si } m \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[\\ \mathbb{R} & \text{si } m \in \{-2, 2\} \\ \left[\frac{1}{m-2}, +\infty \right[& \text{si } m \in]-2, 2[\end{cases}$$

§ 2.3 Trinôme (du second degré)

Def : Soient $a, b, c \in K$

(avec $a \neq 0$), l'expression ($K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$)

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

s'appelle trinôme (du 2nd degré)
à coeff. dans K

But : Étudier $ax^2 + bx + c$ $\begin{matrix} \nearrow \\ \nearrow \\ \nearrow \\ \nearrow \end{matrix} 0$

càd étudier le signe de $p(x)$

Rem : Pour $p(x)$ et $x_0 \in K$
on a l'évaluation en x_0

$$p(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c$$

ex :

$$p(0) = c$$

$$p(1) = a + b + c$$

$$p(-1) = a - b + c$$

$$p(2) = 4a + 2b + c$$

$$p(-2) = 4a - 2b + c$$

§ 2.3.1 Signe du trinôme

$$a, b, c \in K \\ (a \neq 0)$$

Truc : factoriser $p(x) = ax^2 + bx + c$

$$a \neq 0 \quad p(x) = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right)$$

$$p(x) = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right)$$

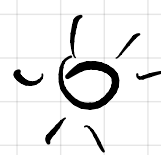
$$p(x) = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) \quad \text{O}$$

$$\text{(appel)} \\ (x^2 - y^2 = (x+y)(x-y))$$

Si $b^2 - 4ac$ est un carré dans K

disons $b^2 - 4ac = A^2$ avec $A \in K$

(dans $\mathbb{R}$, $A = \sqrt{b^2 - 4ac}$ si $b^2 - 4ac \geq 0$)

•  - devient

$$b^2 - 4ac = A^2$$

$$p(x) = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{A^2}{4a^2} \right)$$

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) \quad \sqrt{\quad} = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{A}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{A}{2a} \right) \right)$$

$$p(x) = a \left(x + \frac{b-A}{2a} \right) \left(x + \frac{b+A}{2a} \right)$$

Posons $\Delta = b^2 - 4ac =$ le discriminant
de $p(x)$

Dans $\mathbb{R}$, on a que Δ est un carré

$$\Leftrightarrow \Delta \geq 0$$

et dans ce cas

$$\begin{aligned} p(x) &= a \left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \\ &= a (x - x_1) (x - x_2) \end{aligned}$$

où $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

on a donc les sol. de $p(x) = 0$
lorsque $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$.

Tableau des signes ($\Delta > 0$ et $x_1 < x_2$)

x	x_1	x_2
$x - x_1$	$\oplus$	$+$
$x - x_2$	$-$	$\oplus$

$(x - x_1)(x - x_2)$	x_1	x_2
$+$	$-$	$+$

Ainsi on trouve le signe de $p(x) = ax^2 + bx + c$

$$\begin{cases} \star & \text{sgn}(p(x)) = \text{sgn}(a) \quad \forall x \in]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[\\ \star & \text{sgn}(p(x)) = -\text{sgn}(a) \quad \forall x \in]x_1, x_2[\end{cases}$$

* = être à l'extérieur des racines

⌋ = être à l'intérieur des racines

! ceci ne vaut que si $\Delta > 0$

$$* \Leftrightarrow p(x) a > 0$$

$$\lrcorner \Leftrightarrow p(x) a < 0$$

utile pour
les exos
5 & 6

cas $\Delta = 0$, l'exp. $y = p(x)$ devient

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$$

2 racines confondues $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

$$\operatorname{sgn}(p(x)) = \operatorname{sgn}(a) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$$

si $\Delta < 0$: pas de racine réelle

$$\text{et } \boxed{\operatorname{sgn}(p(x)) = \operatorname{sgn}(a) \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

§ 2.3.2 Graphes de $p(x)$ et formules de Viète

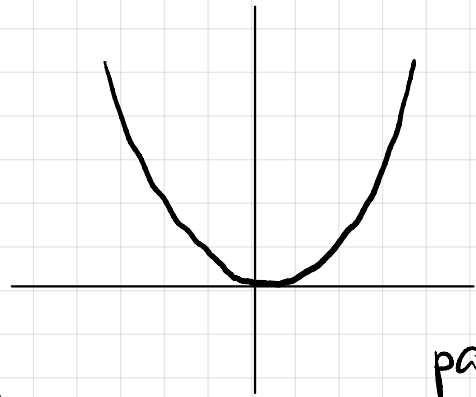
But: Étudier le lieu des points du plan $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \underbrace{\Gamma}_{\text{Gamma}} &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax^2 + bx + c \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right\} \end{aligned}$$

$$= \left\{ (x, y) \mid y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \right\}$$

$$\boxed{\Gamma = \left\{ (x, y) \mid y + \frac{\Delta}{4a} = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \right\}}$$

Rem: $y = x^2 \rightarrow$

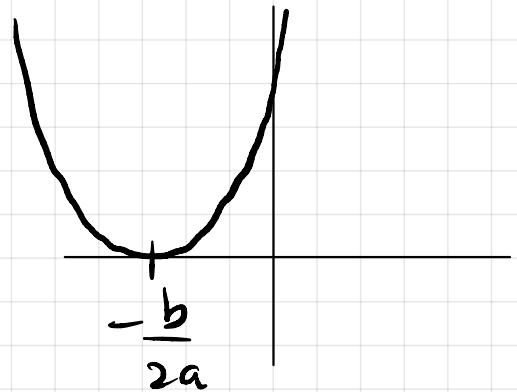


parabole

donc Γ est la parabole ci-dessus après

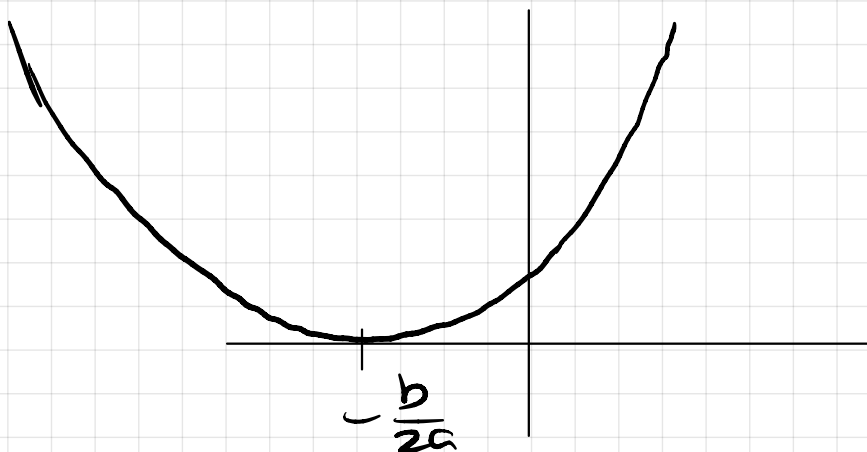
1. translation selon x de $-\frac{b}{2a}$
(horizontale)

$$\left(y = \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \right)$$



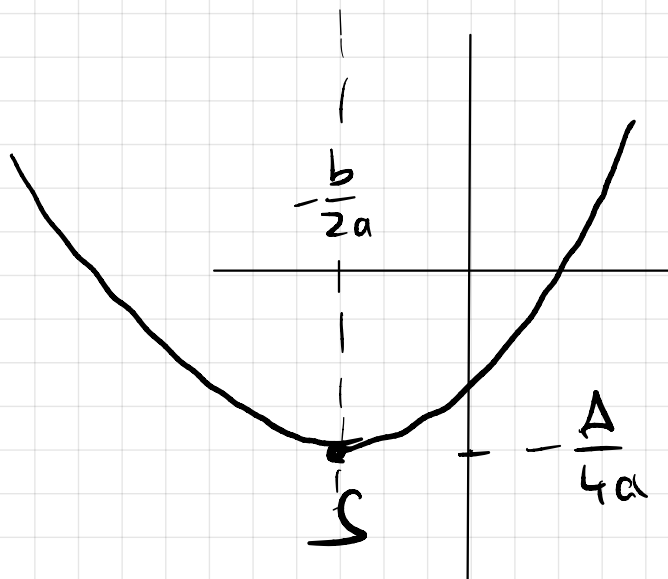
2. amplification selon y d'un fact a

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$$



(graph.
avec
 $a > 0$)

3. translation selon y de $-\frac{\Delta}{4a}$
(verticale)



Propriétés de $\Gamma = \{(x, y) \mid y = ax^2 + bx + c\}$

1. Γ a un axe de symétrie vertical

d'eq. $x = -\frac{b}{2a} \left(= \frac{x_1 + x_2}{2} \right)$

↑ moyenne
des racines

Les coordonnées du sommet

$$S = \left\{ \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right) \right\}$$

c'est un minimum si $a > 0$

||
☺
parabole
souriante

c'est un maximum si $a < 0$

||
☹
parabole
déprimée

2. Les inters. de Γ avec l'axe Ox
sont x_1 et x_2 (si elles existent
càd $\Delta \geq 0$)

Formules de Viète

Si x_1 et x_2 sont les racines de $p(x)$
(réelles ou complexes) alors

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Rem : Dans un ex on cherche

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

t.q la somme des carrés des racines
vaut 1

idée : Viète :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 &= \frac{c}{a} \end{aligned}$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = x_1^2 + x_2^2 = \lambda$$

$$\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a} = \lambda \quad (\text{utile en exo})$$

Exemples :

$$1) \quad p(x) = kx^2 - 2(k+1)x + 5 - \frac{1}{k}$$

$$\text{Dét. } k \in \mathbb{R}^* \text{ t.q.}$$

(pour $k \in \mathbb{R}^*$)

$$\Gamma: y = p(x)$$

soit située en dessous de l'axe strict,

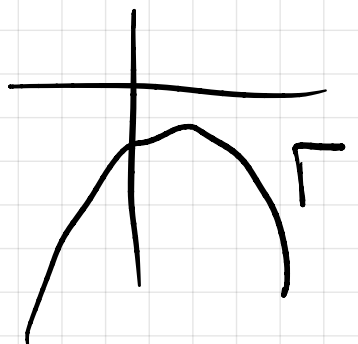
contrainte : $p(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

traduction :

a) pas d'inters. or : $\Delta < 0$

b) Γ tournée vers le bas, $\text{sgn}(k) < 0$

$$(k < 0)$$



$$a) \Delta < 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-2(k+1))^2 - 4k(5 - \frac{1}{k})$$

$$= 4(k^2 + 2k + 1 - 5k + 1)$$

$$S_a =]1, 2[$$

$$= 4(k^2 - 3k + 2)$$

$$= 4(k-1)(k-2)$$

$$b) k < 0 \quad S_b =]-\infty, 0[$$

$$S = S_a \cap S_b =]1, 2[\cap]-\infty, 0[= \emptyset.$$

Méthode générale pour $f(x) \leq g(x)$

$$1. f(x) - g(x) \leq 0 \quad (\text{comparer à } 0)$$

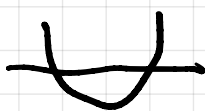
$$2. \text{factoriser } f(x) - g(x) = p_1(x) \cdot \dots \cdot p_r(x)$$

$$3. \text{résoudre } \operatorname{sgn}(f(x) - g(x)) = \prod_{i=1}^r \operatorname{sgn}(p_i(x))$$

ex: $x^2 - 1 \leq m(x-1)$

$$x^2 - 1 - m(x-1) \leq 0$$

$$(x-1)(x+1-m) \leq 0 \quad \text{2 racines}$$

parabole souriante 

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = m-1$$

• Si $1 < m-1 \quad (m > 2)$

$$S = [1, m-1]$$

• Si $1 = m-1 \quad (m = 2)$

$$S = \{1\}$$

• Si $1 > m-1 \quad (m < 2)$

$$S = [m-1, 1]$$