

Analyse A

Chap 1 : Logique (notions de base)

§1.1. Propriétés, ensembles et propositions

1.1.1 : Intro

Pour développer un langage précis et univoque qui permette d'énoncer et démontrer des résultats/formules on a besoin

- ① d'une syntaxe / symbolique claire
- ② des règles logiques d'inférence
- ③ d'axiomes / postulats

Analogie :

- 1) $\leftrightarrow$ pièces du jeu
- 2) $\leftrightarrow$ règles du jeu
- 3) $\leftrightarrow$ position(s) de départ (admissibles)

On va faire cela de façon informelle
en admettant connue la symbolique
de la théorie des ensembles

⇒ voir série 0 (notations etc)

Warning: Même la théorie
des ensembles est délicate
à développer

1.1.2 Propriétés et ensembles

Def : Soit E un ensemble, appelé
le réfèrentiel, et soit P une
propriété (mathématique) définie sur E

càd, pouvant être exprimée sur les
éléments de E , càd les $x \in E$.

On écrira " $P(x)$ " si la propriété
 P est vraie pour $x \in E$ (fixé).

on pourrait " $P(x)$ est vraie"
écrire

et se lit "x possède P"
"x a P".

Exemples :

1) $E = \mathbb{Q}$ = les nombres rationnels

P = être entier

$P(2^{10})$ est vraie

$P(\frac{1}{3})$ est fausse

$P(\sqrt{1291})$ est fausse

2) $E = \mathbb{N}$

Q = être un nombre premier

$Q(1291)$ ✓

3) $E = \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}^+$ fixé

R = être multiple de m

4) $E = \mathbb{R}$,

P : être égal à son carré

donc $P(x)$ est vraie ssi $x^2 = x$
si et seulement si

Point de vue ensembliste

E ens., P propriété sur E . On pose

$$A_P = \{x \in E \mid P(x)\}$$

$\uparrow$
tel(s) que

A_P = le ss-ensemble de E formé
des x qui vérifient P ,
= ensemble associé à P

A_P est un sous-ens de E

càd $A_P \subseteq E$

$\nwarrow$ inclusion

Rem. A_P peut être vide

ex. $E = \mathbb{R}$ $P: x^2 = -1$

$$A_P = \emptyset$$

ex. $E = \mathbb{Z}$, $P: x^2 = x$ $A_P = \{0, 1\}$

Def: Soit E, P comme avant et $x \in E$.

On écrit $\text{non}P(x)$ pour dire
" x ne possède pas P ".

Cela donne une nouvelle propriété

" $\text{non}P$ " définie sur E
c'est la négation de P (notée $\neg P$)
en littérature

~~ex~~: 1) $E = \mathbb{Q}$ P : être entier

$\text{non}P$: ne pas être entier

2) $E = \mathbb{Z}$ P : $x^2 = x$

$\text{non}P(x)$ ss: $x^2 \neq x$

Remarque: l'ens. associé à $\text{non}P$ est

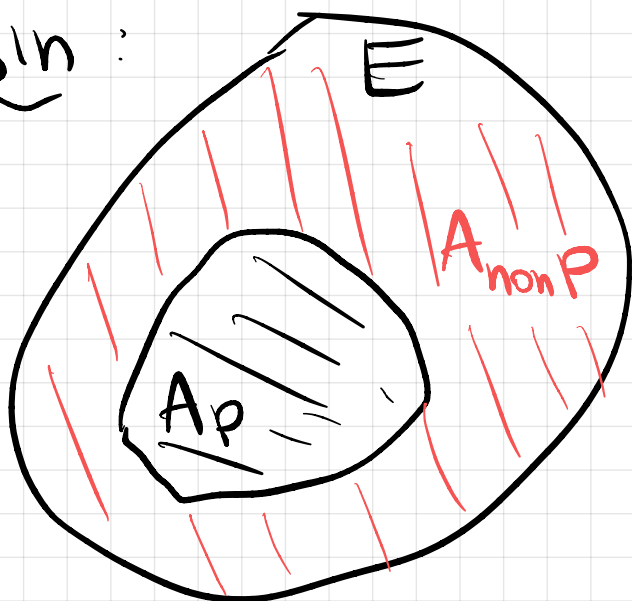
$$A_{\text{non}P} = \{x \in E \mid \text{non}P(x) \text{ (est vraie)}\}$$

$$= \{x \in E \mid P(x) \text{ est fausse}\}$$

$$= \{x \in E \mid x \notin A_P\}$$

$$\overline{A_P} = \bigcup_E A_P = \text{le complémentaire de } A_P \text{ dans } E$$

Dessin :



ex : $E = \mathbb{R}$ $P(x) : x > 10$

$\text{non } P(x) : x \leq 10$

$$A_P =]10, +\infty[$$

$$A_{\text{non } P} =]-\infty, 10]$$

$$A_P \cup A_{\text{non } P} = E$$

exemples :

1) $A_P = \emptyset$ ssi "P n'a pas de sol dans E"

càd, pour tout $x \in E$, $P(x)$ est fausse

càd, $\forall x \in E$, $\text{non } P(x)$

ex : $P(x) : x^2 = -1$ $E = \mathbb{R}$ $A_P = \emptyset$

2) $A_P \neq \emptyset$ si "P a au moins une solution dans E"

càd $\exists x \in E$ tel que $P(x)$

$\exists$
il existe

⚠ ce x
n'est pas
forcément
unique.

$\exists$ = there exists

$\forall$ = for all

3) $A_P = E$ si $\forall x \in E, P(x)$

(la propr. P est vraie pour tous
les $x \in E$)

4) $A_P \neq E$ si $\exists x \in E, \text{non } P(x)$

(il existe au moins un x qui ne
possède pas P)

ex: $E = \mathbb{R}, P(x): x^2 \geq 0 \quad A_P = \mathbb{R}$

$E = \mathbb{R} \quad P(x): x < 100^{100} \quad A_P =]-\infty, 100^{100}[\neq \mathbb{R}$

Combinaisons de propriétés ($P \wedge Q$, $P \vee Q$)

Solent E un ens. P, Q deux propriétés
sur E

Pour $x \in E$ on pose

• $(P \wedge Q)(x)$ ss'i $P(x)$ et $Q(x)$

(càd $P(x)$ et $Q(x)$ sont vraies "simultanément"
à la fois)

• $(P \vee Q)(x)$ ss'i $P(x)$ ou $Q(x)$

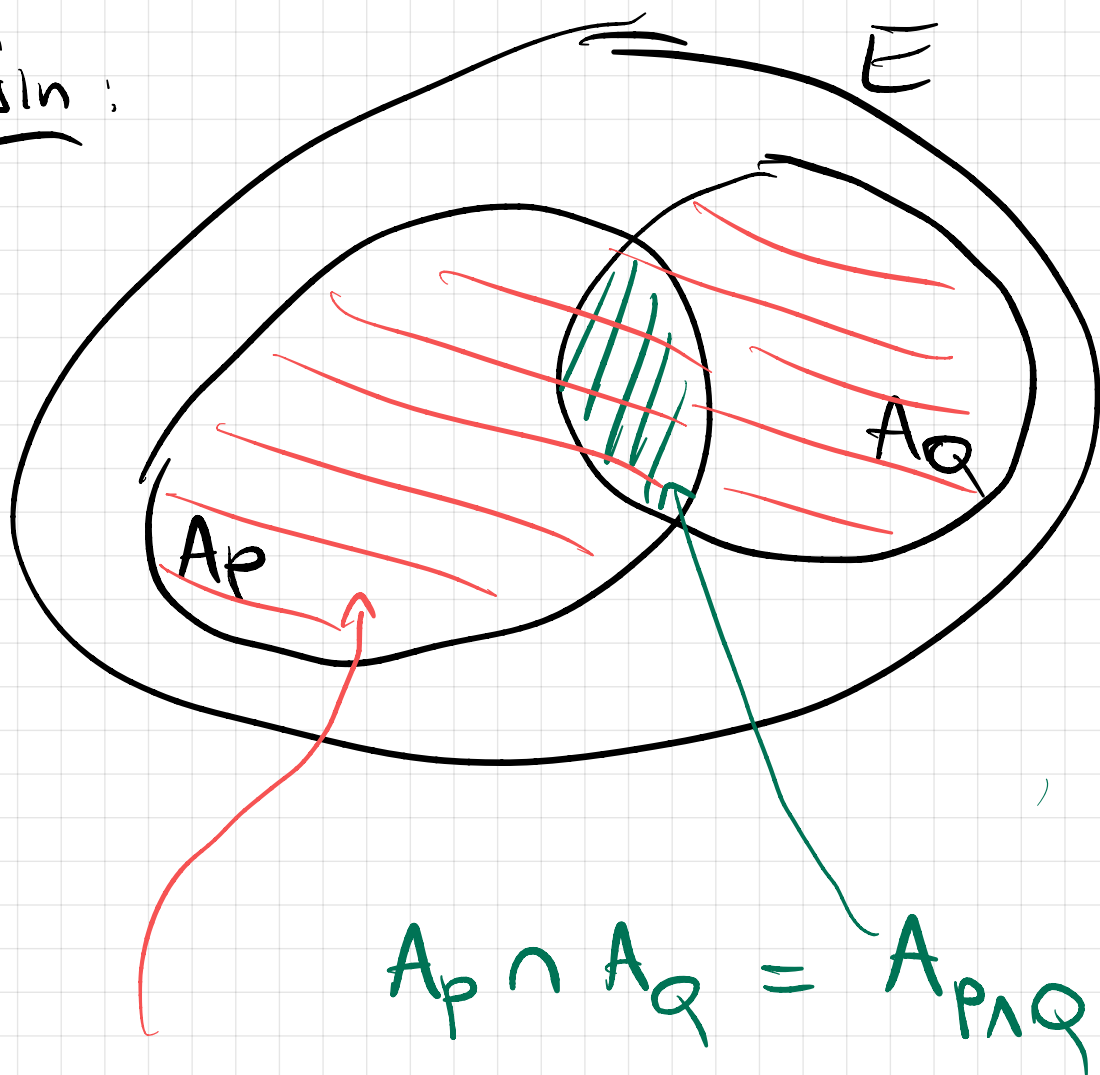
(càd au moins l'une des propriétés $P(x)$
ou $Q(x)$ est vraie)

Dans le pdf :

$P \text{ et } Q$ au lieu de $P \wedge Q$

$P \text{ ou } Q$ au lieu de $P \vee Q$

Dessin :



$$A_{P \cup Q} = A_P \cup A_Q$$

$$A_P \cap A_Q = A_{P \cap Q}$$

(Rappel : $A \cap B$ = A Intersection B
 $A \cup B$ = A réunion B)

ex : $E = \mathbb{R}$, $P(x) : x \leq 100$

$$Q(x) : x > 10$$

$$1) A_{P \cup Q} = A_P \cup A_Q =]-\infty, 100] \cup]10, +\infty[= \mathbb{R}$$

$$2) A_{P \cap Q} = A_P \cap A_Q =]10, 100]$$

2) $E = \mathbb{Z}$, P : être pair
 Q : être impair

$$A_P = 2\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$$

$$A_Q = \mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -1, 1, 3, \dots\}$$

$\uparrow$
pair

$$A_P \cap A_Q = \emptyset$$

$$A_P \cup A_Q = \mathbb{Z}$$

Term. Si $A_P \cap A_Q = \emptyset$ on

dit que P et Q sont incompatibles
(sur E)

Négations de propriétés (à retenir)

E ens, P, Q prop. sur E , alors

$$1) \text{ non } (\text{non } P) = P$$

$$2) \text{ non } (P \wedge Q) = \text{non } P \vee \text{non } Q$$

$$3) \text{ non } (P \vee Q) = \text{non } P \wedge \text{non } Q$$

§ 1.1.3 Propositions :

E ens., P propriété sur E , A_P ens. associé.

Déf : Une proposition T (portant sur P)

est une assertion / phrase (avec verbe)
énoncée sur les élém de E
en relation avec P .

(notion de "véracité"
demandant une preuve)

3 Types de propositions.

1) Proposition simple : Portant sur un $x_0 \in E$

$T: P(x_0)$ " x_0 vérifie P "

2) Proposition universelle

$T: \forall x \in E, P(x)$

" tout élém. de E , vérifie P "

3) Prop. existentielle

$$T: \exists x \in E, P(x)$$

"il existe $x \in E$, tel que $P(x)$ est vraie"
au moins un

En termes ensemblistes

1) T simple + vraie ss: $x_0 \in A_P$
($P(x_0)$ vraie)

2) T universelle + vraie ss: $A_P = E$

3) T exist. + vraie ss: $A_P \neq \emptyset$

Négations de propositions

Rem: la négation se porte sur le verbe
et le quantificateur ($\forall$ ou $\exists$)

1) Prop. simple
 $T: P(x_0)$

$\text{non}T: \text{non}P(x_0)$ ssi x_0 ne vérifie pas P

Donc la négation d'une proposition simple est une proposition simple

2) Prop. universelle:

$T: \forall x \in E, P(x)$ ssi $A_P = E$

$\text{non}T: \exists x \in E, \text{non}P(x)$ ssi $A_P \neq E$

la négation d'une prop. universelle est une prop. existentielle

$A_{\text{non}P} \neq \emptyset$

3) Prop. existentielle

$T: \exists x \in E, P(x)$

$\text{non}T: \forall x \in E, \text{non}P(x)$

la nég. d'une prop. existentielle est une prop. universelle