

5.3 Fonctions exponentielles et logarithmiques

Cours 13

3 juin 24



Évaluation
- approfondie

- Séance de
Réponses
aux
questions

Rappel:

On a vu que la fonction

$$\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\text{définie par } \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt)$$

est continue et bijective

$$\text{et vérifie } \begin{cases} \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \\ \ln(e) = 1 \end{cases}$$

$$\text{où } e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \simeq 2,718281$$

Ainsi, il existe une fonction (réciproque)

$$\text{notée } \exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

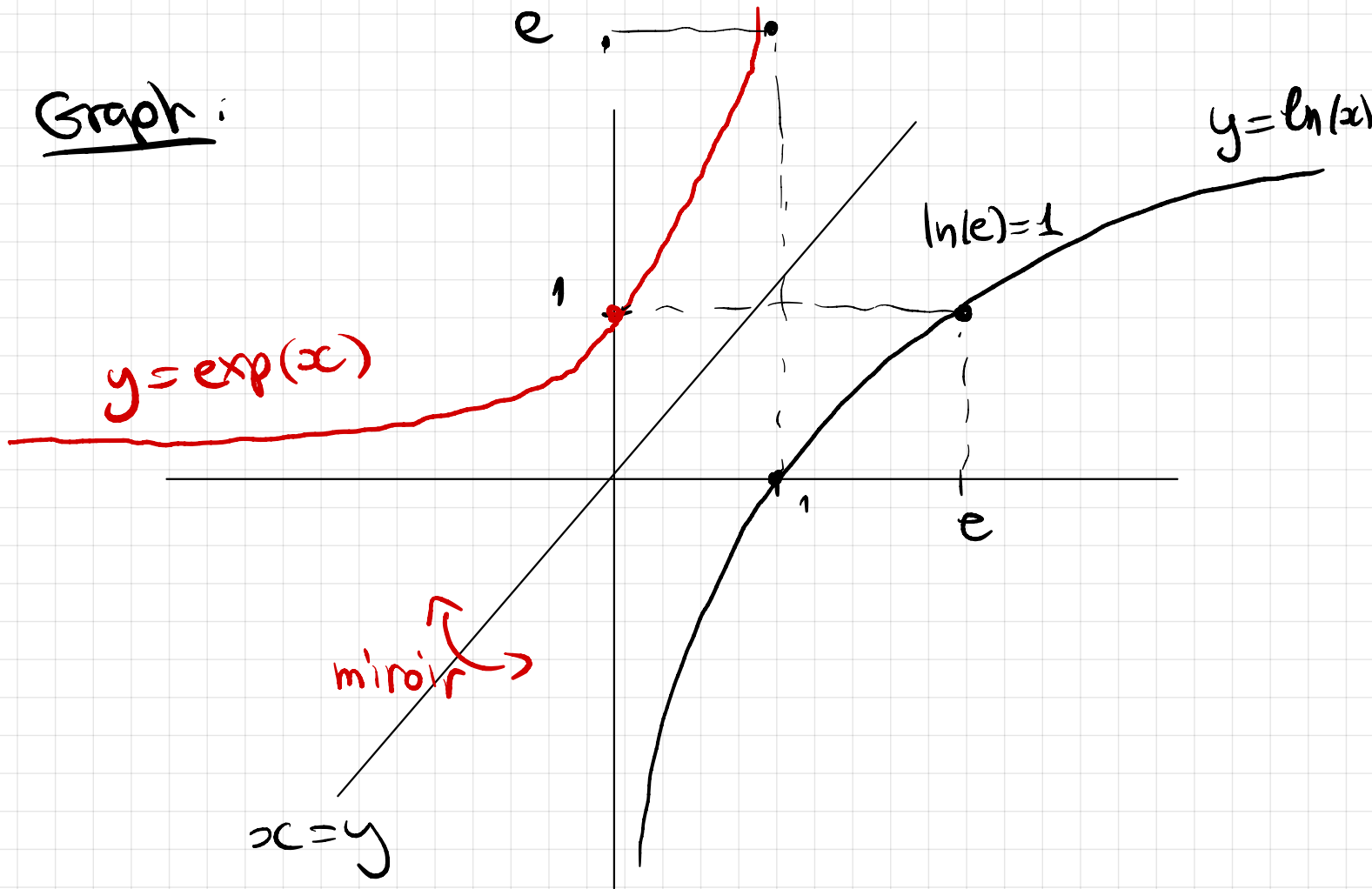
qui vérifie les cond. suivantes

18 juin
8h15 → 12h
en CO1

$$\left\{ \begin{array}{l} \exp(\ln(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \\ \ln(\exp(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

exp est appelée la fonction exponentielle

Graph :



Constats :

- exp est strict. positive $\exp(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- exp est strict. croissante ($x < y \Rightarrow \exp(x) < \exp(y)$)
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$



$$\text{dit } \begin{cases} \exp(x) = y \Leftrightarrow x = \ln(y) \\ \forall x \in \mathbb{R} \\ x = \ln(y) \Leftrightarrow y = \exp(x) \\ \forall y > 0 \end{cases}$$

Propriétés de exp:

1) $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$$

2) $\exp(1) = e$ et $\exp(0) = 1$

(car $\ln(e) = 1$ et $\ln(1) = 0$)

3) $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

(car $1 = \exp(0) = \exp(x-x) \stackrel{1)}{=} \exp(x) \cdot \exp(-x)$)

4) $\forall n \in \mathbb{Z}$ on a

$$\exp(n) = e^n = \exp(1)^n$$

(mieux: $\forall p \in \mathbb{Q} \quad \exp(p) = e^p$)

dans de 1 : soient $x, y \in \mathbb{R}$

$$\exists a, b \in \mathbb{R}_+^* \quad \text{t.q.} \quad \begin{array}{ll} x = \ln(a) & \exp(x) = a \\ y = \ln(b) & \exp(y) = b \end{array}$$

$$\exp(x+y) = \exp(\ln(a) + \ln(b))$$

$$\stackrel{\sim}{=} \exp(\ln(ab)) = ab =$$

$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

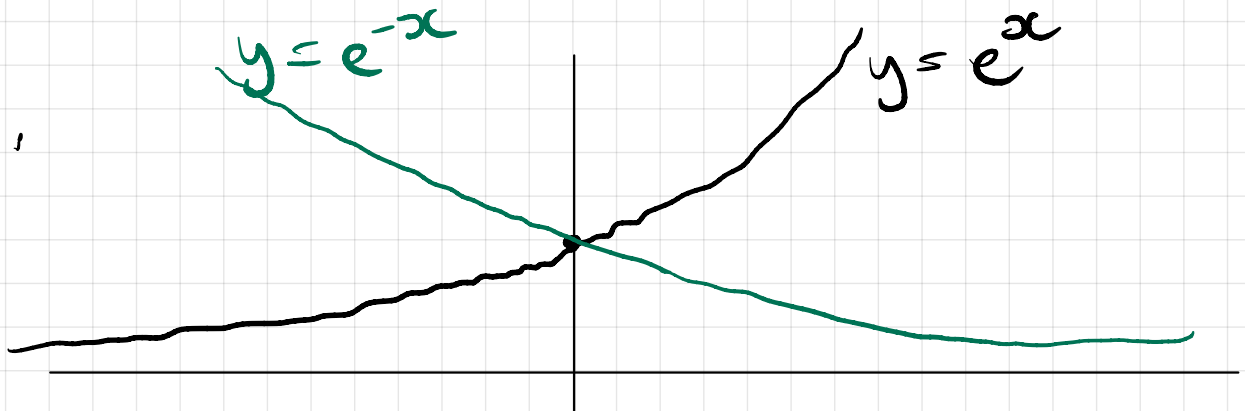
$$= \exp(x) \cdot \exp(y).$$

Not : $\forall x \in \mathbb{R}$ on pose $\exp(x) \stackrel{\text{def}}{=} e^x$

Rem : $e^{-x} = \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} = \frac{1}{e^x} > 0$

donc e^{-x} est une fonction strictement positive et strictement décroissante

Graph,



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x$$

(Rem: la réciproque de e^{-x}
est $\ln(\frac{1}{x})$)

Exemples:

$$\cdot e^{-10^{10}} > 0$$

$$\cdot e^{\ln(2) + \ln(3)} = \exp(\ln(2) + \ln(3))$$

$$= \exp(\ln(2)) \cdot \exp(\ln(3)) = 2 \cdot 3 = 6.$$

$$\cdot \ln(\exp(\pi)) = \pi$$

$$\cdot \ln(e^e \cdot e^\pi) = \ln(e^{e+\pi}) = e + \pi$$

(In)équations avec exponentielle(s)

on utilise les eq. suivantes $\forall u, v \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} u = v & \Leftrightarrow e^u = e^v \\ u < v & \Leftrightarrow e^u < e^v \\ e^x > 0 & \forall x \quad e^x = y \Leftrightarrow x = \ln(y) \end{cases}$$

Exemple: Résoudre pour $x \in \mathbb{R}$
l'équation

$$e^{3x+1} - 2e^{2x+1} - 3e^{x+1} = 0$$

1. $D_{\text{def}} = \mathbb{R}$

2. Mettre e en évidence (autant que possible)

$$e(e^{3x} - 2e^{2x} - 3e^x) = 0$$

$$e^{3x} - 2e^{2x} - 3e^x = 0 \quad \downarrow e \neq 0$$

3. Poser $y = e^x$ (astuce habituelle)

$$4. \quad y^3 - 2y^2 - 3y = 0 \quad (y = e^x)$$

$$y(y^2 - 2y - 3) = 0$$

$$y(y+1)(y-3) = 0 \quad (y = e^x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \text{ou} \\ y = -1 \\ \text{ou} \\ y = 3 \end{cases} \quad \& \quad y = e^x$$

$$\begin{array}{c} \Leftrightarrow \\ \uparrow \\ e^x > 0 \end{array} \quad y = e^x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln(3).$$

dérivée de exp: $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{on a } \frac{d}{dx} \exp(x) = \exp(x)$$

$$\exp'(x) = \exp(x)$$

dér: $\ln(\exp(x)) \stackrel{?}{=} x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

()' $\downarrow$

$$\exp'(x) \cdot \frac{1}{\exp(x)} = 1$$

$$\exp'(x) = \exp(x).$$

Rem: on peut définir directement

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

et vérifier

$$\left\{ \begin{array}{l} \exp'(x) = \exp(x) \\ \exp(a+b) = \exp(a) \cdot \exp(b) \\ \ln(\exp(x)) = x \end{array} \right.$$

Rem / Définition :

Pour $x > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ on peut définir

$$x^\alpha \stackrel{\text{dét}}{=} \exp(\alpha \ln(x)) = e^{\alpha \ln(x)}.$$

et l'on a la propriété

- $\ln(x^\alpha) = \ln(e^{\alpha \ln(x)}) = \alpha \ln(x).$

- $\frac{d}{dx} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$

en effet $(e^{\alpha \ln(x)})' = (\alpha \ln(x))' e^{\alpha \ln(x)}$

$$= \frac{d}{dx} e^{\alpha \ln(x)} = \alpha \cdot \frac{x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

- on peut montrer que

$$\begin{cases} x^\alpha \cdot x^\beta = x^{\alpha+\beta} \\ (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta} \end{cases}$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

§ 5.4 Fonctions log et exp en base quelconque

Déf: Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$a^x \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} e^{x \ln(a)} > 0$$

cela donne une fonction

$$a^{(\cdot)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto a^x$$

appelée l'exponentielle de base a

autre notation $a^x = \exp_a(x) = e^{x \ln(a)}$

Elle vérifie les propriétés

$$\left\{ \begin{array}{l} a^0 = e^{0 \ln(a)} = e^0 = 1 \\ a^{x+y} = a^x \cdot a^y \end{array} \right.$$

(tout
comme l'exp.
de base e)

Mais attention, suivant la valeur de a
la fonction a^x n'est pas très croissante :

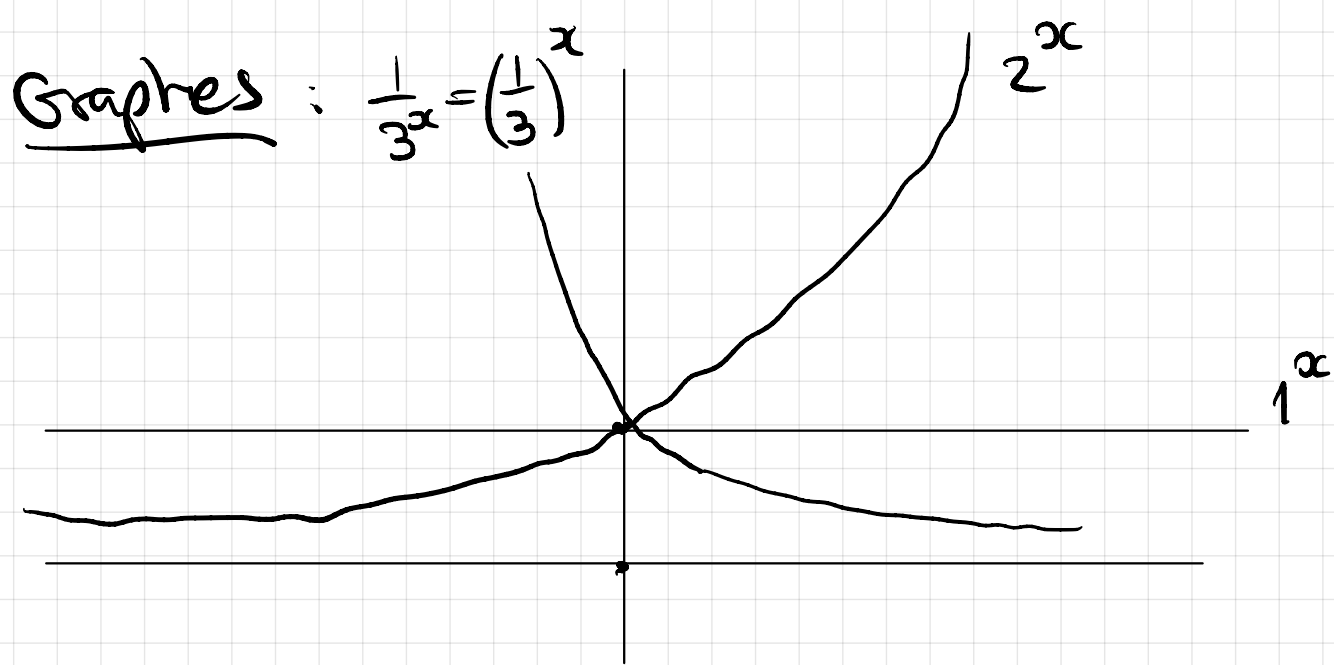
Remarque :

1) si $0 < a < 1$, alors $\ln(a) < 0$
et donc a^x est strictement
décroissante en effet

$$\begin{aligned}(a^x)' &= (\exp(x \ln(a)))' = \ln(a) \exp(x \ln(a)) \\ &= \ln(a) \cdot \underbrace{a^x}_{>0} < 0\end{aligned}$$

2) si $a = 1$, alors $\ln(a) = 0$
et donc $1^x = 1 \quad \forall x$
(fonction constante)

3) si $a > 1$ alors $\ln(a) > 0$
et a^x est strict. croissante



Remarque / Définition :

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ la fonction

$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est bijective

$x \mapsto a^x$ (car a^x est continue et a^x est strict. monotone)

Donc $x \mapsto a^x$ possède une fonction réciproque

notée $\log_a : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \log_a(x)$

vérifiant $y = \log_a(x) \Leftrightarrow x = a^y$

Par def. on a

$$\spadesuit \left\{ \begin{array}{l} \log_a(a^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ a^{\log_a(x)} = x \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \end{array} \right.$$

Rem : D'après $\spadesuit$ le nombre $\log_a(x)$

est la puissance à laquelle il faut élever a pour trouver x .

Not : si $a = e$ $\log_e = \ln$

si $a = 10$ $\log_{10} = \underset{\text{Not}}{\log}$

exemples :

- $\log(0,001) = \log_{10}(10^{-3}) = -3$
- $\log_2(32) = 5$
- $\log_3\left(\frac{1}{27}\right) = -3$
- $\log_{\frac{1}{2}}(4) = -2$

Propriétés : $\forall a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

$$\log_a(1) = 0 \quad (\text{car } a^0 = 1)$$

$$\log_a(a) = 1 \quad (\text{car } a^1 = a)$$

$$(\log_a(a^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R})$$

$$\log_a(xy) \stackrel{*}{=} \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$$

en effet

$$xy = a^{\log_a(xy)}$$

$$\text{et } a^{\log_a(x) + \log_a(y)} = a^{\log_a(x)} \cdot a^{\log_a(y)} \\ = xy$$

$$\text{donc } a^{\log_a(xy)} = a^{\log_a(x) + \log_a(y)}$$

$\searrow \log_a$

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

donc $\log_a$ est une fonction logarithmique

Proposition (Lien entre logarithmes)

$\forall a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ on a

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \quad \forall x > 0$$

dém: $y = \log_a(x) \Leftrightarrow a^y = x$

$$\Leftrightarrow \exp(y \ln(a)) = \exp(\ln(x))$$

$$\Leftrightarrow y \ln(a) = \ln(x)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \quad \text{c.q.f.d.}$$

Rem: $\log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$

donc $\ln(b) \log_b(x) = \ln(x) = \ln(a) \log_a(x)$

$$\Rightarrow \log_b(x) = \frac{\ln(a)}{\ln(b)} \log_a(x)$$

exemples : $\log_2(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$

• $\log_2(x) + \log_3(x) = c \quad c \in \mathbb{R}$

$$\frac{\ln(x)}{\ln(2)} + \frac{\ln(x)}{\ln(3)} = c$$

$$\ln(x) \left(\frac{1}{\ln(2)} + \frac{1}{\ln(3)} \right) = c$$

$$\ln(x) = \frac{c}{\frac{1}{\ln(2)} + \frac{1}{\ln(3)}}$$

Propriétés analytiques de $\log_a$

1) $\frac{d}{dx} a^x = (a^x)' = \ln(a) a^x$

2) Pour $0 < a < 1$ la fonction a^x est décroissante et $\log_a(x)$ aussi

3) $(\log_a(x))' = \frac{1}{\ln(a)x}$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 1 \\ 0 & \text{si } a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{si } a > 1 \\ +\infty & \text{si } a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 1 \\ -\infty & \text{si } a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si } a > 1 \\ +\infty & \text{si } a < 1 \end{cases}$$

exemple d'inéquation en $\log_a$

(à résoudre en fonction de a)

soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Résoudre pour $x \in \mathbb{R}$

$$\star \log_a(x) + \log_a(x-2a) \geq 2 + \log_a(3)$$

$$1. D_{\text{def}} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ et } x > 2a\} \\ =]2a, +\infty[$$

2. $\star$ sur D_{def} est

$$\log_a(x(x-2a)) \geq \log_a(a^2) + \log_a(3)$$

$$\textcircled{\text{II}} \log_a(x(x-2a)) \geq \log_a(3a^2)$$

on discute de $\textcircled{\text{II}}$ en fonction de $\begin{cases} 0 < a < 1 \\ a > 1 \end{cases}$

Si $0 < a < 1$, alors $\log_a$ est décroissante

$$\textcircled{\text{II}} \Leftrightarrow x(x-2a) \leq 3a^2 \quad (\& x > 2a)$$

$$x^2 - 2ax - 3a^2 \leq 0$$

x est
entre les racines

$$(x+a)(x-3a) \leq 0 \quad (\& x > 2a)$$

$$x \in [-a, 3a] \quad (\& x > 2a)$$

$$S =]2a, 3a] \quad (\text{si } 0 < a < 1)$$

Si $a > 1$ alors $\log_a(x)$ est croissant.

$$\textcircled{II} \Leftrightarrow (x+a)(x-3a) \geq 0 \quad \& \quad x > 2a$$

$$x \in]-\infty, -a] \cup [3a, +\infty[\quad \& \quad x > 2a$$

$$S = [3a, +\infty[$$

Bonnes révisions
et Bons Exas.