

4.3 Polynômes

Cours 11

13 mai 2024

4.3.0 Intro :

Dans $\mathbb{C}$ on a vu comment résoudre des équations du type

$$z^n = w \quad \text{où } w \in \mathbb{C}$$

Rappel : écrire $w = [r, \theta]$

$$\text{puis } z = \left\{ \left[\sqrt[n]{r}, \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right], k=0, 1, \dots, n-1 \right\}$$

ex : $z^3 = 8i = \left[2^3, \frac{\pi}{2} \right]$

$$z = \left\{ \left[2, \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \right], k=0, 1, 2 \right\}$$

$$k=0, \frac{\pi}{6} \Rightarrow z_0 = \sqrt{3} + i$$

$$k=1, \frac{5\pi}{6} \Rightarrow z_1 = -\sqrt{3} + i$$

$$k=2, \frac{3\pi}{2} \Rightarrow z_2 = -2i$$

En fait $z^n = w \Leftrightarrow \underbrace{z^n + w = 0}$

et on a n racines complexes pour ce polynôme, $\nwarrow$ polynôme de degré n

4.3.1 Définitions

un ensemble avec 2 lois + et $\times$

$$(A, +, \times, 0, 1)$$

Def: Soit A un anneau (commutatif)

(ex: $A = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sont de tels anneaux)
corps

et X une indéterminée (variable)

Un polynôme à coeff. dans A en X

est
$$p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0 \cdot 1$$

$\nwarrow x^1$ $\nwarrow x^0$

où $a_i \in A \quad i=0, \dots, n$

càd
$$p(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i$$

On note

$$A[X] = \left\{ p(X) \mid p \text{ polynôme à coeff. dans } A \right\}$$

l'ens. de tous les pol. à coeff. dans A .

Sur $A[X]$ on définit une structure d'anneau
+ et $\times$ comme suit

1) $P(X) + Q(X)$ se fait coeff. par coeff

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i + \sum_{i=0}^m b_i x^i = \sum_{i=0}^{\max(n,m)} (a_i + b_i) x^i$$

2) $P(X) \cdot Q(X)$ se fait en multipliant

$$x^n \cdot x^m = x^{n+m}$$

puis en distribuant sur les sommes

Rem. : $A[X]$ est un ann. pour ces opérations

0 = le pol. nul. = l'élément neutre pour +

1 = le pol. constant 1 = l'élément neutre pour $\cdot$

Déf. : Pour $P \in A[X] \setminus \{0\}$, on pose

$$\deg(P) = \max \{ i \in \mathbb{N} \mid a_i \neq 0 \}$$

$$\text{où } P(X) = \sum a_i x^i$$

s'appelle le degré de P

(si $P=0$ on pose $\deg(0) = -\infty$ par convention)

ex: $3x^2 + 1 \in \mathbb{Z}[X]$ de degré 2

$x^4 + \frac{1}{4} \in \mathbb{Q}[X]$ deg, 4

$\left(\frac{1}{x} \text{ n'est pas un polynôme}\right)$

$x^3 + \sqrt{2}x + 1 \in \mathbb{R}[X]$ deg 3

$iX - 1 \in \mathbb{C}[X]$ deg 1

Rem: les pol de degré 0 sont les constantes (non nuls)

ex de produits:

$\underbrace{(x^2 + \sqrt{2}x + 1)}_{\in \mathbb{R}[X]} \underbrace{(x^2 - \sqrt{2}x + 1)}_{\in \mathbb{R}[X]}$

$$= x^4 + \cancel{\sqrt{2}x^3} + \cancel{x^2} - \cancel{\sqrt{2}x^3} - \cancel{2x^2} - \cancel{\sqrt{2}x} + \cancel{x^2} + \cancel{\sqrt{2}x} + 1 = x^4 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$$

Rem: $x^4 + 1$ n'a pas de sol. sur $\mathbb{R}$

par contre on peut factoriser ce pol en prod. de 2 pol de degré 2.

Def: Un pol. $P \in A[X]$ (non constant)
est dit réductible sur A s'il existe

$Q, R \in A[X]$ tq

$$P = QR \quad \text{et avec} \quad \begin{cases} 0 < \deg(Q) < \deg(P) \\ \text{et} \\ 0 < \deg(R) < \deg(P) \end{cases}$$

On dit que P est irréductible s'il n'est
pas réductible sur A

càd si $P = QR \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \deg(Q) &= \deg(P) \\ \text{ou} \\ \deg(R) &= \deg(P) \end{aligned}$$

Rem: On a tjrs

- $\deg(P+Q) \leq \max \{ \deg(P), \deg(Q) \}$

- $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$

↖ vrai si A est un corps p.ex: $\mathbb{Q}$
(ou un anneau
Intègre) $\mathbb{R}$
 $\mathbb{C}$

ex: 0) les constantes ne sont pas irréductibles

1) les pol. de degré 1 sont très irréductibles

$$\underbrace{x, 3x+1}_{\in \mathbb{Q}[x]}, \quad \underbrace{\sqrt{\pi}x - i}_{\in \mathbb{C}[x]}$$

2) $P(x) = x^2 + 3x + 2 = (x+2)(x+1)$
réductible sur $\mathbb{Z}$

3) $P(x) = x^2 + 1$ irréduct. sur $\mathbb{R}$
mais réductible sur $\mathbb{C}$

$$P(x) = x^2 + 1 = (x-i)(x+i)$$

$$4) x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x-1)(x+1)(x^2 + 1)$$

sur $\mathbb{C}$ $\searrow$
 $= (x-1)(x+1)(x-i)(x+i)$

factorisation
en fact.
irréductibles
sur $\mathbb{R}$

↑
la fact. en
irréductibles sur $\mathbb{C}$.

(Not
Rem: sur $\mathbb{C}$ on note par z la variable
au lieu de x .)

(Rem: les polynômes irréductibles
sont les "nombres premiers"
des polynômes)

4.3.2 Racines (zéros) et factorisations

ex: Trouver décomp. en fact. irréductibles

$$\text{de } P(z) = z^4 - z^2 - 2z - 1$$

sur $\mathbb{R}[z]$ et sur $\mathbb{C}[z]$

astuce

$$P(z) \stackrel{\downarrow}{=} z^4 - (z^2 + 2z + 1) = z^4 - (z+1)^2$$

↑ identité remarqu.

$$= (z^2 - (z+1))(z^2 + z + 1) = (z^2 - z - 1)(z^2 + z + 1)$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

↑ degré 2

$$P_1(z) = z^2 - z - 1$$

(irréductibles
sur $\mathbb{Q}$)

$$\Delta = 5 \quad z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

2 racines réelles

$$P_1(z) = \left(z - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \left(z - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \leftarrow \text{décomp. sur } \mathbb{R}$$

$$P_2(z) = z^2 + z + 1 \quad \Delta = -3$$

$$\omega_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

↙ décomp
sur $\mathbb{C}$

$$P_2(z) = \left(z - \left(-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\right) \left(z - \left(-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)\right)$$

Ainsi

$$P(z) = \left(z - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \left(z - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) (z^2 + z + 1)$$

décomp en fact. irréduct. sur $\mathbb{R}$ $\uparrow$
sur $\mathbb{C}$ $\downarrow$

$$P(z) = \left(z - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \left(z - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \left(z - \left(-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\right) \left(z - \left(-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)\right)$$

Rem : On va voir que si $z_0 \in A$
et tq $P(z_0) = 0$, alors

$$\exists Q \in A[z] \text{ tq}$$

$$P(z) = (z - z_0) Q(z).$$

donc trouver des racines est utile pour
factoriser des polynômes.

Théorème : $A =$ anneau commutatif
(ex : $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$)

Soit $P(X) \in A[X]$ avec $\deg(P) \geq 1$

et $x_0 \in A$. Alors il existe un unique
polynôme $F(X) \in A[X]$ tel que

$$\begin{cases} P(X) = (X - x_0)F(X) + P(x_0) \\ \text{et} \\ \deg(F) = \deg(P) - 1 \end{cases}$$

Rem/déf : le nombre $P(x_0)$ est appelé le
reste de la division de P par $X - x_0$

défin et schéma de Horner :

Posons $P(X) = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$ $a_i \in A$

on cherche $F(X) = b_{n-1} X^{n-1} + b_{n-2} X^{n-2} + \dots + b_1 X + b_0$

$$\text{t.q. } P(X) = (X - x_0)F(X) + P(x_0)$$

$$\text{donc } P(X) = (X - x_0)(b_{n-1} X^{n-1} + \dots + b_1 X + b_0) + P(x_0)$$

$$\begin{matrix} \nearrow \\ \text{mult} \\ \text{polynomiale} \end{matrix} = b_{n-1} X^n + (b_{n-2} - x_0 b_{n-1}) X^{n-1} + \dots$$

$$\dots + (b_0 - b_1 x_0)X + P(x_0) - x_0 b$$

on égale les coeff. de ces 2 polynômes : on a

$$a_n = b_{n-1}$$

$$a_{n-1} = b_{n-2} - x_0 b_{n-1}$$

$$a_{n-2} = b_{n-3} - x_0 b_{n-2}$$

⋮

$$a_1 = b_0 - x_0 b_1$$

$$a_0 = P(x_0) - x_0 b_0$$

⇒ en lisant de haut en bas et de droite à gauche

$$b_{n-1} = a_n$$

$$b_{n-2} = a_{n-1} + x_0 b_{n-1} = a_{n-1} + x_0 a_n$$

$$b_{n-3} = a_{n-2} + x_0 b_{n-2} = a_{n-2} + a_{n-1} x_0 + a_n x_0^2$$

⋮

$$b_1 = a_2 + b_2 x_0$$

$$b_0 = a_1 + b_1 x_0$$

$$\boxed{P(x_0) = a_0 + b_0 x_0}$$

qfd.

Schema de Horner

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_1	a_0	coeff de P
x_0		$b_{n-1}x_0$	$b_{n-2}x_0$		b_1x_0	b_0x_0	
		b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	b_0	$P(x_0)$	$\rightarrow +$

ex: Diviser $P(X) = X^3 + 7X^2 + 4X - 12$ per $X - 1$

$$x_0 = 1$$

	a_3	a_2	a_1	a_0
	1	7	4	-12
$x_0 = 1$		1	8	12
	1	8	12	0

$$b_2 \quad b_1 \quad b_0 \quad P(x_0) = \text{reste} = 0$$

$$\text{càd } P(X) = (X-1)(X^2 + 8X + 12)$$

$$= (X-1)(X+6)(X+2)$$

$$(X+a)(X+b) = X^2 + (a+b)X + ab$$

Rem : le thm précéd. donne

1) x_0 est racine de $P(x)$ (càd $P(x_0) = 0$)

$$\Leftrightarrow P(x) = (x - x_0) F(x)$$

càd P est divisible par $x - x_0$

2) s'il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et un pol $F(x)$

$$\text{t.q. } P(x) = (x - x_0)^n F(x)$$

$$\text{et } F(x_0) \neq 0$$

alors on dit que x_0 est une racine d'ordre n
du polynôme P de multiplicité n

3) Un polynôme de degré n , a au plus
 n racines distinctes
(zéros)

Problème : - comment trouver les racines ?
- Existe-t-il tjrs des racines ?
zéros ?

4.3.3 Théorème fondamental de l'algèbre (réelle)

Thm (Cauchy - Artin)

Tout polynôme non constant $P \in \mathbb{C}[z]$
admet au moins une racine complexe
càd $\exists z_0 \in \mathbb{C} \text{ tq } P(z_0) = 0$.

Corollaire :

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[z]$
sont les polynômes de degré 1.

et $\forall P(z) \in \mathbb{C}[z]$ avec $\deg P \geq 1$

$\exists n = \deg(P)$ nombres complexes $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$
et $d \in \mathbb{C}$

$$\text{tq } P(z) = d(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$$

les z_i sont les racines de P
(non nécessairement distinctes)

↑ factorisation totale
dans $\mathbb{C}$

Donc tout pol. ^{complexe} de degré $n \geq 1$ possède

n racines (comptées avec leur multiplicité).

Corollaire :

Si $P(z) \in \mathbb{R}[z]$ polynôme réel

alors, par le thm. précédent, $\exists z_0 \in \mathbb{C}$

t.q. $P(z_0) = 0$. Alors $\bar{z}_0$ est aussi

racine de P i.e. $P(\bar{z}_0) = 0$.

et donc P est divisible par

$$(z - z_0)(z - \bar{z}_0)$$

$$\text{càd } P(z) = \underbrace{(z - z_0)(z - \bar{z}_0)}_{\text{pol. réel aussi!}} Q(z) \quad Q(z) \in \mathbb{R}[z]$$

$$\begin{aligned} \text{en effet } (z - z_0)(z - \bar{z}_0) &= z^2 - (z_0 + \bar{z}_0)z + z_0\bar{z}_0 \\ &= z^2 - \underbrace{2\operatorname{Re}(z_0)}_{\in \mathbb{R}}z + \underbrace{|z_0|^2}_{\in \mathbb{R}} \end{aligned}$$

(démonstration sur demande)

Corollaire: Si $P(z) = az^2 + bz + c$

alors $P(z)$ possède $a, b, c \in \mathbb{R} \quad a \neq 0$

- soit deux racines réelles, distinctes ou confondues
- soit deux racines non réelles, conjuguées l'une de l'autre

Thm: Tout poly. $P(x) \in \mathbb{R}(x) \quad \deg P \geq 1$
s'écrit comme

$$P(x) = a (x - x_1)^{n_1} \cdots (x - x_p)^{n_p} (x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)^{m_1} \cdots (x^2 + \beta_q x + \gamma_q)^{m_q}$$

avec $a \in \mathbb{R}^*$

- x_i racines réelles distinctes
- n_i ordre des racines réelles (n.B. $n_i = 0$) on peut avoir
- (β_i, γ_i) tous diff. tq $\Delta_i = \beta_i^2 - 4\gamma_i < 0$
- $m_j \in \mathbb{N}$
- $n_1 + n_2 + \cdots + n_p + 2(m_1 + \cdots + m_q) = \deg(P)$.

ex: Décomposer = factoriser

$$P(X) = X^4 + 1 \quad \text{en fact. irréd. sur } \mathbb{R} \\ \text{sur } \mathbb{C}$$

racines dans $\mathbb{C}$:

$$X^4 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X^4 = -1$$

forme polaire $X = [r, \theta]$

$$X^4 = [r^4, 4\theta] = -1 = [1, \pi + k2\pi] \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow X = \left[1, \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right] \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

$$S = \left\{ \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \right\} \quad \text{dans } \mathbb{C}.$$

Facto
sur $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} X^4 + 1 &= \underbrace{\left(X - \overbrace{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)}^{z_0} \right) \left(X - \overbrace{\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} \right)}^{\bar{z}_0} \right)}_{(X^2 - \sqrt{2}X + 1)} \underbrace{\left(X - \overbrace{\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}} \right)}^{z_1} \right) \left(X - \overbrace{\left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}} \right)}^{\bar{z}_1} \right)}_{(X^2 + \sqrt{2}X + 1)} \\ &= (X^2 - \sqrt{2}X + 1) (X^2 + \sqrt{2}X + 1) \end{aligned}$$

↑ décomp. en fact. irréduct.
sur $\mathbb{R}$.

Rappel : $(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab$

Formules de Viète
pour le degré 2

Formules de Viète :

Soit $P(z) = d (z-z_1)(z-z_2) \dots (z-z_n)$

et soit $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ $d, z_i \in \mathbb{C}$

Alors :

$a_i \in \mathbb{C}$

$$\left\{ \begin{array}{l} d = a_n \quad (\text{banal}) \\ z_1 + z_2 + \dots + z_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ z_1 z_2 + z_1 z_3 + \dots + z_{n-1} z_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} z_i z_j = (-1)^2 \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ \vdots \\ z_1 z_2 \dots z_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \end{array} \right.$$

ex: $P(z) = a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$

$$P(z) = a_4 (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)$$

alors

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = -\frac{a_3}{a_4} \\ z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_1 z_4 + z_2 z_3 + z_2 z_4 + z_3 z_4 = \frac{a_2}{a_4} \\ z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2 z_4 + z_1 z_3 z_4 + z_2 z_3 z_4 = -\frac{a_1}{a_4} \\ z_1 z_2 z_3 z_4 = \frac{a_0}{a_4} \end{array} \right.$$

demander exo: pour $n=3$.