

§ 4.2 Forme polaire et transformations du plan complexe.

§ 4.2.1 Forme polaire

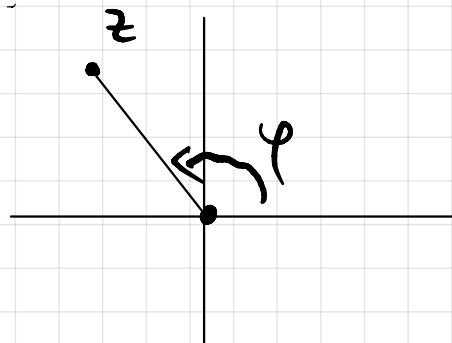
Déf: Pour $z \in \mathbb{C}$, on définit une forme polaire de z comme la donnée de

- la distance $r = |z|$ de $P(z)$ à $(0,0)$

$$\left(\text{càd } r = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \text{le module de } z \right. \\ \left. = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{si } z = a + ib \right)$$

- un angle $\varphi \in \mathbb{R}$ qui va de l'axe des réels à la droite portée par $z \neq 0$ dans le sens trigonométrique.

cet angle n'est pas unique
mais uniquement déterminé
à 2π près

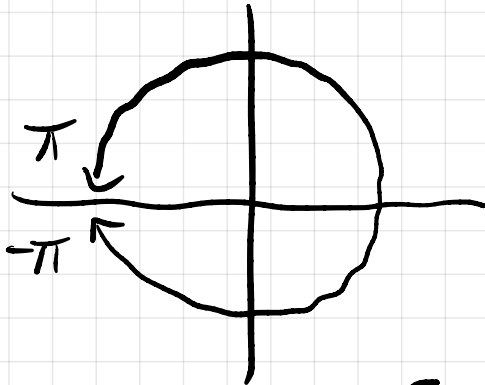


on écrit $z = [r, \varphi]$ avec

$$r = |z| \\ \varphi = \arg(z)$$

et on appelle φ un argument de z
(Par def. on pose $\arg(0) = 0$)

- lorsque $\arg(z) \in]-\pi, \pi]$
on parle de détermination principale
de l'argument de z .

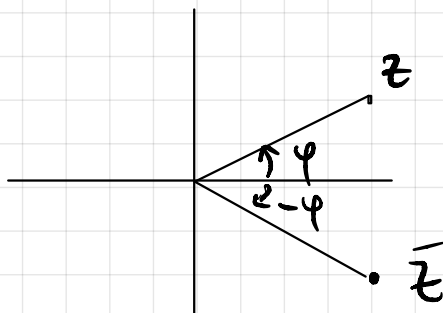


on appelle $z[r, \varphi]$ écriture polaire de z

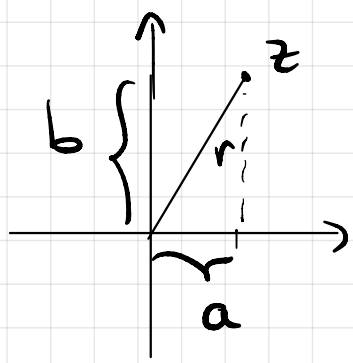
Propriétés: $z = [r, \varphi] \in \mathbb{C}$, alors
 $z' = [r', \varphi']$

$$1) z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \text{et} \\ \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \varphi = \varphi' + 2\pi k \end{cases}$$

$$2) \bar{z} = [r, -\varphi]$$



3) Passage de la forme polaire à la cartésienne



$$z = [r, \varphi]$$

$$\operatorname{Re}(z) = r \cdot \cos(\varphi)$$

$$\operatorname{Im}(z) = r \cdot \sin(\varphi)$$

de sorte que

$$z = [r, \varphi] \quad \Leftrightarrow \quad z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$$

4) Passage de la forme cart. à la polaire

soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$, alors $z = [r, \varphi]$

$$\text{où } \left\{ \begin{array}{l} r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{et} \\ \cos(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin(\varphi) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \tan(\varphi) = \frac{b}{a} \end{array} \right.$$

ces 3 conditions
déterminent
 φ uniquement
à 2π près

$$\left(\frac{z}{|z|} = \frac{a + ib}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} i \right)$$

examples:

$$1) z = \pm\sqrt{3} \pm i$$

(4 nombres complexes)

$$a = \pm\sqrt{3}$$

$$b = \pm 1$$

$$r = |z| = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\bullet z_{++} = \sqrt{3} + i \in \text{I}$$

$$\arg(z_{++}) = ?$$

$$\cos(z_{++}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(z_{++}) = \frac{1}{2}$$

$$\tan(z_{++}) = \frac{1}{\sqrt{3}} > 0$$

$$\Rightarrow \arg(z_{++}) = \frac{\pi}{6} + k2\pi$$

$$\bullet z_{+-} = \sqrt{3} - i \in \text{IV}$$

$$\arg(z_{+-}) = ?$$

$$\cos(z_{+-}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(z_{+-}) = -\frac{1}{2}$$

$$\tan(z_{+-}) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\arg(z_{+-}) = -\frac{\pi}{6} + k2\pi = \left(\frac{11}{6}\pi + k2\pi\right)$$

$$\bullet z_{-+} = -\sqrt{3} + i \in \text{II}$$

$$\cos = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \sin = \frac{1}{2}$$

$$\arg(z_{-+}) = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$$

$$\bullet z_{--} = -\sqrt{3} - i \in \text{III}$$

$$\arg(z_{--}) = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi$$

$$2) z = i^n$$

$$|z| = 1$$

$$n \in \mathbb{N} \quad (\text{ou } n \in \mathbb{Z})$$

$$i^1 = i = i^5$$

$$i^2 = -1 = i^6$$

$$i^3 = -i = i^7$$

$$i^4 = 1 = i^8$$

multiple de 4 + 1

$$\arg(i^n) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } n = 4k + 1 \\ \pi & \text{si } n = 4k + 2 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } n = 4k + 3 \\ 0 & \text{si } n = 4k \end{cases}$$

multiple de 4 + 3

multiple de 4

$$3) z = 7 - 10i \in \underline{\text{IV}}$$

$$|z| = \sqrt{7^2 + 10^2} = \sqrt{149}$$

$$\arg(z) = \varphi$$

$$\cos(\varphi) = \frac{7}{\sqrt{149}} > 0$$

$$\sin(\varphi) = -\frac{10}{\sqrt{149}} < 0$$

$$\text{or } \arccos\left(\frac{7}{\sqrt{149}}\right) \in \underline{\text{I}}$$

$$\text{mais } \arcsin\left(-\frac{10}{\sqrt{149}}\right) \in \underline{\text{IV}}$$

$$\text{done } \arg(z) = \varphi = \arcsin\left(-\frac{10}{\sqrt{149}}\right)$$

$$\left(\text{ou alors } \varphi = -\arccos\left(\frac{7}{\sqrt{149}}\right)\right)$$

4) écrire $z = \frac{1}{1+i}$ sous forme polaire (cf. exo 2 e)

$$z = \frac{1}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$|z| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \tan(\varphi) = -1$$

$$\sin(\varphi) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$$

$$\frac{1}{1+i} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\pi}{4} \right]$$

5) trouver la forme cart. de $z = \left[4, \frac{5\pi}{12} \right]$

$$z = 4 \left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \right)$$

$$\text{calcul de } \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{5\pi}{6}\right)$$

$$\left(\text{formule } \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}} \right)$$

$$\downarrow$$
$$= \textcircled{+} \sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)}{2}}$$

on prend +
car $\frac{5\pi}{12} \in \text{I}$

$$= \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

de même $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$

$$z = 4 \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} + 4 \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} \cdot i$$

$$= 2\sqrt{2 - \sqrt{3}} + 2\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot i$$

$$= \sqrt{8 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{8 + 4\sqrt{3}} \cdot i$$

$$\left(\begin{array}{l} 8 \pm 4\sqrt{3} = (\sqrt{6} \pm \sqrt{2})^2 \\ \uparrow \\ \text{(astuce!)} \quad 8 = 6 + 2 \end{array} \right) = \sqrt{6} - \sqrt{2} + (\sqrt{6} + \sqrt{2})i$$

§ Utilité de la forme polaire + écriture exponentielle

Rem: la forme cartésienne des nombres complexes
est pratique pour additionner ✓

la forme polaire est plus pratique
pour les produits de nombres complexes.

Proposition: Soient $z_1 = [r_1, \varphi_1] \in \mathbb{C}$
et $z_2 = [r_2, \varphi_2]$

Alors

$$1) \quad z_1 \cdot z_2 = [r_1 r_2, \varphi_1 + \varphi_2]$$

càd, les modules se multiplient
les arguments s'additionnent

2) si $z_2 \neq 0$, alors

$$\frac{z_1}{z_2} = \left[\frac{r_1}{r_2}, \varphi_1 - \varphi_2 \right]$$

(càd:
diviser les
modules
et soustraire
les arguments)

3) Formule (de) de Moivre

Pour $z = [r, \varphi]$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a

$$z^n = [r^n, n\varphi]$$

sous forme cartésienne :

$$z = r \cos(\varphi) + r \sin(\varphi)i = r (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$$

$$z^n = r^n (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))^n = r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$$

pour $n=1$ on obtient

$$(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)$$

ex : $n=2$

calcul

$$(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))^2 \stackrel{\text{calcul}}{=} \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi) + 2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) \cdot i$$

$$\text{de Moivre} \Rightarrow \cos(2\varphi) + i \sin(2\varphi)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos(2\varphi) = \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi) \\ \sin(2\varphi) = 2\cos(\varphi)\sin(\varphi) \end{cases} \quad \text{d\u00e9j\u00e0 vu}$$

+ g\u00e9n\u00e9ral. de Moivre permet de calculer

$$\left. \begin{matrix} \cos((n+1)\varphi) \\ \sin((n+1)\varphi) \end{matrix} \right\} \text{ en fonction de } \cos(n\varphi) \text{ et } \sin(n\varphi)$$

$$\Rightarrow \text{Formules pour } \cos(3\varphi), \sin(3\varphi)$$

$$\cos(4\varphi), \sin(4\varphi)$$

+ g\u00e9n\u00e9ral.

$$\cos(n\varphi) = T_n(\cos(\varphi))$$

o\u00f9 T_n est le n\u00e8me polyn\u00f4me
de Tchebichev

ex: $z_1 = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{12} \right]$, $z_2 = \left[\sqrt{6}, -\frac{5\pi}{6} \right]$

1) $z_1 z_2 = \left[\sqrt{2} \sqrt{6}, \frac{\pi}{12} + \left(-\frac{5\pi}{6} \right) \right]$
 $= \left[2\sqrt{3}, -\frac{9\pi}{12} \right] = \left[2\sqrt{3}, -\frac{3\pi}{4} \right]$

2) $z_1^6 = \left[\sqrt{2}^6, \frac{6\pi}{12} \right] = \left[8, \frac{\pi}{2} \right] = 8i$

⚠ ne pas utiliser
la forme cartésienne !

3) $\frac{z_1}{z_2} = \left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}, \frac{\pi}{12} - \left(-\frac{5\pi}{6} \right) \right]$
 $= \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{11\pi}{12} \right] = \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{11\pi}{12} \right]$

Rem / Not: On note, pour $z = (r, \varphi)$,

$z = r \cdot e^{i\varphi}$ & la notation exponentielle

avec cette notation on a

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1 e^{i\varphi_1}) (r_2 e^{i\varphi_2})$$

$$= r_1 r_2 e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2}$$

$$\hookrightarrow = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$(e^{a+b} = e^a \cdot e^b)$$

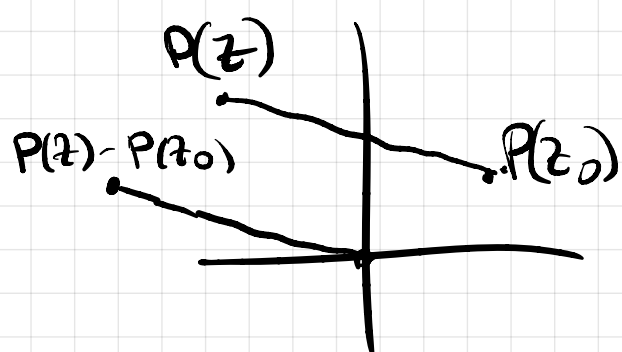
(NB : on peut définir e^z pour $z \in \mathbb{C}$
 et montrer que
 $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$
 voir Analyse III ou IV)

§ 4.2.2 Éléments de géométrie et transformation du plan complexe

(Argand ~ 1750 $\mathbb{C} \leftrightarrow \mathbb{R}^2$)

Rem: Soit $z, z_0 \in \mathbb{C}$ et $P(z), P(z_0)$
les points
dans $\mathbb{R}^2$
correspondant

$$1) \text{dist}(P(z), P(z_0)) = |z - z_0| = |z_0 - z|$$



2) Eq. du cercle centré en $z_0 \in \mathbb{C}$
et de rayon $R > 0$

$$|z - z_0| = R$$

ou de façon équivalente

$$|z - z_0|^2 = R^2$$

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z}$$

ou encore

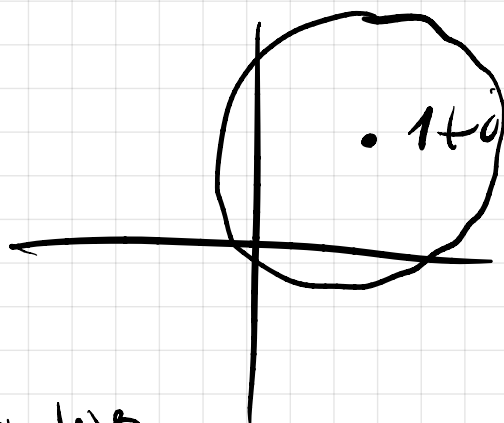
$$(z - z_0) \overline{(z - z_0)} = R^2$$

cas particulier $z_0 = 0$

cercle centré à l'origine de rayon R

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 = R^2$$

ex: $z_0 = 1+i$ $R = 2$



$$|z - (1+i)|^2 = 4$$

$$z = x + iy$$

← écriture complexe
d'un cercle dans $\mathbb{C}$.

$$|x + iy - (1+i)|^2 = 4$$

$$|(x-1) + (y-1)i|^2 = 4$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$$

↙ écriture
usuelle
d'un cercle
dans $\mathbb{R}^2$

Transformations du plan

1) Translations : l'addition dans $\mathbb{C}$

cà d pour

$$z_0 = a + ib$$

l'application

$$\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto z + z_0$$

est une translation

de vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

2) Homothéties : Dans $\mathbb{C}$, la mult.
par $\lambda \in \mathbb{R}$ est une
homothétie, car

$$\begin{cases} |\lambda z| = |\lambda| |z| \\ \arg(\lambda z) = \begin{cases} \arg(z) & \text{si } \lambda > 0 \\ \arg(z) + \pi & \text{si } \lambda < 0 \end{cases} \end{cases}$$

3) Rotations : La mult. dans $\mathbb{C}$
par un complexe
de module 1, $w = [1, \alpha]$

est une rotation
centrée en $(0,0)$
d'angle α

en effet : si $z = [r, \varphi]$

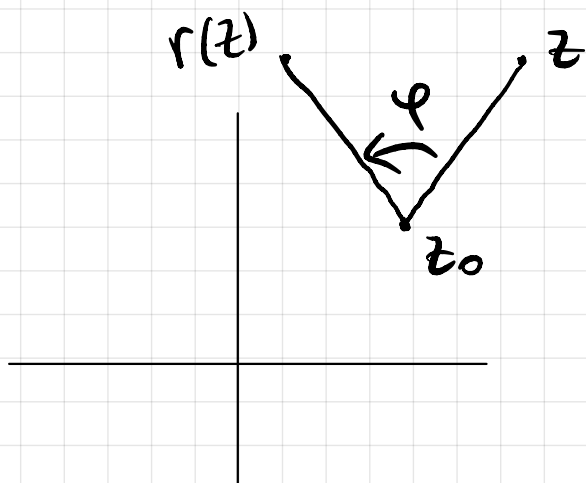
$$\text{alors } z \cdot w = [r, \varphi] \cdot [1, \alpha] = [r, \varphi + \alpha]$$

4) Similitudes = rotation composée
avec homothétie

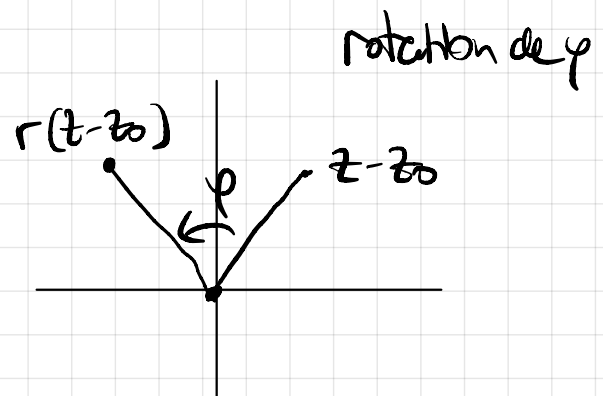
la mult. par $w = [\lambda, \alpha]$ est
une similitude ;

$$z \cdot w = [r, \varphi] \cdot [\lambda, \alpha] = [r\lambda, \varphi + \alpha]$$

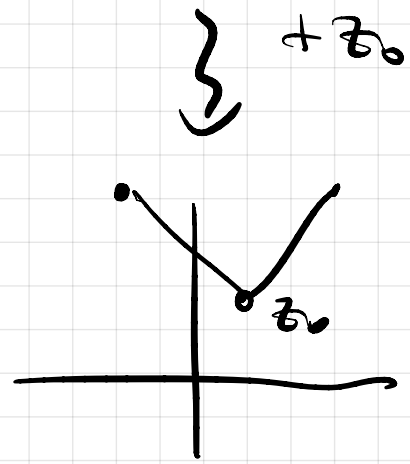
ex : Rot. autour de $z_0 \in \mathbb{C}$, d'angle φ



$-z_0$
 $\rightsquigarrow$



}

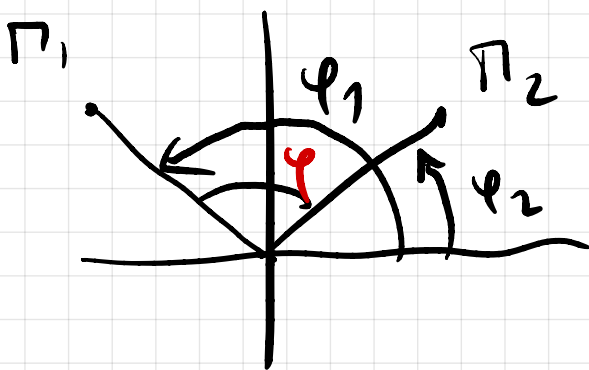


rotation
autour de $z_0 = \left(\begin{smallmatrix} \text{transl.} \\ \text{de } +z_0 \end{smallmatrix} \right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} \text{rotation} \\ \text{d'angle } \varphi \end{smallmatrix} \right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} \text{translation} \\ \text{de } -z_0 \end{smallmatrix} \right)$

$$r(z) = e^{i\varphi} (z - z_0) + z_0$$

$$r(z) = (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) (z - z_0) + z_0$$

ex: Pour $\pi_1, \pi_2 \in \mathbb{R}^2$
donner l'angle $\widehat{\pi_2, \pi_1}$



$$z_1 = [r_1, \varphi_1]$$

$$z_2 = [r_2, \varphi_2]$$

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

$$\varphi = \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$$

ex: $z_1 = 1+3i$ $z_2 = 2+i$

$$\begin{aligned} \widehat{\pi_2 \circ \pi_1} = \varphi &= \arg(z_1) - \arg(z_2) \\ &= \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \end{aligned}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+3i}{2+i} = \frac{(1+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{5+5i}{5} = 1+i$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\pi}{4} = \varphi$$

§ Racines n-èmes de nombres complexes

Thm: Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, l'ens. des solutions de l'éq.

$$\omega^n = 1$$

est

les racines
n-èmes
de 1

$$S = \left\{ \left[1, k \cdot \frac{2\pi}{n} \right] \mid k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \right\}$$

en effet écrivons $w = [r, \varphi]$

$$w^n = [r^n, n\varphi] = 1 = [1, 0]$$

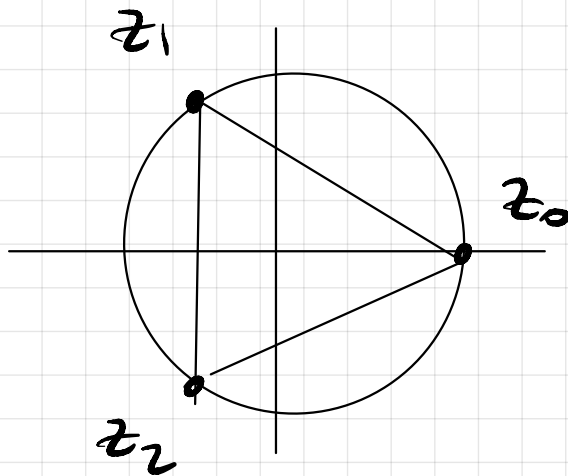
$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^n = 1 \\ \text{et} \\ n\varphi = 0 + k2\pi \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = 1 \\ \text{et} \\ \varphi = k \cdot \frac{2\pi}{n} \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

dessin :

$$\underline{n=3}$$

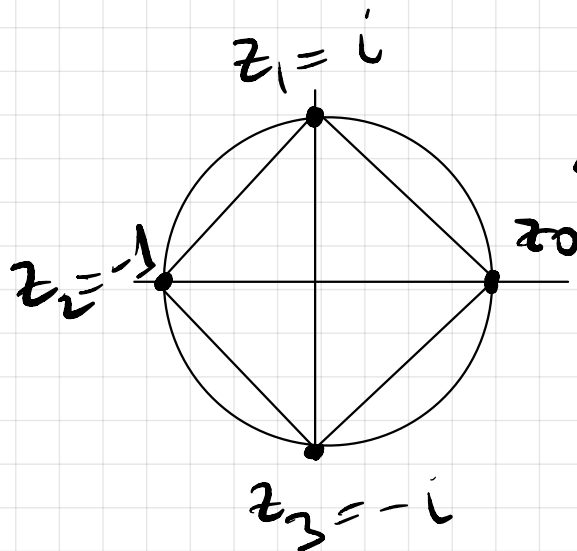
$$w^3 = 1$$



triangle
équil.

$$\underline{n=4}$$

$$w^4 = 1$$



carre

$$\underline{n=5}$$

