

Chap. 4 :

les nombres complexes

Cours 9

29.04.24

Analyse A

(G. Favi)

Intro :

(aka imaginaires)

Problème de $\mathbb{R}$: -1 n'est pas un carré dans $\mathbb{R}$

Conséquence : certaines eq. n'ont pas de sol.

par ex $x^2 + 1 = 0$

~ 1550 : Ferrari - Cardano : formules pour
"imaginaires" l'eq. du 3^{ème} et 4^{ème} degré

~ 1800 : Gauss - Euler

$\sqrt{-64}$, ...

"plan complexe"

il y a 4 façon d'introduire les nombres complexes

1. terre-à-terre ← **rows**

2. via les matrices 2×2 ←

(3. via les polynômes $\mathbb{R}[X]$ modulo $x^2 + 1$)

(4. via la construction de Cayley - Hamilton 1919)

Intro(2) (G. Favi) Regardons

$$\mathbb{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

sous-ens. de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$

tout élém. $z \in \mathbb{C}$ s'écrit comme

$$\begin{aligned} z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} \\ &= a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_1 + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{:= i} \end{aligned}$$

↑ élém. neutre
pour la mult. matricielle

$i := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ = rotation autour de $(0,0)$
d'angle $\frac{\pi}{2}$

$$\text{on a } i^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

Rem: $\mathbb{C}$ est un sous-anneau de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$
càd si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ alors $\begin{cases} z_1 + z_2 \in \mathbb{C} \\ z_1 z_2 \in \mathbb{C} \end{cases}$

§4.1 Forme cartésienne

Définition (terre-à-terre)

- Nous posons

$$\mathbb{C} = \{ z = a + ib \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$

qu'on appelle ens. des nombres complexes
(imaginaires)

la forme, $z = a + ib$ est la forme cartésienne de z

le nombre $a = \operatorname{Re}(z)$ = la partie réelle de z

" " $b = \operatorname{Im}(z)$ = " " imaginaire de z

de sorte $z = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z)$

et $z = z'$ (dans $\mathbb{C}$)



$$\begin{cases} \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') \\ \text{et} \\ \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z') \end{cases}$$

- Pour $z \in \mathbb{C}$, on dira que z est imaginaire pur si $\operatorname{Re}(z) = 0$. (Ainsi $z = ib$)

• z est réel pur si $\text{Im}(z) = 0$
($z = a \quad a \in \mathbb{R}$)

• Not: $i\mathbb{R} = \{ib \mid b \in \mathbb{R}\} = \text{imaginaires pures}$
 $\mathbb{R} = \{a + i0 \mid a \in \mathbb{R}\} = \text{réels pures}$

(Rem: 0 est imaginaire pur et réel pur c'est le seul)

Ainsi $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ Inclusion
 $a \mapsto a + i0$

§ 4.1.2 Identification entre $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$

$\forall z = a + ib \in \mathbb{C}$ correspond à un point

$$P(z) = (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ a + ib &\mapsto (a, b) \\ a + ib &\leftarrow (a, b) \end{aligned}$$

via cette identification on parle du plan complexe
ou plan de Gauss

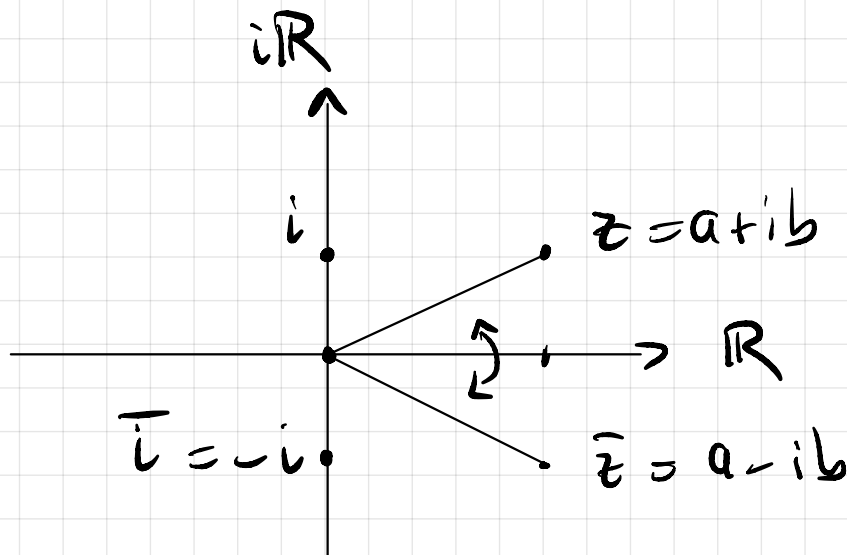
Def: Pour $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On pose

$$\bar{z} = a - ib \in \mathbb{C}$$

c'est le conjugué de z ,

Geom. il correspond au symétrique de z par rapport à l'axe des réels (p.r.)

Graph:



ex: $\bar{i} = \overline{0 + 1 \cdot i} = 0 - 1i = -i$

Rem en termes matriciels

$$z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad \bar{z} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = z^T$$

↑
transposée
de z

Rem: Pour $z \in \mathbb{C}$ on a

$$z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$$

$$z \in i\mathbb{R} \iff z = -\bar{z}$$

§ 4.1.3 Opérations sur $\mathbb{C}$

(structure de corps commutatif sur $\mathbb{C}$)

$$\forall \begin{array}{l} z = a + ib \\ z' = a' + ib' \end{array} \quad a, a', b, b' \in \mathbb{R} \quad \text{on pose}$$

Somme: $z + z' \stackrel{\text{def}}{:=} (a + a') + i(b + b')$

$$\text{càd } \begin{cases} \text{Re}(z + z') = \text{Re}(z) + \text{Re}(z') \\ \text{Im}(z + z') = \text{Im}(z) + \text{Im}(z') \end{cases}$$

addition comp. par composante
(correspond à l'addition métricielle)

Produit: $z \cdot z' = (a+ib) \cdot (a'+ib')$

$$\stackrel{\text{dét}}{=} (aa' - bb') + i(a'b + ab')$$

cà d

$$\begin{cases} \text{Re}(z \cdot z') = \text{Re}(z)\text{Re}(z') - \text{Im}(z)\text{Im}(z') \\ \text{Im}(z \cdot z') = \text{Re}(z')\text{Im}(z) + \text{Re}(z)\text{Im}(z') \end{cases}$$

en termes matriciels c'est juste la multiplication matricielle usuelle :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}}_z \underbrace{\begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix}}_{z'} = \begin{pmatrix} aa' - bb' & -ab' - ba' \\ a'b + ab' & aa' - bb' \end{pmatrix}$$

Rem: similitude avec les formules pour $\cos(\alpha+\beta)$ et $\sin(\alpha+\beta)$

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

Produits particuliers : Pour $z = a + ib \in \mathbb{C}$
et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

• $\lambda z = \lambda a + i \lambda b$ (homothétie par un réel)

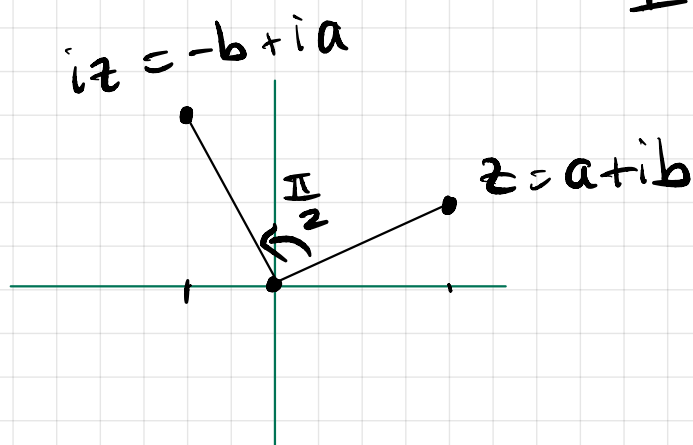
• $iz = i(a + ib) = ia + i(ib)$
 $= ia + \underbrace{i^2}_{-1} b = ia - b$
 $= -b + ia$

• $z^2 = z \cdot z = (a + ib)(a + ib)$
 $= a^2 + iab + iba + \underbrace{i^2 b^2}_{-b^2}$
 $= a^2 - b^2 + i2ab$

Rem : i correspond à $(0, 1)$ et
on a bien $i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1)$
 $= \underbrace{0 \cdot 0 - 1 \cdot 1}_{-1} + \underbrace{(0 \cdot 1 + 1 \cdot 0)}_0 i$

Mult. par i :

$\equiv$
rotation
d'angle $\frac{\pi}{2}$



Rem: Dans $\mathbb{C}$ les identités remarquables restent valables

$$(z + z')^2 = z^2 + 2zz' + z'^2$$

$$(z + z')^3 = \dots$$

$$(z + z')^n = \dots$$

ex: $(1+i)^2 = 1 + 2i + \overbrace{i^2}^{-1} = 2i$

Adm: $\mathbb{C}$ est un anneau commutatif
(càd $+$, $\cdot$ se distribuent)
où l'éq. $z^2 = -1$ admet
2 solutions $\begin{matrix} i \\ -i \end{matrix}$

Propriétés : Pour $z, z' \in \mathbb{C}$ on a

$$1. \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

$$2. \overline{\bar{z}} = z$$

$$3. \operatorname{Re}(\bar{z}) = \operatorname{Re}(z), \quad \operatorname{Im}(\bar{z}) = -\operatorname{Im}(z)$$

$$4. \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$$

$$5. \overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z'}$$

$$6. z \cdot \bar{z} = \operatorname{Re}^2(z) + \operatorname{Im}^2(z) = a^2 + b^2$$

$$7. z = \bar{z} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0$$

$$\bar{z} = -z \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$$

(dém. vérif. facile
directe)

Int. géométrique :

a) $\bar{z}$ = symétrique de z p.r. à l'axe Ox

b) eq. droite verticale

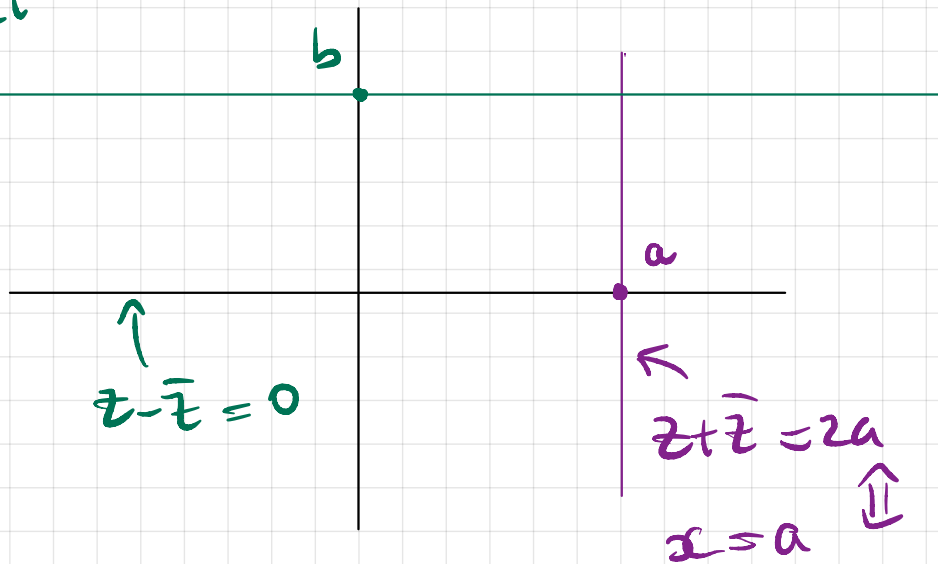
dans $\mathbb{R}^2$	dans $\mathbb{C}$
$x = a$	$\operatorname{Re}(z) = a$
	$\boxed{z + \bar{z} = 2a}$
$y = b$	$\operatorname{Im}(z) = b$

c) eq. droite horiz.

$$z - \bar{z} = 2ib$$

$$\Leftrightarrow z - \bar{z} = 2ib$$

$$\Leftrightarrow y = b$$

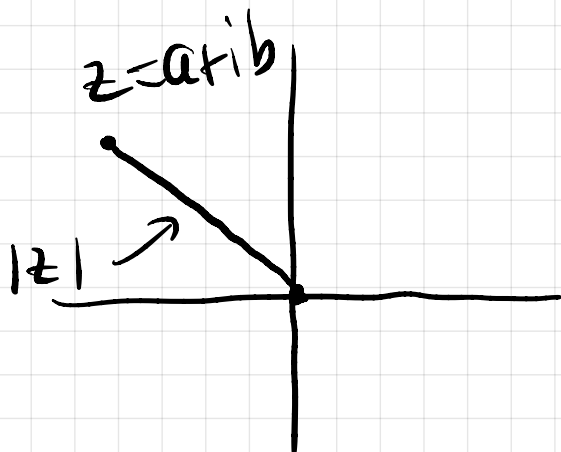


Def : $\forall z = a + ib \in \mathbb{C}$, le module de z
noté $|z|$, est le nombre

$$|z| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\text{Re}^2(z) + \text{Im}^2(z)}$$

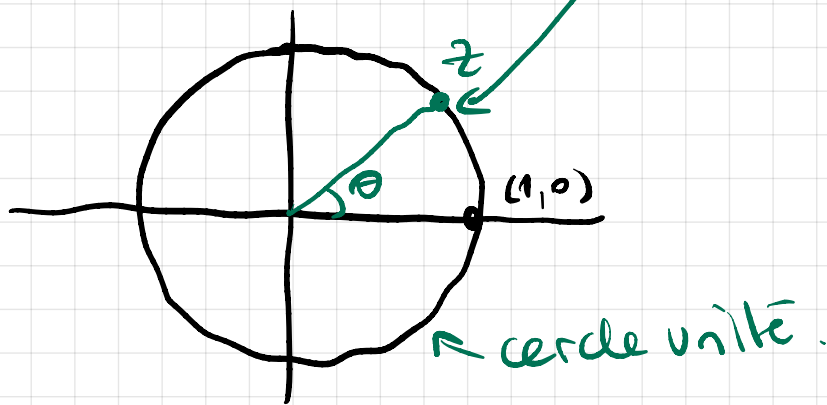
(de sorte que $|z|^2 \stackrel{\text{def}}{=} z \bar{z}$)

Geom. $|z|$ = la distance de $(0,0)$ au point
 $P(z) = (a,b)$



Ex : $z_\theta = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ $\theta \in \mathbb{R}$

$$|z| = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = \sqrt{1} = 1$$



(Rem: en termes matriciels

$$z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \bar{z} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$z \cdot \bar{z} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

$\downarrow \det \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

de sorte que $|z| = \sqrt{\det \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}}$

Propriétés du module : $\forall z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

• $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ et $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$

• $|z| = |\bar{z}|$

• si $z \neq 0$, alors $\frac{1}{z}$ existe dans $\mathbb{C}$

+ prèds.

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

$$\bullet |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (s' \text{ } z_2 \neq 0)$$

$$\bullet |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad (\text{inégalité triangulaire})$$

Rem: Avec ces opérations

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ est un corps commutatif

$$\bullet 0 = 0 + i \cdot 0 \quad (\text{él. neutre pour } +)$$

$$\bullet -z = -a - ib \quad (\text{opposé pour } +)$$

$$\bullet 1 = 1 + i \cdot 0 \quad (\text{él. neutre pour } \cdot)$$

$$\bullet \text{ si } z \neq 0, \quad z = a + ib \quad (i.e. (a,b) \neq (0,0))$$

$$\text{donc } z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{en termes} \\ \text{matriciels} \end{array} \quad z^{-1} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1} \quad \begin{array}{l} \text{l'inverse} \\ \text{matriciel} \end{array} \right)$$

l'existence de l'inverse dans $\mathbb{C}$ permet de
définir la division, pour $z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\frac{z_1}{z_2} \stackrel{\text{def}}{=} z_1 \cdot z_2^{-1} = z_1 \cdot \frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2}$$

ex :

$$\frac{7}{2+\sqrt{3}i} = \frac{7}{2+\sqrt{3}i} \cdot \frac{2-\sqrt{3}i}{2-\sqrt{3}i}$$
$$= \frac{7 \cdot (2-\sqrt{3}i)}{\underbrace{2^2 + \sqrt{3}^2}_7} = 2-\sqrt{3}i$$

$$\left(\text{et donc } (2+\sqrt{3}i)^{-1} = \frac{2-\sqrt{3}i}{7} \right)$$

Remarque :

On a ajouté à $\mathbb{R}$ "les racines carrées de -1 "
càd $\{\pm i\}$ et ceci donne les formules
de Viète pour tout pol. de degré deux.

Thm (Viète pour $\mathbb{C}$). Pour $a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0$

l'équation $az^2 + bz + c = 0$

a comme ens. solution

$$S = \left\{ \frac{-b \pm \delta}{2a} \right\}$$

où $\delta \in \mathbb{C}$ tq $\delta^2 = \Delta = b^2 - 4ac$

ex: $x^2 + x + 1 = 0$ $\Delta = 1 - 4 = -3$

$$\delta = i\sqrt{3}$$

vérifie $\delta^2 = -3$

$$S = \left\{ \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \right\}$$

Encore mieux. On pourra résoudre des équations
de degré n quelconque

$$x^{1291} = 1 \quad \text{— possède 1 sol. dans } \mathbb{R}$$

$$x^n = 1 \quad \text{possède } n \text{ sol.}$$



n -polyg.

possède 1291
sol. dans $\mathbb{C}$

§ 4.1.4 Puissances & racines

Def: Pour $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\text{on pose } z^n = \underbrace{z \cdot \dots \cdot z}_{n \text{ facteurs}}$$

et si $z \neq 0$ on a les exposants négatifs

$$z^{-1} = \frac{1}{z}, \quad z^{-2} = \frac{1}{z^2}, \quad \dots, \quad z^{-n} = \frac{1}{z^n}$$

avec les règles usuelles

$$(z^n)^m = z^{nm}$$

$$z^n \cdot z^m = z^{n+m}$$

ex: $i^{2023} = i^{2020} \cdot i^3 = (i^4)^{505} \cdot i^3$
 $= (1)^{505} \cdot i^3 = -i$

$$(i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1) \leftarrow \text{puissances de } i$$
$$i^{2024} = (i^4)^{506} = 1$$

ex: $(1+i)^4 = (1+i)^2 (1+i)^2 = (2i)(2i) = 4i^2 = -4.$

$$(1+i)^8 = (1+i)^4 (1+i)^4 = 16$$

Def: Soit $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Tout nombre $w \in \mathbb{C}$ qui vérifie

$$w^n = z$$

s'appelle une racine n-ème de z.

ex: i et $-i$ sont les 2 racines 2-èmes de -1

ex: racines cubiques de -1

$$w^3 = -1 \iff w^3 + 1 = 0$$

-1 est racine : on peut diviser $w^3 + 1$ par $w + 1$
évidente

$$\Rightarrow w^3 + 1 = \overset{\text{division polynomiale}}{(w + 1)}(w^2 - w + 1)$$

sol. de $w^2 - w + 1 = 0$ par Viète

$$w_{1,2} = \frac{1 \pm \delta}{2}$$

$$\text{ou } \delta^2 = -3$$

$$\delta = i\sqrt{3}$$

$$= \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

et on vérifie que

$$\left(\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} (1^3 \pm 3\sqrt{3}i - 3\sqrt{3}^2 \mp 3\sqrt{3}i) \\ = -1.$$

Cas particulier : Racines carrées dans $\mathbb{C}$

Pour $z = a + ib$

On cherche tous les $w = \alpha + i\beta$

$$\text{t.q. } w^2 = z$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + i\beta)^2 = a + ib$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 + i2\alpha\beta = a + ib$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = a \\ 2\alpha\beta = b \end{cases} \quad \text{en part. } \text{sign}(\alpha\beta) = \text{sign}(b)$$

Remarquons aussi que $|w^2| = |w|^2 = \alpha^2 + \beta^2$
donc on doit avoir

$$\alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$$

$$\text{donc } w^2 = z \iff \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = a \\ 2\alpha\beta = b \quad (\text{sgn}(\alpha\beta) = \text{sgn}(b)) \\ \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$

↗ pas trop dur!

ex : racines carrées de i

$$w = \alpha + i\beta \quad \text{t.q.} \quad w^2 = i$$

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = 0 = \text{Re}(i) \\ \alpha^2 + \beta^2 = 1 = |i| \\ \text{sgn}(\alpha\beta) = \text{sgn}(b) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha^2 = \beta^2 \\ 2\alpha^2 = 1 \\ \text{sgn}(\alpha\beta) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha^2 = \beta^2 = \frac{1}{2} \\ \alpha^2 = \frac{1}{2} \\ \text{sgn}(\alpha\beta) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \beta \\ \alpha &= -\frac{1}{\sqrt{2}} = \beta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow w = \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

Fin cours 9

(Série 9 → Bch 2201 pour le groupe 3.)