Analyse A Mise à Niveau, EPFL

Série 09: Fonctions trigonométriques réciproques

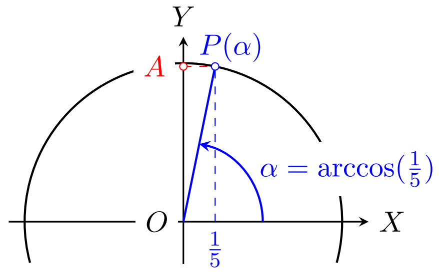
***Ex*-09-01**: *Calculer, sans machine, les valeurs suivantes :*

a) $\sin(\arccos(\frac{1}{5}))$ *b)* $\tan(\pi - \arctan(2))$ *c)* $\cos(2\arccos(\frac{2}{5}))$

d) $\arccos(\cos(\frac{17\pi}{3}))$ *e)* $\arctan(\tan(-\frac{7\pi}{12}))$ *f)* $\arcsin(\cos(-\frac{7\pi}{12}))$

a) On exprime $A = \sin(\arccos(\frac{1}{5}))$ à l'aide de la fonction cosinus en utilisant la relation de Pythagore :

$$\begin{aligned} A^2 &= \sin^2\left(\arccos\left(\tfrac{1}{5}\right)\right) \\ &= 1 - \cos^2\left(\arccos\left(\tfrac{1}{5}\right)\right) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{24}{25}\,. \end{aligned}$$



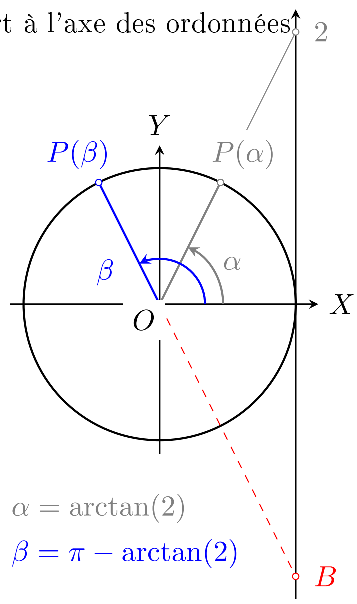
Or $\alpha = \arccos(\frac{1}{5})$ est un angle qui appartient à l'intervalle $[\,0\,,\,\pi\,]$, on en déduit donc que son sinus est positif :

$$A = +\sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}\,.$$

b) Les points $P(\alpha)$ et $P(\pi - \alpha)$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

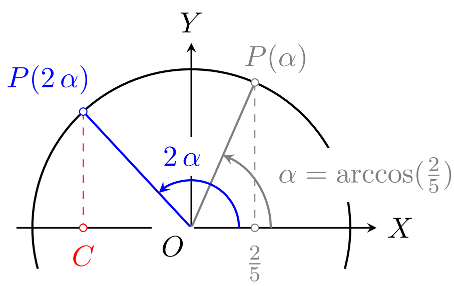
On en déduit que $\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha\,.$

$$\begin{aligned} B &= \tan(\pi - \arctan(2)) \\ &= -\tan(\arctan(2)) \\ &= -2\,. \end{aligned}$$



c) On utilise l'expression du cosinus de l'angle double : $\cos(2\,\alpha) = 2\,\cos^2(\alpha) - 1\,.$

$$\begin{aligned} C &= \cos\left(2\,\arccos\left(\tfrac{2}{5}\right)\right) \\ &= 2\,\cos^2\left(\arccos\left(\tfrac{2}{5}\right)\right) - 1 \\ &= 2\left(\frac{2}{5}\right)^2 - 1 \\ &= -\frac{17}{25}\,. \end{aligned}$$



d) On cherche à exprimer $\cos(\frac{17\pi}{3})$ comme le cosinus d'un angle appartenant à la détermination principale du cosinus : $[\,0\,,\,\pi\,]$.

$\cos(\frac{17\pi}{3}) = \cos(\frac{18\pi}{3} - \frac{\pi}{3}) = \cos(-\frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{3})$.

D'où : $\arccos(\cos(\frac{17\pi}{3})) = \arccos(\cos(\frac{\pi}{3})) = \dfrac{\pi}{3}$.

e) On cherche à exprimer $\tan(-\frac{7\pi}{12})$ comme la tangente d'un angle appartenant à la détermination principale de la tangente : $]-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}[$.

$\tan(-\frac{7\pi}{12}) = \tan(-\frac{7\pi}{12} + \pi) = \tan(\frac{5\pi}{12})$.

D'où : $\arctan(\tan(-\frac{7\pi}{12})) = \arctan(\tan(\frac{5\pi}{12})) = \dfrac{5\pi}{12}$.

f) On cherche à exprimer $\cos(-\frac{7\pi}{12})$ comme le sinus d'un angle appartenant à la détermination principale du sinus : $[-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}]$.

$\cos(-\frac{7\pi}{12}) = \sin[\,\frac{\pi}{2} - (-\frac{7\pi}{12})\,] = \sin(\frac{13\pi}{12}) = \sin(\pi - \frac{13\pi}{12}) = \sin(-\frac{\pi}{12})$.

D'où : $\arcsin(\cos(-\frac{7\pi}{12})) = \arcsin(\sin(-\frac{\pi}{12})) = -\dfrac{\pi}{12}$.

Ex-09-02: *Résoudre les équations et inéquations suivantes sur l'intervalle donné :*

a) $\sin x = -\frac{2}{3}$, $x \in [\,0\,,\,2\pi\,]$,

b) $\sin(2x) = \frac{2}{3}$, $x \in [-\pi\,,\,0\,]$,

c) $\cos(\frac{x}{2}) = \frac{1}{3}$, $x \in [\,\pi\,,\,3\pi\,]$,

d) $\tan x = -\frac{3}{2}$, $x \in [\,0\,,\,2\pi\,]$,

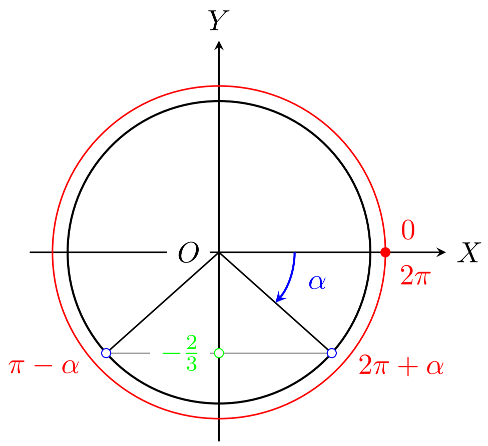
e) $\cos(2x) > -\frac{3}{4}$, $x \in [\,0\,,\,2\pi\,]$,

f) $\tan(2x) \geq 2$, $-\pi \leq x \leq 0$.

a) Résolution de l'équation $\sin x = -\frac{2}{3}$ sur l'intervalle $[\,0\,,\,2\pi\,]$.

- Résolution sur $\mathbb{R}$

$$\sin x = -\frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\,k\,\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\,k\,\pi \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$



- Résolution sur l'intervalle $[\,0\,,\,2\pi\,]$

Soit $\alpha = \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)$.

Sur l'intervalle $[\,0\,,\,2\pi\,]$, l'équation $\sin x = -\frac{2}{3}$ admet deux solutions

* l'une est engendrée par $\alpha + 2k\pi$ avec $k = 1$,
* l'autre est engendrée par $\pi - \alpha + 2k\pi$ avec $k = 0$.

$$S = \left\{\pi - \arcsin\left(-\tfrac{2}{3}\right)\ ,\ 2\pi + \arcsin\left(-\tfrac{2}{3}\right)\right\},$$

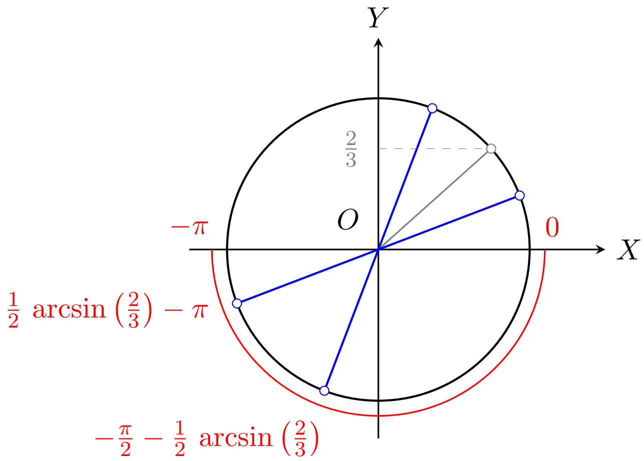
$$\text{ou} \qquad S = \left\{\pi + \arcsin\left(\tfrac{2}{3}\right)\ ,\ 2\pi - \arcsin\left(\tfrac{2}{3}\right)\right\}.$$

b) Résolution de l'équation $\sin(2x) = \frac{2}{3}$ sur l'intervalle $[-\pi\,,\,0]$.

- Résolution sur $\mathbb{R}$

$$\sin(2x) = \frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x = \arcsin\left(\frac{2}{3}\right) + 2\,k\,\pi \\ \text{ou} \\ 2x = \pi - \arcsin\left(\frac{2}{3}\right) + 2\,k\,\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2}{3}\right) + k\,\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2}{3}\right) + k\,\pi \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}.$$



- Résolution sur l'intervalle $[-\pi\,,\,0]$

Sur l'intervalle $[-\pi\,,\,0]$, l'équation $\sin(2x) = \frac{2}{3}$ admet deux solutions

* l'une est engendrée par $\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2}{3}\right) + k\,\pi$ avec $k = -1$,
* l'autre est engendrée par $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2}{3}\right) + k\,\pi$ avec $k = -1$.

$$S = \left\{\tfrac{1}{2}\arcsin\left(\tfrac{2}{3}\right) - \pi\,,\ -\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{1}{2}\arcsin\left(\tfrac{2}{3}\right)\right\}.$$

c) Résolution de l'équation $\cos(\frac{x}{2}) = \frac{1}{3}$ sur l'intervalle $[\pi\,,\,3\pi]$.

- Résolution sur $\mathbb{R}$

$$\cos(\tfrac{x}{2}) = \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{x}{2} = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) + 2\,k\,\pi \\ \text{ou} \\ \frac{x}{2} = -\arccos\left(\frac{1}{3}\right) + 2\,k\,\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 2\arccos\left(\frac{1}{3}\right) + 4\,k\,\pi \\ \text{ou} \\ x = -2\arccos\left(\frac{1}{3}\right) + 4\,k\,\pi \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

- Résolution sur l'intervalle $[\pi\,,\,3\pi\,]$

  Sur l'intervalle $[\pi\,,\,3\pi\,]$, l'équation $\cos(\frac{x}{2}) = \frac{1}{3}$ n'admet pas de solution.

  $*$ Pour $k = 0$, les deux solutions sont inférieures à π.

  En effet $\quad 0 < \arccos\left(\frac{1}{3}\right) < \frac{\pi}{2}$, $\quad$ d'où

$$0 < 2\,\arccos\left(\tfrac{1}{3}\right) < \pi \quad \text{et} \quad -\pi < -2\,\arccos\left(\tfrac{1}{3}\right) < 0\,.$$

  $*$ Pour $k = 1$, les deux solutions sont supérieures à 3π. En effet :

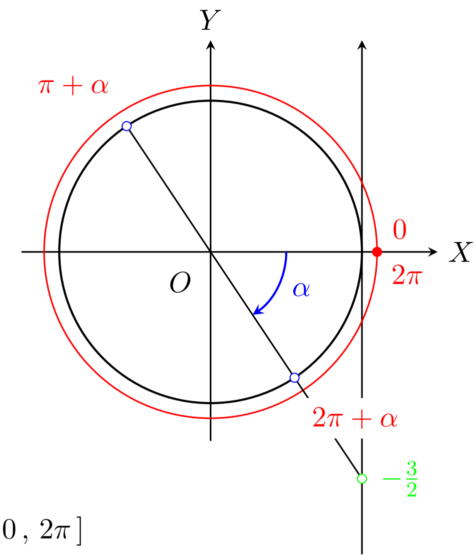
$$4\pi < 2\,\arccos\left(\tfrac{1}{3}\right) + 4\pi < 5\pi \quad \text{et} \quad 3\pi < -2\,\arccos\left(\tfrac{1}{3}\right) + 4\pi < 4\pi\,.$$

$$S = \emptyset\,.$$

d) Résolution de l'équation $\tan x = -\frac{3}{2}$ sur l'intervalle $[\,0\,,\,2\pi\,]$.

- Résolution sur $\mathbb{R}$

$$\tan x = -\frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \arctan(-\tfrac{3}{2}) + k\pi\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$



- Résolution sur l'intervalle $[\,0\,,\,2\pi\,]$

  Soit $\alpha = \arctan\left(-\frac{3}{2}\right)$.

  Sur l'intervalle $[\,0\,,\,2\pi\,]$, l'équation $\tan x = -\frac{3}{2}$ admet deux solutions :
  $x = \pi + \alpha$ et $x = 2\pi + \alpha$.

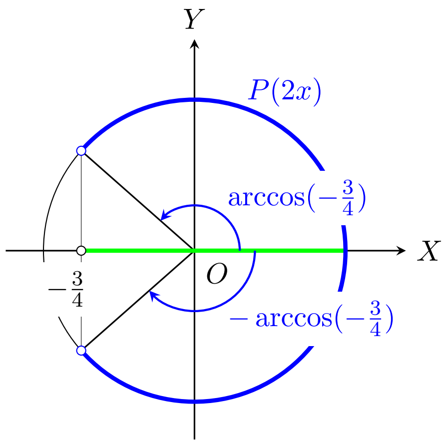
$$S = \left\{\pi + \arctan\left(-\tfrac{3}{2}\right)\,,\; 2\pi + \arctan\left(-\tfrac{3}{2}\right)\right\}.$$

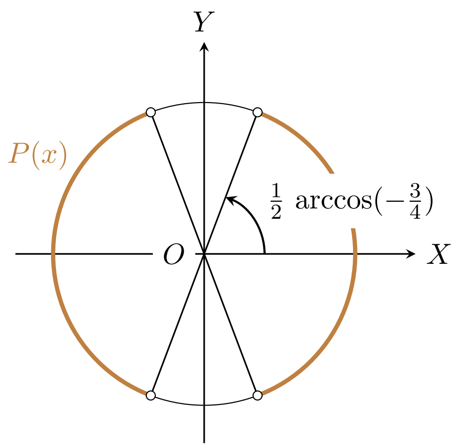
e) Résolution de l'inéquation $\cos(2x) > -\frac{3}{4}$ sur l'intervalle $[\,0\,,\,2\pi\,]$

- Représentation des points $P(2x)$ tels que $\cos(2x) > -\frac{3}{4}$.

  On représente, sur l'axe des cosinus, les valeurs plus grandes que $-\frac{3}{4}$.
  Puis on représente les points du cercle trigonométrique dont l'abscisse est plus grande que $-\frac{3}{4}$.

$$\cos(2x) > -\tfrac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad -\arccos(-\tfrac{3}{4}) + 2k\pi < 2x < \arccos(-\tfrac{3}{4}) + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$



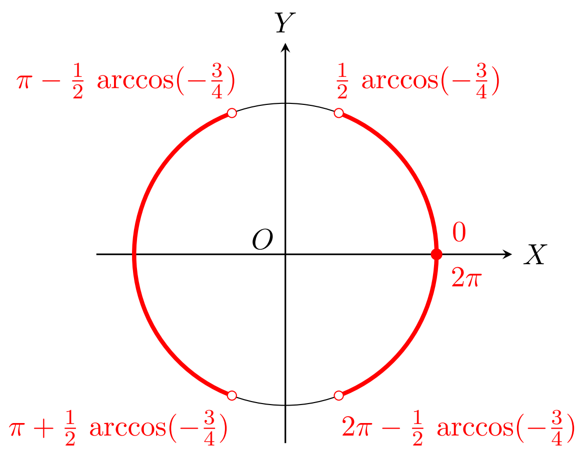


- On en déduit les points $P(x)$ solution de l'inéquation $\cos(2x) > -\frac{3}{4}$.

$$
\begin{aligned}
& -\arccos(-\tfrac{3}{4}) + 2k\pi < 2x < \arccos(-\tfrac{3}{4}) + 2k\pi \\
\Leftrightarrow \quad & -\tfrac{1}{2}\arccos(-\tfrac{3}{4}) + k\pi < x < \tfrac{1}{2}\arccos(-\tfrac{3}{4}) + k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.
\end{aligned}
$$

- Toujours graphiquement, on retient les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[\,0\,,\,2\pi\,]$:

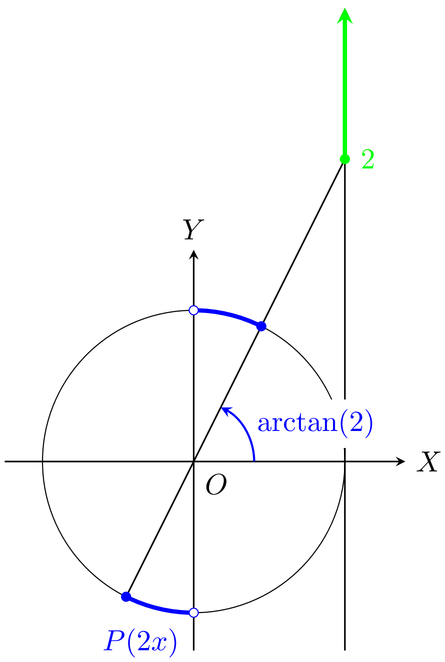
$$
\begin{aligned}
S \;=\; & [\,0\,,\ \tfrac{1}{2}\arccos(-\tfrac{3}{4})\,[\\
\cup\; &]\,\pi - \tfrac{1}{2}\arccos(-\tfrac{3}{4})\,,\ \pi + \tfrac{1}{2}\arccos(-\tfrac{3}{4})\,[\\
\cup\; &]\,2\pi - \tfrac{1}{2}\arccos(-\tfrac{3}{4})\,,\ 2\pi\,]\,.
\end{aligned}
$$

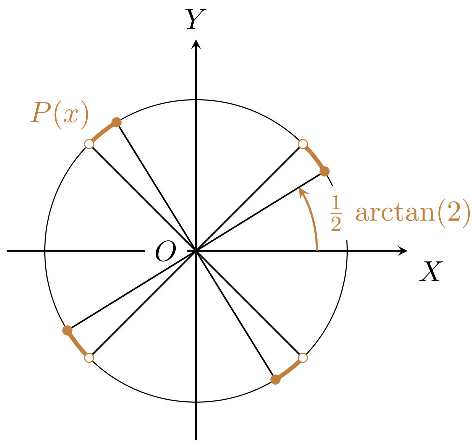


f) Résolution de l'inéquation $\tan(2x) \geq 2$ sur l'intervalle $[-\pi\,,\,0\,]$

- Représentation des points $P(2x)$ tels que $\tan(2x) \geq 2$.
  On représente, sur l'axe des tangentes, les valeurs plus grandes que 2.
  Puis on représente les points correspondants sur le cercle trigonométrique.

$$
\tan(2x) \geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad \arctan(2) + k\pi \leq 2x < \tfrac{\pi}{2} + k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.
$$



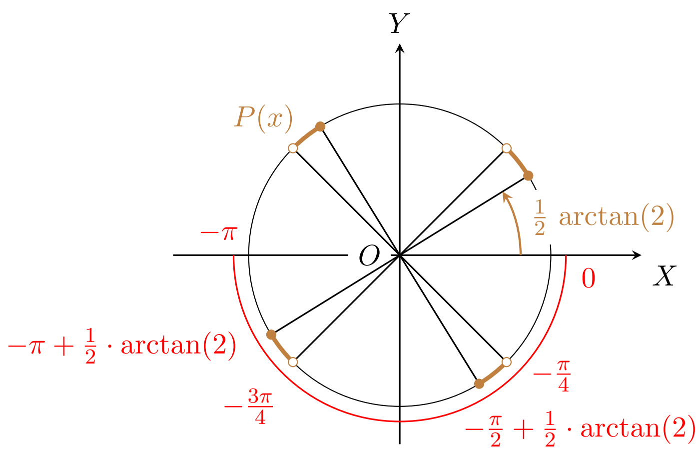


- On en déduit les points $P(x)$ solution de l'inéquation $\tan(2x) \geq 2$.

$$\begin{aligned} & \arctan(2) + k\pi \leq 2x < \tfrac{\pi}{2} + k\pi \\ \Leftrightarrow \quad & \tfrac{1}{2} \cdot \arctan(2) + k\,\tfrac{\pi}{2} \leq x < \tfrac{\pi}{4} + k\,\tfrac{\pi}{2}\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,. \end{aligned}$$

- Graphiquement, on retient les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[-\pi\,,\,0\,]$:

$$S = [-\pi + \tfrac{1}{2} \cdot \arctan(2)\,,\; -\tfrac{3\pi}{4}\,[\,\cup\,[-\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{1}{2} \cdot \arctan(2)\,,\; -\tfrac{\pi}{4}\,[\,.$$



Ex-09-03*: Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$\operatorname{arccot}(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)\,.$$

Première méthode : Fixons $x \in \mathbb{R}$. Par la relation entre tangente et cotangente,

$$\begin{aligned}
\cot(\tfrac{\pi}{2} - \arctan(x)) &= \frac{1}{\tan(\frac{\pi}{2} - \arctan(x))} \\
&= \frac{1}{\frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \arctan(x))}{\cos(\frac{\pi}{2} - \arctan(x))}} \\
&= \frac{1}{\frac{\cos(\arctan(x))}{\sin(\arctan(x))}} \\
&= \frac{1}{\cot(\arctan(x))} \\
&= \tan(\arctan(x)) \\
&= x \\
&= \cot(\operatorname{arccot}(x)) \,.
\end{aligned}$$

Puisque $\frac{\pi}{2} - \arctan(x) \in]0, \pi[$ et $\operatorname{arccot}(x) \in]0, \pi[$, l'injectivité de cot sur $]0, \pi[$ implique donc

$$\tfrac{\pi}{2} - \arctan(x) = \operatorname{arccot}(x) \,.$$

Deuxième méthode : Comme arctan et arccot sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et comme

$$\begin{aligned}
(\arctan(x))' &= \frac{1}{1+x^2} \,, \\
(\operatorname{arccot}(x))' &= -\frac{1}{1+x^2} \,,
\end{aligned}$$

on déduit que $(\arctan(x) + \operatorname{arccot}(x))' = 0$, et donc (voir Analyse B, conséquence du Théorème des accroissements finis) il existe une constante C telle que

$$\arctan(x) + \operatorname{arccot}(x) = C \qquad \forall x \in \mathbb{R} \,.$$

On peut trouver la valeur de la constante en évaluant la fonction en un point quelconque, par exemple en $x = 0$:

$$C = \arctan(0) + \operatorname{arccot}(0) = 0 + \frac{\pi}{2} \,.$$

On a donc bien montré que

$$\operatorname{arccot}(x) = \tfrac{\pi}{2} - \arctan(x) \,.$$

Ex-09-04*: Calculer, sans machine, l'angle* $S = \arctan 7 + \arctan 8$.

Soient $\alpha = \arctan 7$ et $\beta = \arctan 8$.

On localise l'angle $\alpha + \beta$, puis on calcule sa tangente.

- $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et $\beta \in [0, \frac{\pi}{2}[\;\Rightarrow\; \alpha + \beta \in [0, \pi[$.
- $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta} = \dfrac{7+8}{1 - 7 \cdot 8} = -\dfrac{3}{11}$.

D'où $S = \alpha + \beta = \arctan(-\frac{3}{11}) + \pi = \pi - \arctan\frac{3}{11}$.

Ex-09-05*: Montrer que :* $\arcsin(\frac{3}{5}) + \arccos(\frac{15}{17}) = \arcsin(\frac{77}{85})$.

Indication : commencer par montrer que $\arcsin(\frac{3}{5}), \arccos(\frac{15}{17}) \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$.

Soient $\alpha = \arcsin(\frac{3}{5})$ et $\beta = \arccos(\frac{15}{17})$.

Pour montrer que $\alpha + \beta = \arcsin(\frac{77}{85})$, il faut montrer que $\alpha + \beta$ vérifie les deux propriétés caractéristiques qui définissent $\arcsin(\frac{77}{85})$:

i) $\alpha + \beta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

ii) et $\sin(\alpha + \beta) = \frac{77}{85}$.

i) Pour vérifier que $\alpha + \beta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on peut montrer, par exemple, que

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{4} \qquad \text{et} \qquad 0 < \beta < \frac{\pi}{4}.$$

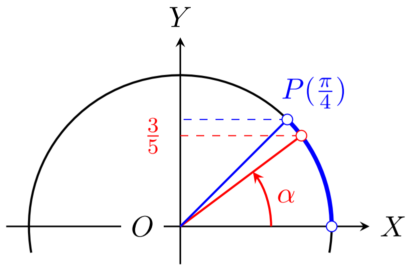
$*$ Montrons que $\alpha = \arcsin(\frac{3}{5})$ est compris entre 0 et $\dfrac{\pi}{4}$.

$\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ et $0 < \dfrac{3}{5} < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

d'où $0 < \sin\alpha < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Or la fonction sinus est strictement croissante sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$,

donc $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$.



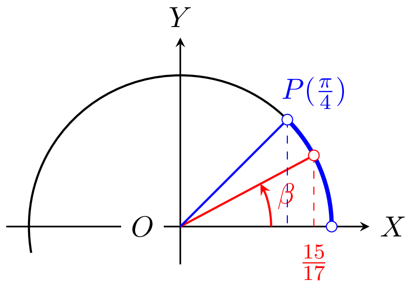
$*$ Montrons que $\beta = \arccos(\frac{15}{17})$ est compris entre 0 et $\dfrac{\pi}{4}$.

$\cos\beta = \dfrac{15}{17}$ et $\dfrac{\sqrt{2}}{2} < \dfrac{15}{17} < 1$,

d'où $\dfrac{\sqrt{2}}{2} < \cos\beta < 1$.

Or la fonction cosinus est strictement décroissante sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$,

donc $0 < \beta < \dfrac{\pi}{4}$.



$*$ On en conclut que $\alpha + \beta$ est compris entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$.

ii) Calcul de $\sin(\alpha + \beta)$ avec $\alpha = \arcsin(\frac{3}{5})$ et $\beta = \arccos(\frac{15}{17})$.

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta \\
&= \frac{3}{5} \cdot \frac{15}{17} + \sqrt{1 - (\tfrac{3}{5})^2} \cdot \sqrt{1 - (\tfrac{15}{17})^2} \\
&= \frac{1}{5 \cdot 17}\left[3 \cdot 15 + \sqrt{5^2 - 3^2} \cdot \sqrt{17^2 - 15^2}\right] \\
&= \frac{1}{85}\left[45 + \sqrt{25 - 9} \cdot \sqrt{(17-15)\cdot(17+15)}\right] \\
&= \frac{1}{85}\left[45 + \sqrt{16} \cdot \sqrt{64}\right] \\
&= \frac{1}{85}[45 + 4 \cdot 8] \\
&= \frac{77}{85}.
\end{aligned}$$

En conclusion :

$$\sin(\alpha+\beta) = \tfrac{77}{85} \quad \text{et} \quad \alpha + \beta \in [0, \tfrac{\pi}{2}] \quad \Rightarrow \quad \alpha + \beta = \arcsin(\tfrac{77}{85}).$$

Ex-09-06: *Soit la fonction* f *de* $A \subset \mathbb{R}$ *dans* $B \subset \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = \sin x + \cos x$ *.*

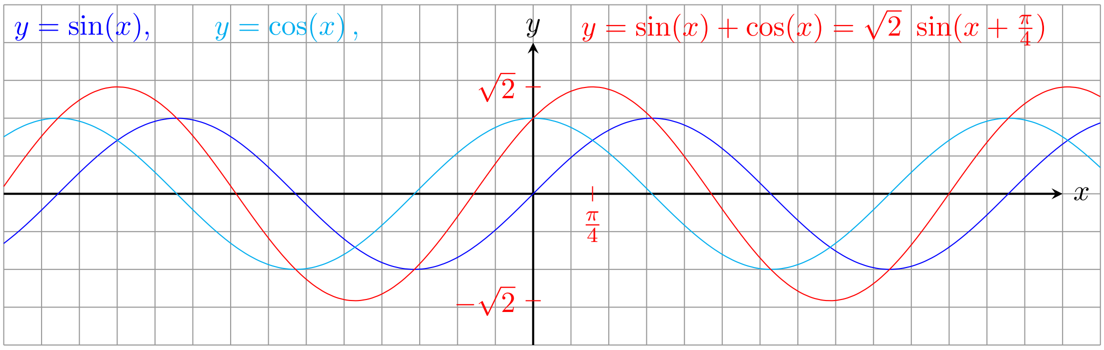
Déterminer A *et* B *de sorte que* f *soit une bijection.*

Déterminer alors la fonction réciproque de f *.*

Indication : *Commencer par écrire* $\sin x + \cos x$ *comme une seule fonction trigonométrique.*

En vue de déterminer l'ensemble $\operatorname{Im} f$, on cherche à exprimer f à l'aide d'une seule fonction trigonométrique :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x + \cos x \\ &= \sqrt{2}\left[\tfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right] \\ &= \sqrt{2}\left[\cos(\tfrac{\pi}{4})\sin x + \sin(\tfrac{\pi}{4})\cos x\right] \\ &= \sqrt{2}\,\sin(x + \tfrac{\pi}{4}). \end{aligned}$$



On déduit donc que $\operatorname{Im} f = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, $B = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

- **Une solution**

  On définit l'ensemble de départ A en se servant de la détermination principale du sinus : l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

  La fonction $c(x) = \sqrt{2}\,\sin(x + \frac{\pi}{4})$ est injective si $x + \frac{\pi}{4} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$:

  $$\text{La fonction} \quad \begin{array}{rccc} f: & A = [-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] & \longrightarrow & B = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \\ & x & \longmapsto & \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) \end{array} \quad \text{est donc bijective.}$$

  Elle admet une fonction réciproque f^{-1}.

  Pour déterminer l'expression de cette fonction réciproque, on résout l'équation $y = f(x)$ par rapport à la variable x en considérant y comme un paramètre.

  $$y = \sqrt{2}\,\sin(x + \tfrac{\pi}{4}) \quad \Leftrightarrow \quad \sin(x + \tfrac{\pi}{4}) = \frac{y}{\sqrt{2}}$$

  Or $\frac{y}{\sqrt{2}} \in [-1, 1]$ et $x + \frac{\pi}{4} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, donc

  $$\sin(x + \tfrac{\pi}{4}) = \frac{y}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad x + \tfrac{\pi}{4} = \arcsin(\tfrac{y}{\sqrt{2}}) \quad \Leftrightarrow \quad x = -\tfrac{\pi}{4} + \arcsin(\tfrac{y}{\sqrt{2}}).$$

  Cette fonction réciproque de $f(x) = \sin x + \cos x$ est donc définie par

  $$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] & \longrightarrow & [-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \\ & x & \longmapsto & -\frac{\pi}{4} + \arcsin(\frac{x}{\sqrt{2}}) \end{array}$$

- **Une autre solution**

  On définit l'ensemble de départ A en se servant d'une détermination non principale du sinus : par exemple l'intervalle $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

La fonction $c(x) = \sqrt{2}\ \sin(x + \frac{\pi}{4})$ est injective si $x + \frac{\pi}{4} \in \left[\, \frac{\pi}{2} \,,\, \frac{3\pi}{2} \,\right]$:

La fonction $\begin{array}{rccl} f: & A = \left[\, \frac{\pi}{4} \,,\, \frac{5\pi}{4} \,\right] & \longrightarrow & B = \left[-\sqrt{2} \,,\, \sqrt{2}\,\right] \\ & x & \longmapsto & \sqrt{2}\,\sin(x + \frac{\pi}{4}) \end{array}$ est donc bijective.

Elle admet une fonction réciproque f^{-1}.

Pour déterminer l'expression de cette fonction réciproque, on résout l'équation $y = f(x)$ par rapport à la variable x en considérant y comme un paramètre.

$$y = \sqrt{2}\,\sin(x + \tfrac{\pi}{4}) \quad \Leftrightarrow \quad \sin(x + \tfrac{\pi}{4}) = \frac{y}{\sqrt{2}}$$

Or $\frac{y}{\sqrt{2}} \in [-1 \,,\, 1\,]$ et $x + \frac{\pi}{4} \in \left[\, \frac{\pi}{2} \,,\, \frac{3\pi}{2} \,\right]$, donc

$$\sin(x + \tfrac{\pi}{4}) = \frac{y}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad x + \tfrac{\pi}{4} = \pi - \arcsin(\tfrac{y}{\sqrt{2}}) \quad \Leftrightarrow \quad x = \tfrac{3\pi}{4} - \arcsin(\tfrac{y}{\sqrt{2}})\,.$$

Cette fonction réciproque de $f(x) = \sin x + \cos x$ est donc définie par

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & \left[-\sqrt{2} \,,\, \sqrt{2}\,\right] & \longrightarrow & \left[\, \frac{\pi}{4} \,,\, \frac{5\pi}{4} \,\right] \\ & x & \longmapsto & \frac{3\pi}{4} - \arcsin(\frac{x}{\sqrt{2}}) \end{array}$$

- **Une troisième solution**

On exprime f à l'aide de la fonction cosinus, puis on définit l'ensemble de départ A en se servant de la détermination principale du cosinus : l'intervalle $[\,0 \,,\, \pi\,]$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x + \sin x \\ &= \sqrt{2}\,\left[\, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,\cos x + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,\sin x \,\right] \\ &= \sqrt{2}\,\left[\cos(\tfrac{\pi}{4})\,\cos x + \sin(\tfrac{\pi}{4})\,\sin x\,\right] \\ &= \sqrt{2}\ \cos(x - \tfrac{\pi}{4}). \end{aligned}$$

La fonction $c(x) = \sqrt{2}\ \cos(x - \frac{\pi}{4})$ est injective si $x - \frac{\pi}{4} \in [\,0 \,,\, \pi\,]$:

La fonction $\begin{array}{rccl} f: & A = \left[\, \frac{\pi}{4} \,,\, \frac{5\pi}{4} \,\right] & \longrightarrow & B = \left[-\sqrt{2} \,,\, \sqrt{2}\,\right] \\ & x & \longmapsto & \sqrt{2}\,\cos(x - \frac{\pi}{4}) \end{array}$ est donc bijective.

Elle admet une fonction réciproque f^{-1}.

Pour déterminer l'expression de cette fonction réciproque, on résout l'équation $y = f(x)$ par rapport à la variable x en considérant y comme un paramètre.

$$y = \sqrt{2}\,\cos(x - \tfrac{\pi}{4}) \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x - \tfrac{\pi}{4}) = \frac{y}{\sqrt{2}}$$

Or $\frac{y}{\sqrt{2}} \in [-1 \,,\, 1\,]$ et $x - \frac{\pi}{4} \in [\,0 \,,\, \pi\,]$, donc

$$\cos(x - \tfrac{\pi}{4}) = \frac{y}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad x - \tfrac{\pi}{4} = \arccos(\tfrac{y}{\sqrt{2}}) \quad \Leftrightarrow \quad x = \tfrac{\pi}{4} + \arccos(\tfrac{y}{\sqrt{2}})\,.$$

Cette fonction réciproque de $f(x) = \sin x + \cos x$ est donc définie par

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & \left[-\sqrt{2} \,,\, \sqrt{2}\,\right] & \longrightarrow & \left[\, \frac{\pi}{4} \,,\, \frac{5\pi}{4} \,\right] \\ & x & \longmapsto & \frac{\pi}{4} + \arccos(\frac{x}{\sqrt{2}}) \end{array}$$

Remarque : il s'agit de la même fonction f^{-1} que dans la deuxième solution. seule son expression est différente.

Ex-09-07: ***Exercice facultatif***

Calculer la dérivée de $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \in \mathbb{R}^*$.

En déduire la représentation graphique de la fonction $\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ *à partir de celle de* *la fonction* $\arctan(x)$.

On pose $f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$. Le domaine de définition de f est $\mathbb{R}^*$. On calcule sa dérivée sur $\mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\frac{-1}{x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

Par conséquent, f est une constante sur chaque intervalle de son domaine de définition. Donc on a

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} c_1, x < 0 \\ c_2, x > 0. \end{cases}$$

Pour déterminer c_1 et c_2 on évalue la fonction. On a

$$f(-1) = \frac{-\pi}{4} + \frac{-\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} \text{ et } f(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Par conséquent, on a $c_1 = -\frac{\pi}{2}$ et $c_2 = \frac{\pi}{2}$ et on conclut que

$$\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{sgn}(x)\frac{\pi}{2} - \arctan(x).$$

Le graphe de $\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ se construit donc par translation de $\pm\frac{\pi}{2}$ de celui de $-\arctan(x)$.