Série 08: Formules trigonométriques

Ex-08-01: *En utilisant les formules trigonométriques, calculer sans machine les valeurs suivantes :*

a) $\cos(\frac{7\pi}{12})$ *c)* $\tan(\frac{5\pi}{12})$

b) $\sin(\frac{\pi}{12})$ *d)* $\tan(\frac{\pi}{8})$

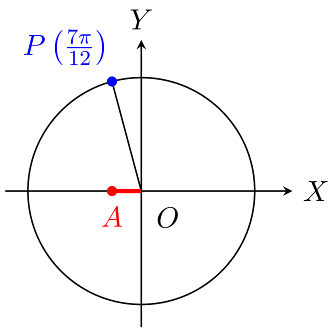
a) En utilisant les formules d'addition, on obtient un résultat de forme plus agréable qu'en utilisant les formules de bissection.

- Décomposition de $\frac{7\pi}{12}$ en une somme de deux valeurs remarquables

$$\frac{7\pi}{12} = \frac{4\pi + 3\pi}{12} = \frac{4\pi}{12} + \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\,.$$

- Calcul de $A = \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

$$\begin{aligned} A &= \cos\left(\tfrac{7\pi}{12}\right) \\ &= \cos\left(\tfrac{\pi}{3} + \tfrac{\pi}{4}\right) \\ &= \cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1-\sqrt{3}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)\,. \end{aligned}$$

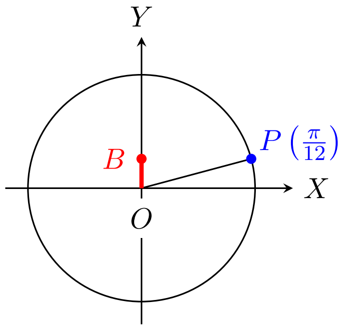


b)• Décomposition de $\frac{\pi}{12}$ en une différence de deux valeurs remarquables

$$\frac{\pi}{12} = \frac{4\pi - 3\pi}{12} = \frac{4\pi}{12} - \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\,.$$

- Calcul de $B = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

$$\begin{aligned} B &= \sin\left(\tfrac{\pi}{12}\right) \\ &= \sin\left(\tfrac{\pi}{3} - \tfrac{\pi}{4}\right) \\ &= \sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)\,. \end{aligned}$$



On constate que $B = -A$. On aurait pu le vérifier directement :

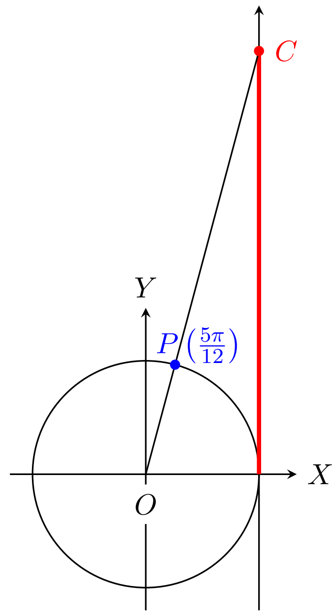
$$B = \sin\left(\tfrac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\tfrac{7\pi}{12} - \tfrac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{7\pi}{12}\right) = -\cos\left(\tfrac{7\pi}{12}\right) = -A\,.$$

c)• Décomposition de $\frac{5\pi}{12}$ en une somme de deux valeurs remarquables

$$\frac{5\pi}{12}=\frac{3\pi+2\pi}{12}=\frac{3\pi}{12}+\frac{2\pi}{12}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\,.$$

• Calcul de $C=\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

$$\begin{aligned}C &= \tan\left(\tfrac{5\pi}{12}\right)\\ &= \tan\left(\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{\pi}{6}\right)\\ &= \frac{\tan(\frac{\pi}{4})+\tan(\frac{\pi}{6})}{1-\tan(\frac{\pi}{4})\,\tan(\frac{\pi}{6})}\\ &= \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}\\ &= \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\\ &= \frac{(3+\sqrt{3})^2}{9-3}\\ &= \frac{9+6\sqrt{3}+3}{6}\\ &= 2+\sqrt{3}\,.\end{aligned}$$



d) Ne pouvant pas décomposer $\frac{\pi}{8}$ en une somme ou une différence de deux valeurs remarquables, on utilise les formules de bissection.

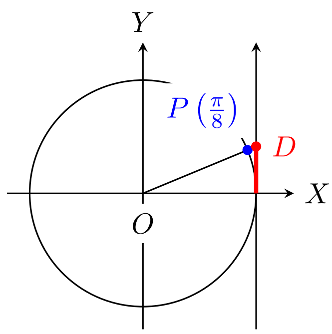
$P\left(\frac{\pi}{8}\right)$ appartient au premier quadrant, donc $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$ est positif.

$$D=\tan\left(\tfrac{\pi}{8}\right)=\tan\left(\tfrac{\pi/4}{2}\right)=+\sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}}$$

$$=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}\,.$$

Et en amplifiant, sous la racine, par le conjugué du dénominateur,

$$D=\sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})^2}{4-2}}=\frac{|2-\sqrt{2}\,|}{\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1\,.$$



Ex-08-02: *En utilisant les formules de transformation somme-produit, factoriser puis résoudre les équations suivantes :*

a) $\sin(3x)+\sin x=\sin(2x)$

b) $\cos(3x)+\cos(5x)=\cos x$

c) $\sin^2(5x)=\sin^2 x$

d) $(1+\tan x)\,[\cos(7x)+\cos x]=0$

a) $\sin(3x)+\sin x=\sin(2x)\,,\quad D_{\text{def}}=\mathbb{R}\,.$

Factorisation

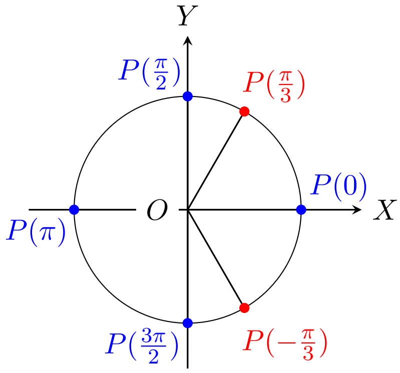
$$\begin{aligned}\sin(3x)+\sin x=\sin(2x) &\Leftrightarrow 2\sin\left(\tfrac{3x+x}{2}\right)\cos\left(\tfrac{3x-x}{2}\right)=\sin(2x)\\ &\Leftrightarrow 2\sin(2x)\cos x=\sin(2x)\\ &\Leftrightarrow 2\sin(2x)\cos x-\sin(2x)=0\\ &\Leftrightarrow \sin(2x)\,[\,2\cos x-1\,]=0\,.\end{aligned}$$

Résolution

$$\sin(3x)+\sin x=\sin(2x) \quad\Leftrightarrow\quad \sin(2x)\,[\,2\cos x-1\,]=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l}\sin(2x)=0\\ \text{ou}\\ 2\cos x-1=0\end{array}\right.$$

- Résolution de l'équation $\sin(2x)=0$

$$\begin{aligned}\sin(2x)=0 &\Leftrightarrow 2x=k\pi\\ &\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2}\,,\quad k\in\mathbb{Z}\,.\end{aligned}$$



- Résolution de l'équation $2\cos x-1=0$

$$\begin{aligned}2\cos x-1=0 &\Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow \cos x=\cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\\ &\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi\,,\quad k\in\mathbb{Z}\,.\end{aligned}$$

On en déduit l'ensemble solution : $S=\left\{\dfrac{k\pi}{2}\,,\ -\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\,,\ \dfrac{\pi}{3}+2k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$

b) $\cos(3x)+\cos(5x)=\cos x\,,\quad D_{\text{def}}=\mathbb{R}\,.$

Factorisation

$$\begin{aligned}\cos(5x)+\cos(3x)=\cos x &\Leftrightarrow 2\cos\left(\tfrac{5x+3x}{2}\right)\cos\left(\tfrac{5x-3x}{2}\right)=\cos x\\ &\Leftrightarrow 2\cos(4x)\cos x=\cos x\\ &\Leftrightarrow 2\cos(4x)\cos x-\cos x=0\\ &\Leftrightarrow \cos x\,[\,2\cos(4x)-1\,]=0\,.\end{aligned}$$

Résolution

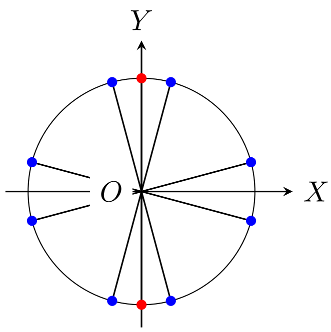
$$\cos(3x)+\cos(5x)=\cos x \quad\Leftrightarrow\quad \cos x\,[\,2\cos(4x)-1\,]=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l}\cos x=0\\ \text{ou}\\ 2\cos(4x)-1=0\end{array}\right.$$

- Résolution de l'équation $\cos x=0$

$$\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi\,,\quad k\in\mathbb{Z}\,.$$

- Résolution de l'équation $2\cos(4x)-1=0$

$$\begin{aligned}2\cos(4x)-1=0 &\Leftrightarrow \cos(4x)=\frac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow \cos(4x)=\cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\\ &\Leftrightarrow 4x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi\\ &\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\,,\quad k\in\mathbb{Z}\,.\end{aligned}$$



D'où l'ensemble solution : $S=\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\,,\ -\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{2}\,,\ \dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{2}\,,\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$

c) $\sin^2(5x) = \sin^2 x\,, \quad D_{\text{def}} = \mathbb{R}\,.$

Factorisation

$$\begin{aligned}
\sin^2(5x) - \sin^2 x = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad [\sin(5x) - \sin x] \cdot [\sin(5x) + \sin x] = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad [2\,\cos(3x)\,\sin(2x)] \cdot [2\,\sin(3x)\,\cos(2x)] = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad [2\,\sin(3x)\,\cos(3x)] \cdot [2\,\sin(2x)\,\cos(2x)] = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \sin(6x)\,\sin(4x) = 0\,.
\end{aligned}$$

Résolution

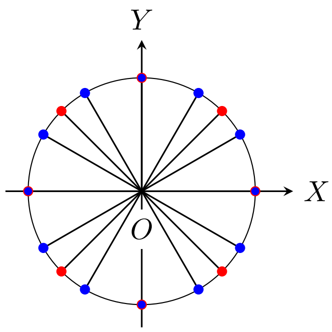
$$\sin^2(5x) = \sin^2 x \quad \Leftrightarrow \quad \sin(6x)\,\sin(4x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sin(6x) = 0 \\ \text{ou} \\ \sin(4x) = 0 \end{cases}$$

- Résolution de l'équation $\sin(6x) = 0$

$$\begin{aligned}
\sin(6x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 6x = k\pi \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{k\pi}{6}\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.
\end{aligned}$$

- Résolution de l'équation $\sin(4x) = 0$

$$\begin{aligned}
\sin(4x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 4x = k\pi \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{k\pi}{4}\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.
\end{aligned}$$



On en déduit l'ensemble solution :

$$S = \left\{ \frac{k\pi}{6}\,,\ \frac{k\pi}{4}\,,\ k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \frac{k\pi}{2}\,,\ \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\,,\ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\,,\ \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}\,,\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Remarque

On aurait aussi pu résoudre les équations $\sin(5x) - \sin x = 0$ et $\sin(5x) + \sin x = 0$ comme des équations élémentaires en sinus :

- $\sin(5x) = \sin x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 5x = x + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 5x = \pi - x + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad \cdots$
- $\sin(5x) = -\sin x \quad \Leftrightarrow \quad \sin(5x) = \sin(-x) \quad \Leftrightarrow \quad \cdots$

d) $(1 + \tan x)\,[\cos(7x) + \cos x] = 0\,, \quad D_{\text{def}} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\}\,.$

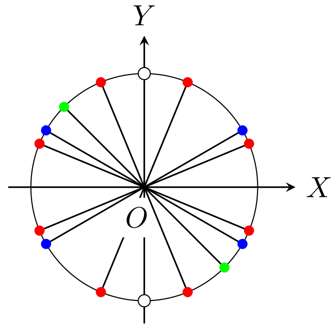
$$(1 + \tan x)\,[\cos(7x) + \cos x] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1 + \tan x = 0 \\ \text{ou} \\ \cos(7x) + \cos x = 0 \end{cases}$$

- Résolution de l'équation $1+\tan x = 0$

$$1+\tan x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tan x = \tan\left(-\tfrac{\pi}{4}\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{4} + k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

- Résolution de l'équation $\cos(7x) + \cos x = 0$

$$\cos(7x) + \cos x = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 2\cos(4x)\,\cos(3x) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \cos(4x) = 0 \quad \text{ou} \quad \cos(3x) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{ou} \quad 3x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$
$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$



Attention ! Les valeurs $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$ ne sont pas toutes contenues dans le domaine de définition.

$$S = \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi\,,\ \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}\,,\ \frac{\pi}{6} + k\pi\,,\ \frac{5\pi}{6} + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Remarque :

On aurait aussi pu résoudre l'équation $\cos(7x) + \cos x = 0$ comme une équation élémentaire en cosinus :

$\cos(7x) + \cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(7x) = -\cos x \quad \Leftrightarrow \quad \cos(7x) = \cos(\pi - x) \quad \Leftrightarrow \quad \cdots$

Ex-08-03: *Résoudre les équations suivantes :*

a) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}$

b) $\sin x + 2\cos x = 9$

c) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sin(3x) + \cos(3x)\right] = 1$

d) $\sin(2x) - \cos(2x) + 1 = 0\,, \qquad -5\pi \le x \le -3\pi$

e) $\sin(\frac{x}{2}) + \cos(\frac{x}{2}) = 0\,, \qquad -\pi \le x \le 0$

a) **On se ramène à une équation élémentaire en sinus**

Il s'agit de transformer l'équation $\sin x - \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}$ en une équation élémentaire de la forme
$$\sin(x+\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{c}\,.$$

- Normalisation

  L'équation $\sin x - \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}$ est du type $a\,\sin x + b\,\cos x = p$, avec $\sqrt{a^2+b^2} = 2\,.$

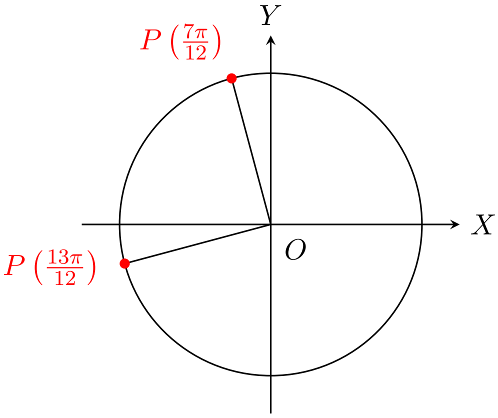
  On divise les deux membres de cette équation par ce coefficient de normalisation :
$$\sin x - \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\,\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

- Transformation

$$\frac{1}{2}\,\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\,\sin x - \sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\,\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\Leftrightarrow \quad \sin\left(x - \tfrac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right).$$

- Résolution

$$\begin{aligned}
&\sin\left(x-\tfrac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\\
\Leftrightarrow\ &\left\{\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}+2k\pi\\ \text{ou}\\ x-\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{4}+2k\pi\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left\{\begin{array}{l} x=\frac{7\pi}{12}+2k\pi\\ \text{ou}\\ x=\frac{13\pi}{12}+2k\pi\end{array}\right. \qquad k\in\mathbb{Z}\,.
\end{aligned}$$



$$S=\left\{\frac{7\pi}{12}+2k\pi\,,\ \frac{13\pi}{12}+2k\pi\,,\quad k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Ou bien on se ramène à une équation élémentaire en cosinus

Il s'agit de transformer l'équation $\sin x-\sqrt{3}\cos x=\sqrt{2}$ en une équation élémentaire de la forme

$$\cos(x+\varphi')=\frac{\sqrt{2}}{c}\,.$$

- Normalisation

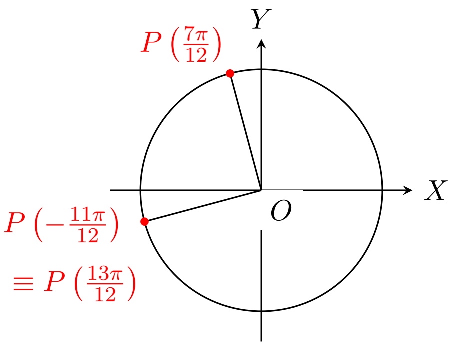
$$\sin x-\sqrt{3}\cos x=\sqrt{2}\quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

- Transformation

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}\quad &\Leftrightarrow\quad \sin\left(\tfrac{\pi}{6}\right)\sin x-\cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right)\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}\\
&\Leftrightarrow\quad \cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right)\cos x-\sin\left(\tfrac{\pi}{6}\right)\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\\
&\Leftrightarrow\quad \cos\left(x+\tfrac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\tfrac{3\pi}{4}\right).
\end{aligned}$$

- Résolution

$$\begin{aligned}
&\cos\left(x+\tfrac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\tfrac{3\pi}{4}\right)\\
\Leftrightarrow\ &\left\{\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{4}+2k\pi\\ \text{ou}\\ x+\frac{\pi}{6}=-\frac{3\pi}{4}+2k\pi\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left\{\begin{array}{l} x=\frac{7\pi}{12}+2k\pi\\ \text{ou}\\ x=-\frac{11\pi}{12}+2k\pi\end{array}\right. \qquad k\in\mathbb{Z}\,.
\end{aligned}$$



$$S=\left\{-\frac{11\pi}{12}+2k\pi\,,\ \frac{7\pi}{12}+2k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}\right\}=\left\{\frac{7\pi}{12}+2k\pi\,,\ \frac{13\pi}{12}+2k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

b)• Normalisation

$$\sin x+2\cos x=9\quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{\sqrt{5}}\sin x+\frac{2}{\sqrt{5}}\cos x=\frac{9}{\sqrt{5}}\,.$$

- Transformation

Il existe φ, tel que $\sin(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{5}}$ et $\cos(\varphi)=\frac{2}{\sqrt{5}}$.

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\sin x+\frac{2}{\sqrt{5}}\cos x=\frac{9}{\sqrt{5}} \quad\Leftrightarrow\quad \sin(\varphi)\sin x+\cos(\varphi)\cos x=\frac{9}{\sqrt{5}}$$
$$\Leftrightarrow\quad \cos(x-\varphi)=\frac{9}{\sqrt{5}}.$$

- Résolution

  L'équation $\cos(x-\varphi)=\frac{9}{\sqrt{5}}$ n'admet pas de solution car $\frac{9}{\sqrt{5}}>1$.
  (On aurait pu le constater dès l'étape de normalisation.)

c) L'équation linéaire est déjà normalisée.

- Transformation

  ◦ Transformation en cosinus

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sin(3x)+\cos(3x)\right]=1 \quad\Leftrightarrow\quad \sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\sin(3x)+\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\cos(3x)=1$$
$$\Leftrightarrow\quad \cos\left(3x-\tfrac{\pi}{4}\right)=1\,.$$

  ◦ Transformation en sinus

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sin(3x)+\cos(3x)\right]=1 \quad\Leftrightarrow\quad \cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\sin(3x)+\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\cos(3x)=1$$
$$\Leftrightarrow\quad \sin\left(3x+\tfrac{\pi}{4}\right)=1\,.$$

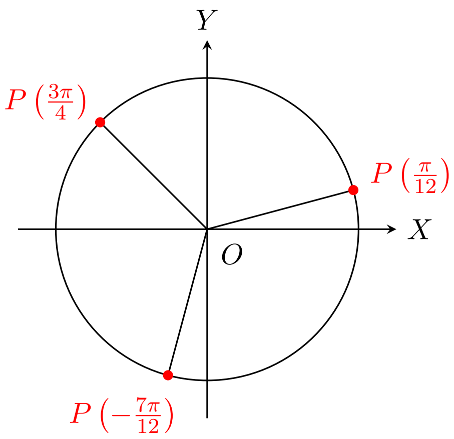
- Résolution

  ◦ Résolution de l'équation en cosinus

$$\begin{aligned}&\cos\left(3x-\tfrac{\pi}{4}\right)=1\\ \Leftrightarrow\quad &3x-\tfrac{\pi}{4}=2k\pi\\ \Leftrightarrow\quad &3x=\tfrac{\pi}{4}+2k\pi\\ \Leftrightarrow\quad &x=\tfrac{\pi}{12}+\tfrac{2k\pi}{3}\,,\quad k\in\mathbb{Z}\,.\end{aligned}$$

  ◦ Résolution de l'équation en sinus

$$\begin{aligned}&\sin\left(3x+\tfrac{\pi}{4}\right)=1\\ \Leftrightarrow\quad &3x+\tfrac{\pi}{4}=\tfrac{\pi}{2}+2k\pi\\ \Leftrightarrow\quad &3x=\tfrac{\pi}{4}+2k\pi\\ \Leftrightarrow\quad &x=\tfrac{\pi}{12}+\tfrac{2k\pi}{3}\,,\quad k\in\mathbb{Z}\,.\end{aligned}$$



$$S=\left\{\tfrac{\pi}{12}+\tfrac{2k\pi}{3}\,,\quad k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

d) • Normalisation

$$\sin(2x)-\cos(2x)+1=0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x)-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(2x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

- Transformation

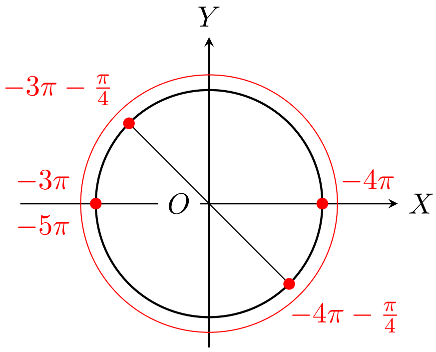
$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x)-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(2x)=-\frac{\sqrt{2}}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(2x)-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\Leftrightarrow\quad \cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\cos(2x)-\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\sin(2x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\Leftrightarrow\quad \cos\left(2x+\tfrac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right).$$

- Résolution sur $\mathbb{R}$

$$\cos\left(2x+\tfrac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) \iff \begin{cases} 2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2k\pi\,, & \text{ou} \\ 2x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+2k\pi\,, & k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=k\pi\,, & \text{ou} \\ x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\,, & k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

- Résolution sur l'intervalle $[-5\pi\,,\,-3\pi\,]$



$x=-5\pi\,,\quad x=-4\pi-\frac{\pi}{4}\,,\quad x=-4\pi\,,$

$x=-3\pi-\frac{\pi}{4}\,,\quad x=-3\pi\,.$

$$S=\left\{-5\pi\,,\,-\frac{17\pi}{4}\,,\,-4\pi\,,\,-\frac{13\pi}{4}\,,\,-3\pi\right\}.$$

e) L'équation $\sin\left(\frac{x}{2}\right)+\cos\left(\frac{x}{2}\right)=0$ est une équation trigonométrique linéaire particulière car le terme constant est nul.

- Résolution sur $\mathbb{R}$
  - ◦ Première méthode de résolution

    On utilise la technique de résolution des équations linéaires.

$$\begin{aligned}\sin\left(\tfrac{x}{2}\right)+\cos\left(\tfrac{x}{2}\right)=0 &\iff \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\tfrac{x}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\tfrac{x}{2}\right)=0\\ &\iff \sin\left(\tfrac{x}{2}+\tfrac{\pi}{4}\right)=0\\ &\iff \frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}=k\pi\\ &\iff x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\,,\quad k\in\mathbb{Z}\,.\end{aligned}$$

  - ◦ Deuxième méthode de résolution

    On se ramène à une équation élémentaire en tangente.

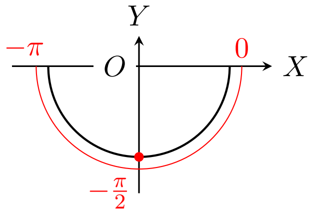
$$\begin{aligned}\sin\left(\tfrac{x}{2}\right)+\cos\left(\tfrac{x}{2}\right)=0 &\iff \sin\left(\tfrac{x}{2}\right)=-\cos\left(\tfrac{x}{2}\right)\\ &\iff \tan\left(\tfrac{x}{2}\right)=-1\,,\quad \cos\left(\tfrac{x}{2}\right)\neq 0\\ &\iff \frac{x}{2}=-\frac{\pi}{4}+k\pi\\ &\iff x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\,,\quad k\in\mathbb{Z}\,.\end{aligned}$$

    Remarque :
    les x vérifiant $\cos(\frac{x}{2})=0$ ne sont pas solutions : $\cos(\frac{x}{2})=0 \iff \sin(\frac{x}{2})=\pm 1\,.$

  - ◦ Troisième méthode de résolution

    Les coefficients des termes en sinus et cosinus étant identiques $(a=b)$, on peut se ramener à une équation élémentaire en sinus ou en cosinus.

$$
\begin{aligned}
\sin\left(\tfrac{x}{2}\right)+\cos\left(\tfrac{x}{2}\right)=0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sin\left(\tfrac{x}{2}\right)=-\cos\left(\tfrac{x}{2}\right)\\
&\Leftrightarrow \quad \sin\left(\tfrac{x}{2}\right)=-\sin\left(\tfrac{\pi}{2}-\tfrac{x}{2}\right)\\
&\Leftrightarrow \quad \sin\left(\tfrac{x}{2}\right)=\sin\left(-\tfrac{\pi}{2}+\tfrac{x}{2}\right)\\
&\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \tfrac{x}{2}=-\tfrac{\pi}{2}+\tfrac{x}{2}+2k\pi\,, \quad \text{ou}\\ \tfrac{x}{2}=\pi-\left(-\tfrac{\pi}{2}+\tfrac{x}{2}\right)+2k\pi \end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \quad x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi\,, \quad k\in\mathbb{Z}\,.
\end{aligned}
$$



- Résolution sur l'intervalle $[-\pi\,,\,0\,]$

  Il n'y a qu'une solution, $S=\left\{-\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

Ex-08-04: *Résoudre les inéquations suivantes :*

a) $\cos x+\sqrt{3}\sin x>1$

b) $-\sqrt{3}\sin(2x)+\cos(2x)\leq-\sqrt{2}$, $\qquad 5\pi\leq x\leq 6\pi$

c) $\sin x\geq\cos x$, $\qquad \frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{5\pi}{2}$

a) On résout les inéquations linéaires comme les équations linéaires.

On se ramène à une inéquation élémentaire en cosinus

- Normalisation

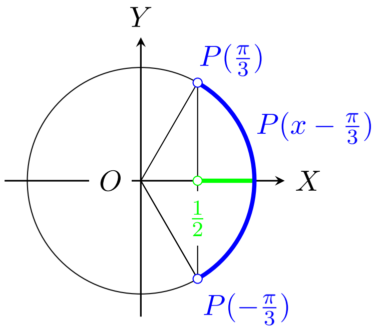
$$\cos x+\sqrt{3}\,\sin x>1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x>\frac{1}{2}\,.$$

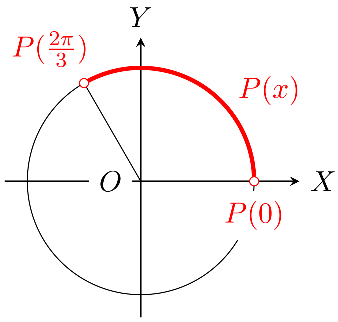
- Transformation

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x>\frac{1}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad \cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\cos x+\sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\sin x>\frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow \quad \cos\left(x-\tfrac{\pi}{3}\right)>\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

- Résolution

$$\cos\left(x-\tfrac{\pi}{3}\right)>\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{3}+2k\pi<x-\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{3}+2k\pi\,, \quad k\in\mathbb{Z}\,.$$





$$\Leftrightarrow \quad 2k\pi<x<\frac{2\pi}{3}+2k\pi\,, \quad k\in\mathbb{Z}\,. \qquad\qquad S=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\,\left]\,2k\pi\,,\,\tfrac{2\pi}{3}+2k\pi\,\right[\,.$$

Ou bien on se ramène à une inéquation élémentaire en sinus

- Normalisation

$$\cos x + \sqrt{3}\sin x > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x > \frac{1}{2}\,.$$

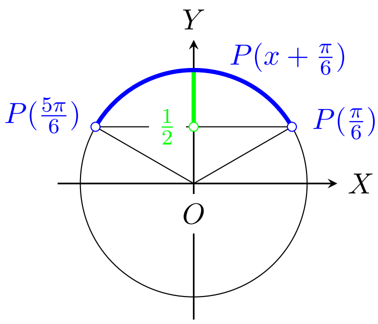
- Transformation

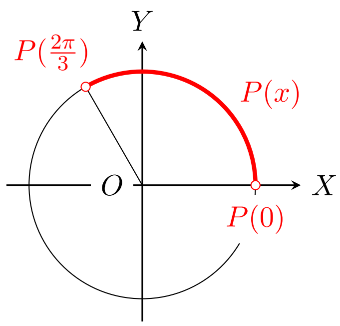
$$\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x > \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin\left(\tfrac{\pi}{6}\right)\cos x + \cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right)\sin x > \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\left(x + \tfrac{\pi}{6}\right) > \frac{1}{2}\,.$$

- Résolution

$$\sin\left(x + \tfrac{\pi}{6}\right) > \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x + \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$





$$\Leftrightarrow \quad 2k\pi < x < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,. \qquad\qquad S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\, 2k\pi\,,\ \tfrac{2\pi}{3} + 2k\pi\,\right[\,.$$

b) On se ramène à une inéquation élémentaire en cosinus

- Normalisation

$$-\sqrt{3}\sin(2x) + \cos(2x) \le -\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2x) + \frac{1}{2}\cos(2x) \le -\frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

- Transformation

$$\frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2x) \le -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\cos(2x) - \sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\sin(2x) \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

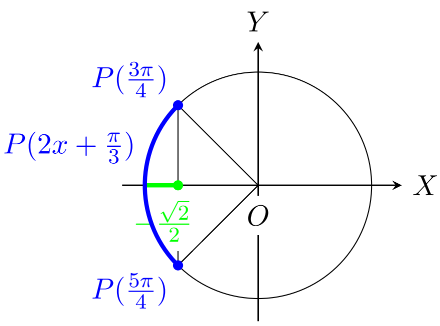
$$\Leftrightarrow \quad \cos\left(2x + \tfrac{\pi}{3}\right) \le -\frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

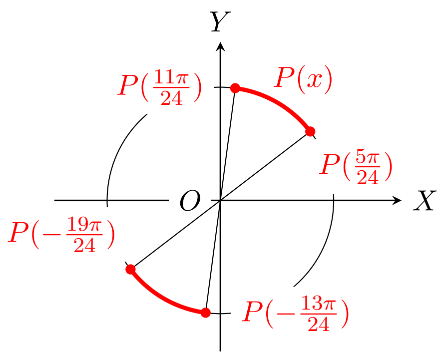
- Résolution sur $\mathbb{R}$

$$\cos\left(2x + \tfrac{\pi}{3}\right) \le -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \le 2x + \frac{\pi}{3} \le \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \le 2x \le \frac{11\pi}{12} + 2k\pi$$

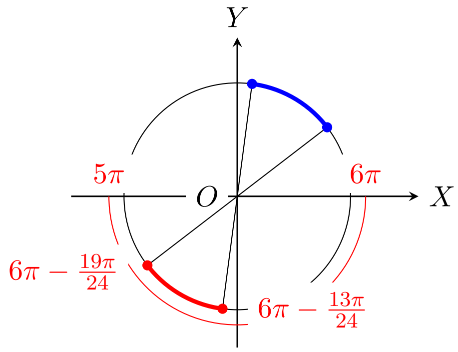
$$\Leftrightarrow \quad \frac{5\pi}{24} + k\pi \le x \le \frac{11\pi}{24} + k\pi\,.$$





- Résolution sur l'intervalle $[5\pi\,,\,6\pi]$

$$5\pi + \frac{5\pi}{24} \leq x \leq 5\pi + \frac{11\pi}{24}\,, \qquad \text{ou} \qquad 6\pi - \frac{19\pi}{24} \leq x \leq 6\pi - \frac{13\pi}{24}\,.$$



$$S = \left[\frac{125\pi}{24}\,,\,\frac{131\pi}{24}\right].$$

c) Sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{5\pi}{2}\right]$, $\sin x$ et $\cos x$ sont de signes variables, il est difficile de se ramener à une inéquation élémentaire en tangente ou en cotangente.

Il est préférable d'utiliser la technique de résolution des équations linéaires.

- Normalisation

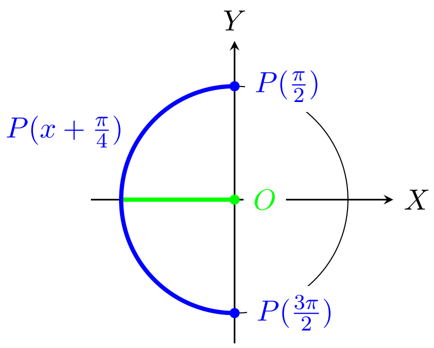
$$\sin x \geq \cos x \quad \Leftrightarrow \quad \cos x - \sin x \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x \leq 0\,.$$

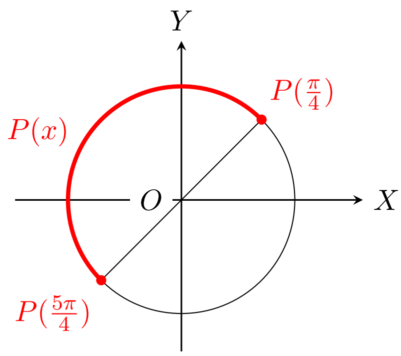
- Transformation

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x \leq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\cos x - \sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\sin x \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \cos\left(x + \tfrac{\pi}{4}\right) \leq 0. \end{aligned}$$

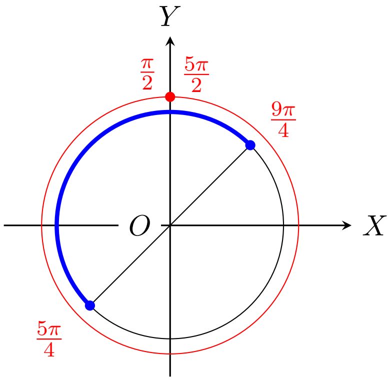
- Résolution sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \cos\left(x + \tfrac{\pi}{4}\right) \leq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\,. \end{aligned}$$





- Résolution sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{5\pi}{2}\right]$



$$S = \left[\frac{\pi}{2}\,,\ \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{9\pi}{4}\,,\ \frac{5\pi}{2}\right].$$

***Ex*-08-05:**
Factoriser avant de résoudre l'équation et l'inéquation suivantes :

a) $\sin(2x) - 2\cos^2 x + 2\cos x = 0$

b) $\cos(2x) + \sin x + \cos x > 0\ , \qquad 0 \le x \le 2\pi$

a) $\sin(2x) - 2\cos^2 x + 2\cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\sin x\,\cos x - 2\cos^2 x + 2\cos x = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos x\,(\sin x - \cos x + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos x = 0 \qquad \text{ou} \\ \sin x - \cos x + 1 = 0 \end{cases}$$

- $\cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$
- $\sin x - \cos x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\tfrac{\pi}{4}\cos x - \sin\tfrac{\pi}{4}\sin x = \tfrac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x + \tfrac{\pi}{4}) = \cos\tfrac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

D'où $\quad S = \left\{\, \frac{\pi}{2} + k\pi\,,\ 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}.$

b) $\cos(2x) + \sin x + \cos x > 0\ , \qquad 0 \le x \le 2\pi\,.$

$\cos(2x) + \sin x + \cos x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2 x - \sin^2 x + \cos x + \sin x > 0$

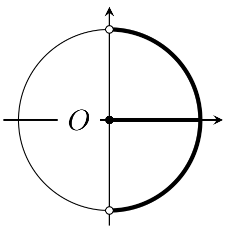
$$\Leftrightarrow \quad (\cos x + \sin x)\,(\cos x - \sin x) + (\cos x + \sin x) > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\cos x + \sin x)\,[\,(\cos x - \sin x) + 1\,] > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos x + \sin x > 0 & (i) \\ \text{et} \\ \cos x - \sin x + 1 > 0 & (ii) \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad \begin{cases} \cos x + \sin x < 0 & (iii) \\ \text{et} \\ \cos x - \sin x + 1 < 0 & (iv) \end{cases}$$

(i) $\cos x + \sin x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x > 0$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\tfrac{\pi}{4}\cos x + \sin\tfrac{\pi}{4}\sin x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x - \tfrac{\pi}{4}) > 0$$



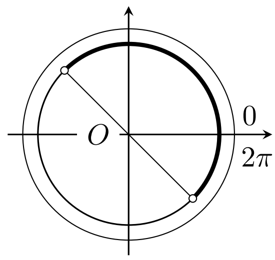
Résolution sur $\mathbb{R}$:

$$-\frac{\pi}{2}+2k\pi < x-\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}+2k\pi$$

$$-\frac{\pi}{4}+2k\pi < x < \frac{3\pi}{4}+2k\pi\,.$$

Résolution sur $[\,0\,,\,2\pi\,]$:

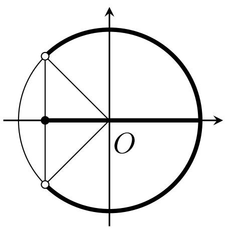
$$S_i = [\,0\,,\,\tfrac{3\pi}{4}\,[\,\cup\,]\,\tfrac{7\pi}{4}\,,\,2\pi\,]\,.$$



(iii) On en déduit l'ensemble solution de $\cos x+\sin x<0$: $S_{iii} =]\,\frac{3\pi}{4}\,,\,\frac{7\pi}{4}\,[$.

(ii) $\cos x-\sin x>-1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x>-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \quad \cos\frac{\pi}{4}\cos x-\sin\frac{\pi}{4}\sin x>-\frac{\sqrt{2}}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \cos(x+\frac{\pi}{4})>-\frac{\sqrt{2}}{2}$



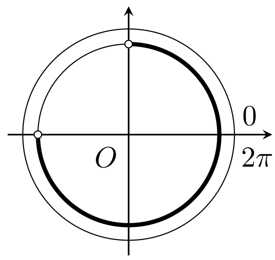
Résolution sur $\mathbb{R}$:

$$-\frac{3\pi}{4}+2k\pi < x+\frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}+2k\pi$$

$$-\pi+2k\pi < x < \frac{\pi}{2}+2k\pi\,.$$

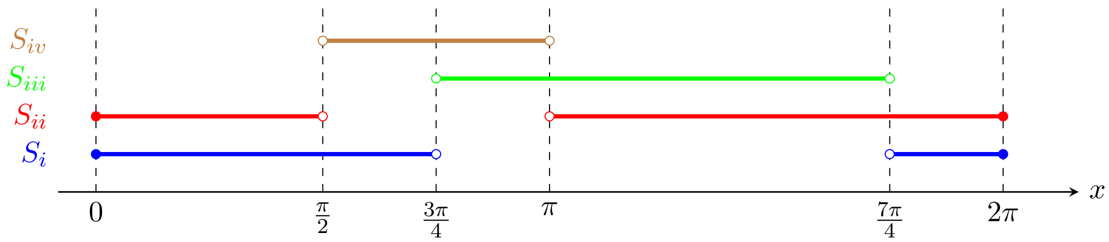
Résolution sur $[\,0\,,\,2\pi\,]$:

$$S_{ii} = [\,0\,,\,\tfrac{\pi}{2}\,[\,\cup\,]\,\pi\,,\,2\pi\,]\,.$$



(iv) On en déduit l'ensemble solution de $\cos x-\sin x+1<0$: $S_{iv} =]\,\frac{\pi}{2}\,,\,\pi\,[$.

Et pour finir :



$$S=(S_i\cap S_{ii})\ \cup\ (S_{iii}\cap S_{iv}) = \left[0\,,\ \tfrac{\pi}{2}\right[\ \cup\ \left]\tfrac{3\pi}{4}\,,\ \pi\right[\ \cup\ \left]\tfrac{7\pi}{4}\,,\ 2\pi\right]\,.$$

Ex*-08-06*: Exercice facultatif
Calculer la valeur exacte de $\cos(\frac{2\pi}{5})$*. En déduire la construction à la règle et au compas d'un pentagone régulier inscrit dans un cercle trigonométrique.*

Indication : poser $x=\cos(\frac{2\pi}{5})$ *et chercher une équation polynomiale satisfaite par* x *en utilisant les formules trigonométriques pour exprimer tout d'abord* $\cos(\frac{4\pi}{5})$*, puis* $\cos(\frac{8\pi}{5})$ *de deux manières différentes.*

Posons $x=\cos(\frac{2\pi}{5})$. Par formule de duplication on a :

$$\cos(\tfrac{4\pi}{5})=2x^2-1 \quad\text{et}\quad \cos(\tfrac{8\pi}{5})=2(2x^2-1)^2-1=8x^4-8x^2+1.$$

On sait par ailleurs que :

$$\cos(\tfrac{8\pi}{5})=\cos(2\pi-\tfrac{2\pi}{5})=\cos(\tfrac{2\pi}{5})=x.$$

On en déduit que x vérifie l'équation suivante de degré 4 :

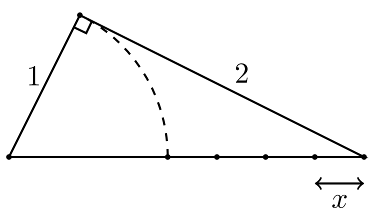
$$8x^4-8x^2-x+1=0.$$

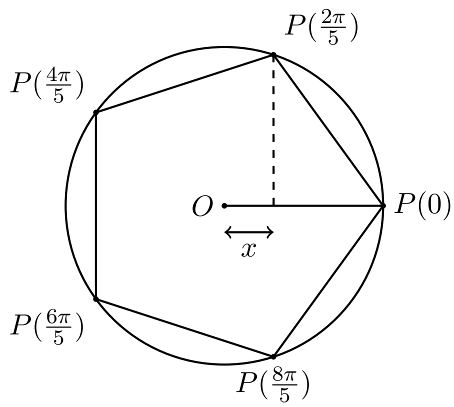
En fait, le raisonnement ci-dessus montre que cette équation est vérifiée par $\cos(\alpha)$ dès que $\cos(4\alpha) = \cos(\alpha)$. En prenant $\alpha = 0$ et $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ (pour lesquels 4α et α diffèrent d'un multiple de 2π), on voit que 1 et $-\frac{1}{2}$ sont racines du polynôme ci-dessus. On peut donc factoriser l'expression ci-dessus par $(x-1)(2x+1)$ pour obtenir :

$$(x-1)(2x+1)(4x^2+2x-1) = 0$$

Comme $x \neq 1, -\frac{1}{2}$, on en déduit que x est racine du dernier facteur, ce qui conduit, par les formules de Viète à $x = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$. Il reste à remarquer que x est positif, car $\frac{2\pi}{5}$ est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, pour conclure que $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Pour la construction du pentagone régulier, on commence par construire un segment de longueur x à la règle et au compas : pour cela, on construit deux segments de longueurs respectives 1 et 2 formant entre eux un angle droit puis on fait apparaitre la longueur x sur l'hypothénuse du triangle rectangle ainsi construit (qui mesure $\sqrt{5}$ par le théorème de Pythagore).





On reporte ensuite la longueur x obtenue sur l'axe des abscisses du cercle trigonométrique donné, afin de faire apparaitre le point $P(\frac{2\pi}{5})$. Les autres sommets du pentagone sont obtenues successivement en reportant la longueur séparant $P(0)$ de $P(\frac{2\pi}{5})$.