Analyse A Mise à Niveau, EPFL

Série 07: Equations trigonométriques

***Ex*-07-01**: *En dessinant le cercle trigonométrique, observer la valeur des quantités suivantes :*

a) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ *et* $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

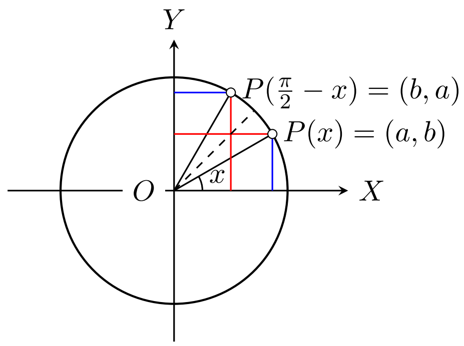
b) $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ *et* $\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

c) $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ *et* $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

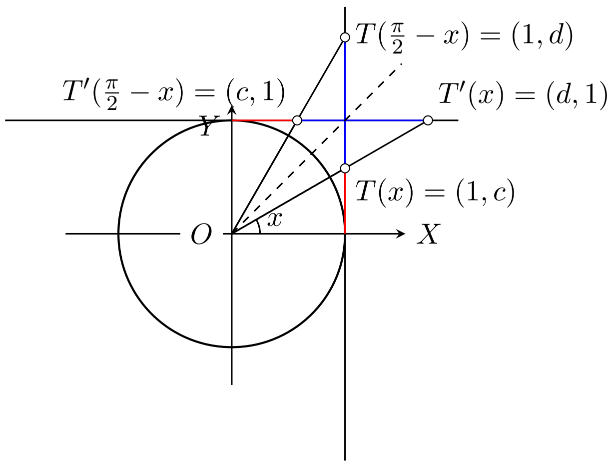
d) $\tan\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ *et* $\cot\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

On dessine chaque situation, en prenant un angle x dans le premier cadran (différent de $\frac{\pi}{4}$ pour pouvoir bien visualier les choses.)

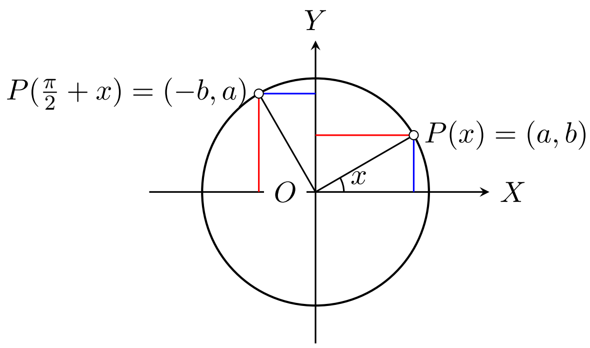
a) On rappelle que le point $P(\alpha)$ associé à l'angle α est de coordonnée $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$.



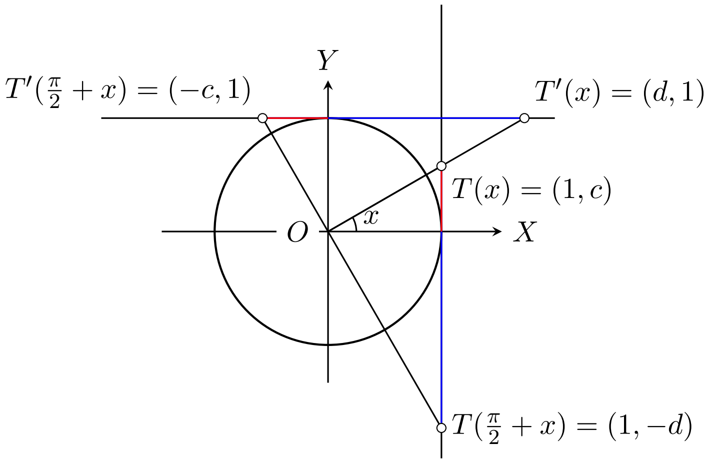
b) On rappelle que $\tan(\alpha)$ est l'ordonnée du point $T(\alpha)$ et $\cot(\alpha)$ est l'abcisse du point $T'(\alpha)$



c) On rappelle que le point $P(\alpha)$ associé à l'angle α est de coordonnée $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$.



d) On rappelle que $\tan(\alpha)$ est l'ordonnée du point $T(\alpha)$ et $\cot(\alpha)$ est l'abcisse du point $T'(\alpha)$



Ex-07-02: *Résoudre les équations suivantes dans l'intervalle donné :*

a) $\cos x = \frac{1}{2}$, $15\pi \leq x \leq 16\pi$ *c)* $\tan x = -1$, $-4\pi \leq x \leq -3\pi$

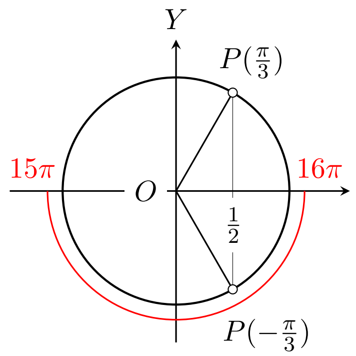
b) $\sin x = -\frac{1}{2}$, $15\pi \leq x \leq 16\pi$ *d)* $\cot x = \sqrt{3}$, $-\pi \leq x \leq 0$

a) $\cos x = \frac{1}{2}$, $15\pi \leq x \leq 16\pi$

Résolution sur $\mathbb{R}$:

Une solution particulière est donnée par la valeur remarquable $\alpha = \frac{\pi}{3}$. On en déduit toutes les autres :

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + 2\,k\,\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\,k\,\pi \end{array}\right. \qquad k \in \mathbb{Z}$$



Résolution sur l'intervalle $[15\pi\,,\,16\pi]$:

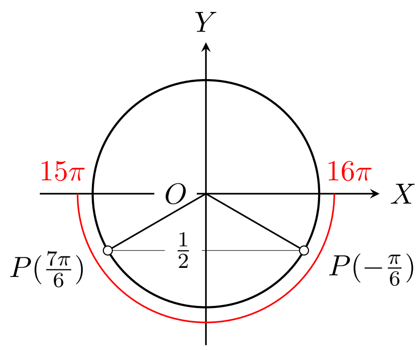
$$x = 16\pi - \frac{\pi}{3}\,, \qquad S = \left\{\frac{47\pi}{3}\right\}\,.$$

b) $\sin x = -\frac{1}{2}$, $15\pi \leq x \leq 16\pi$

Résolution sur $\mathbb{R}$:

Une solution particulière est donnée par la valeur remarquable $\alpha = -\frac{\pi}{6}$. On en déduit toutes les autres :

$$\sin x = \sin -\frac{\pi}{6} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + 2\,k\,\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{7\pi}{6} + 2\,k\,\pi \end{array}\right. \qquad k \in \mathbb{Z}$$



Résolution sur l'intervalle $[15\pi\,,\,16\pi]$: $x = 15\pi + \frac{\pi}{6}$ ou $x = 16\pi - \frac{\pi}{6}$,

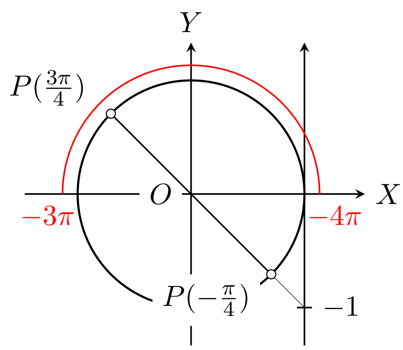
$$S = \left\{\frac{91\pi}{6}\,,\,\frac{95\pi}{6}\right\}\,.$$

c) $\tan x = -1$, $-4\pi \leq x \leq -3\pi$

Résolution sur $\mathbb{R}$:

Une solution particulière est donnée par la valeur remarquable $\alpha = -\frac{\pi}{4}$. On en déduit toutes les autres :

$$\tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{4} + k\,\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$



Résolution sur l'intervalle $[-4\pi\,,\,-3\pi\,]$:

L'unique solution, représentée par le point $P\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ est donnée par

$$x = -4\pi + \frac{3\pi}{4} \qquad \text{ou} \qquad x = -3\pi - \frac{\pi}{4}\,, \qquad S = \left\{-\tfrac{13\pi}{4}\right\}\,.$$

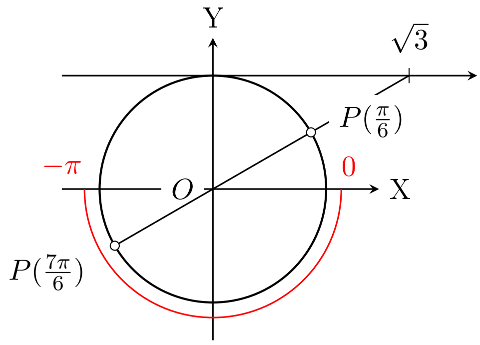
d) $\cot x = \sqrt{3}\,,\quad -\pi \le x \le 0$

Résolution sur $\mathbb{R}$:

Une solution particulière est donnée par la valeur remarquable $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

On en déduit toutes les autres :

$$\cot x = \cot\left(\tfrac{\pi}{6}\right) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{6} + k\,\pi\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$



L'unique solution, représentée par le point $P\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ est donnée par

$$x = -\pi + \frac{\pi}{6}\,, \qquad S = \left\{-\tfrac{5\pi}{6}\right\}\,.$$

Ex-07-03: *Résoudre les équations suivantes :*

a) $(\cos t)\,(2\,\cos t + 3) = -1$ *b)* $4 - 5\sin t = 2\cos^2 t\,,\quad -\frac{11\pi}{2} \le t \le -5\pi$

a) $(\cos t)\,(2\,\cos t + 3) = -1\,,\qquad D_{\text{def}} = \mathbb{R}\,.$

C'est une équation du deuxième degré en $\cos t$:

$$(\cos t)\,(2\,\cos t + 3) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad 2\,\cos^2 t + 3\,\cos t + 1 = 0\,.$$

On la résout à l'aide de son discriminant Δ :

$$\Delta = 3^2 - 8 = 1\,, \qquad \cos t = \frac{-3-1}{4} = -1 \qquad \text{ou} \qquad \cos t = \frac{-3+1}{4} = -\frac{1}{2}\,,$$

ou en devinant une factorisation :

$$2\,\cos^2 t + 3\,\cos t + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2\,\cos t + 1)\,(\cos t + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos t = -1 \qquad \text{ou} \qquad \cos t = -\frac{1}{2}\,.$$

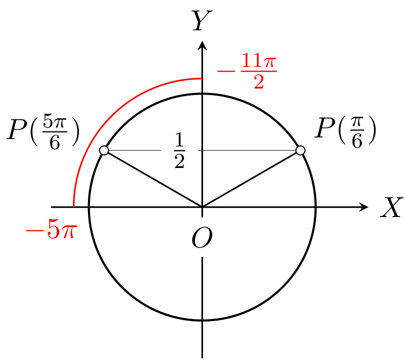
On résout chaque équation élémentaire :

- $\cos t = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos t = \cos\pi \quad \Leftrightarrow \quad t = \pi + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$
- $\cos t = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos t = \cos\frac{2\pi}{3} \quad \Leftrightarrow \quad t = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$

L'ensemble solution est la réunion de toutes les solutions :

$$S = \left\{-\tfrac{2\pi}{3} + 2k\pi\,,\ \tfrac{2\pi}{3} + 2k\pi\,,\ \pi + 2k\pi\,,\quad k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

b) $4 - 5\sin t = 2\cos^2 t\,,\quad -\frac{11\pi}{2} \le t \le -5\pi$



$4 - 5\sin t = 2\,(1 - \sin^2 t)$

$\Leftrightarrow\quad 2\sin^2 t - 5\sin t + 2 = 0$

$\Leftrightarrow\quad (2\sin t - 1)\,(\sin t - 2) = 0$

$\Leftrightarrow\quad \sin t = \frac{1}{2}\quad$ car $\quad \sin t \neq 2 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$

$\sin t = \frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \sin t = \sin\frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow\quad t = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad$ ou $\quad t = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\,,\quad k \in \mathbb{Z}.$

Sur l'intervalle $[-\frac{11\pi}{2}\,,\,-5\pi\,]\,,\quad t = -5\pi - \frac{\pi}{6}\,,\quad S = \left\{-\frac{31\pi}{6}\right\}.$

Ex-07-04: *Résoudre les équations suivantes sur l'intervalle donné.*

a) $\sin(4x + \frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\qquad x \in [\,0\,,\,\pi\,]\,,$

b) $4\,\sin^4(2x) - 11\,\sin^2(2x) + 6 = 0\,,\qquad x \in [-\frac{3\pi}{2}\,,\,-\frac{\pi}{2}\,]\,,$

c) $\tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}\,,\qquad x \in [\,0\,,\,\pi\,]\,,$

d) $\cot^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{3}\,,\qquad x \in\,]\,0\,,\,2\pi\,[\,.$

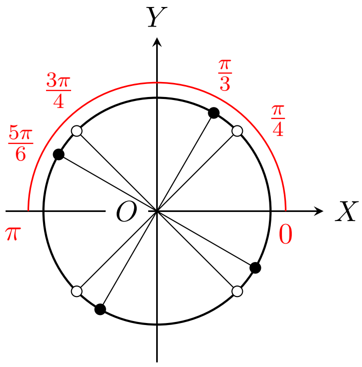
a) Résolution de l'équation $\sin(4x + \frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ sur l'intervalle $[\,0\,,\,\pi\,]$.

- Résolution sur $\mathbb{R}$

$$\sin(4x + \tfrac{\pi}{3}) = -\tfrac{\sqrt{3}}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \sin(4x + \tfrac{\pi}{3}) = \sin(-\tfrac{\pi}{3})$$

$$\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} 4x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 4x + \frac{\pi}{3} = \pi - (-\frac{\pi}{3}) + 2k\pi \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} 4x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 4x = \pi + 2k\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \\ \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \end{array}\right. \qquad k \in \mathbb{Z}$$



- Résolution sur l'intervalle $[\,0\,,\,\pi\,]$

  Il y a quatre solutions sur l'intervalle $[\,0\,,\,\pi\,]$,

  - celles définies par $-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}\,,\quad k=1,2:\quad x=\dfrac{\pi}{3}$ ou $x=\dfrac{5\pi}{6}$
  - et celles définies par $\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\,,\quad k=0,1:\quad x=\dfrac{\pi}{4}$ ou $x=\dfrac{3\pi}{4}$.

$$S=\left\{\,\tfrac{\pi}{4}\,,\ \tfrac{\pi}{3}\,,\ \tfrac{3\pi}{4}\,,\ \tfrac{5\pi}{6}\,\right\}.$$

b) Résolution de l'équation $\quad 4\sin^4(2x)-11\sin^2(2x)+6=0$.

Domaine de définition : $\quad D_{\text{def}}=\mathbb{R}$.

On résout cette équation bicarrée à l'aide de son discriminant Δ :

$$\Delta=(-11)^2-4\cdot 4\cdot 6=25\,,\qquad \sin^2(2x)=\frac{11-5}{8}=\frac{3}{4}\quad\text{ou}\quad \sin^2(2x)=\frac{11+5}{8}=2\,,$$

Seule la solution $\sin^2(2x)=\frac{3}{4}$ est acceptable :

$$\sin^2(2x)=\frac{3}{4}\quad\Leftrightarrow\quad \sin(2x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\quad\text{ou}\quad \sin(2x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

- $\sin(2x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\quad\Leftrightarrow\quad\sin(2x)=\sin(-\frac{\pi}{3})\quad\Leftrightarrow\quad\left\{\begin{array}{l}2x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\\ \text{ou}\\ 2x=\frac{4\pi}{3}+2k\pi\end{array}\right.$

  $\Leftrightarrow\quad\left\{\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{6}+k\pi\\ \text{ou}\\ x=\frac{2\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.\qquad k\in\mathbb{Z}$

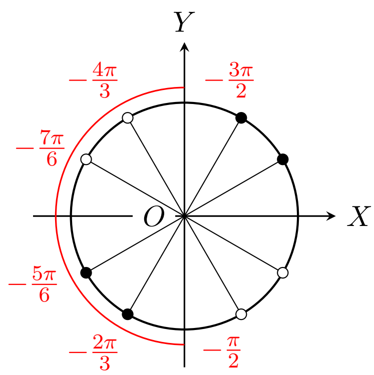
- $\sin(2x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad\Leftrightarrow\quad\sin(2x)=\sin(\frac{\pi}{3})\quad\Leftrightarrow\quad\left\{\begin{array}{l}2x=\frac{\pi}{3}+2k\pi\\ \text{ou}\\ 2x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi\end{array}\right.$

  $\Leftrightarrow\quad\left\{\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+k\pi\\ \text{ou}\\ x=\frac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.\qquad k\in\mathbb{Z}$

Résolution sur l'intervalle $\left[-\frac{3\pi}{2}\,,\,-\frac{\pi}{2}\right]$

- Deux solutions correspondent à $\sin(2x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,
  il s'agit de $x=-\frac{4\pi}{3}$ et $x=-\frac{7\pi}{6}$.
- Deux solutions correspondent à $\sin(2x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$,
  il s'agit de $x=-\frac{5\pi}{6}$ et $x=-\frac{2\pi}{3}$.

$$S=\left\{-\tfrac{4\pi}{3}\,,\ -\tfrac{7\pi}{6}\,,\ -\tfrac{5\pi}{6}\,,\ -\tfrac{2\pi}{3}\,\right\}.$$



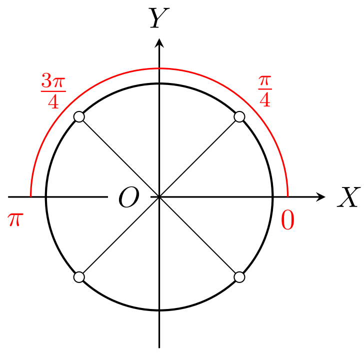
c) Résolution de l'équation $\tan\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ sur l'intervalle $[\,0\,,\,\pi\,]$.

- Résolution sur $\mathbb{R}$

$$D_{\text{def}}=\left\{\,x\in\mathbb{R}\mid 2x+\tfrac{\pi}{3}\in D_{\tan}\,\right\}=\mathbb{R}\setminus\left\{\,\tfrac{\pi}{12}+\tfrac{k\pi}{2}\,,\ k\in\mathbb{Z}\,\right\}.$$

$$\tan\left(2x+\tfrac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}\quad\Leftrightarrow\quad\tan\left(2x+\tfrac{\pi}{3}\right)=\tan(-\tfrac{\pi}{6})\quad\Leftrightarrow\quad 2x+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{6}+k\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x = -\frac{\pi}{2} + k\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{4} + k\,\frac{\pi}{2}\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$



- Résolution sur l'intervalle $[\,0\,,\,\pi\,]$

  Il y a deux solutions sur l'intervalle $[\,0\,,\,\pi\,]$, celles qui correspondent à $k=1$ et $k=2$.

$$S = \left\{\, \tfrac{\pi}{4}\,,\ \tfrac{3\pi}{4} \,\right\}\,.$$

d) Résolution de l'équation $\cot^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{3}$ sur l'intervalle $]\,0\,,\,2\pi\,[$.

$$D_{\text{def}} = \left\{\, x \in \mathbb{R} \mid \tfrac{x}{2} \in D_{\cot} \,\right\} = \mathbb{R} \setminus \{\,2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\,\}\,.$$

$$\cot^2\left(\tfrac{x}{2}\right) = \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \cot\left(\tfrac{x}{2}\right) = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\,.$$

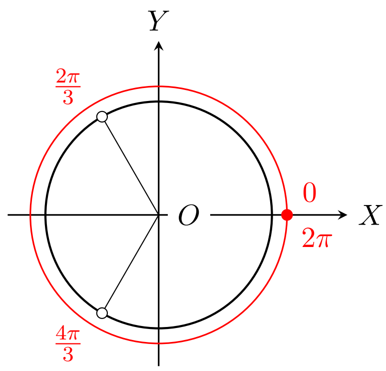
- Résolution sur $\mathbb{R}$

  - $\cot\left(\frac{x}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \cot\left(\frac{x}{2}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{3} + k\,\pi$

    $$\Leftrightarrow \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2k\,\pi\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

  - $\cot\left(\frac{x}{2}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \cot\left(\frac{x}{2}\right) = \cot\left(-\frac{\pi}{3}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x}{2} = -\dfrac{\pi}{3} + k\,\pi$

    $$\Leftrightarrow \quad x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\,\pi\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$



- Résolution sur l'intervalle $]\,0\,,\,2\pi\,[$

  Il y a deux solutions sur l'intervalle $]\,0\,,\,2\pi\,[$,

  - l'une correspond à $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\,\pi$ avec $k = 0$
  - et l'autre correspond à $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\,\pi$ avec $k = 1$.

$$S = \left\{\, \tfrac{2\pi}{3}\,,\ \tfrac{4\pi}{3} \,\right\}\,.$$

Ex-07-05: *Résoudre les équations suivantes :*

a) $\sin(2x) = \sin(x + \frac{\pi}{3})$

b) $\cos(2x) = \cos(\frac{x}{3})$

c) $\cos(2x) = \sin(3x)$

d) $\tan(\frac{x}{3}) = \cot(x - \frac{\pi}{6})$

a) $\sin(2x) = \sin(x + \frac{\pi}{3}) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x = x + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x = \pi - (x + \frac{\pi}{3}) + 2k\pi \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 3x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi\,,\ \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\,,\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

b) $\cos(2x) = \cos(\frac{x}{3}) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x = \frac{x}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x = -\frac{x}{3} + 2k\pi \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{5x}{3} = 2k\pi \\ \text{ou} \\ \frac{7x}{3} = 2k\pi \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{6k\pi}{5} \\ \text{ou} \\ x = \frac{6k\pi}{7} \end{cases} \qquad S = \left\{ \frac{6k\pi}{5}\,,\ \frac{6k\pi}{7}\,,\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

c) $\cos(2x) = \sin(3x) \quad \Leftrightarrow \quad \cos(2x) = \cos[\,\frac{\pi}{2} - 3x\,]$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} - 3x + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x = -[\,\frac{\pi}{2} - 3x\,] + 2k\pi \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 5x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ -x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} \\ \text{ou} \\ x = +\frac{\pi}{2} - 2k\pi \end{cases} \qquad S = \left\{ \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}\,,\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

d) $\tan(\frac{x}{3}) = \cot(x - \frac{\pi}{6})\,, \quad D_{\text{def}} = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{x}{3} \in D_{\tan} \ \text{ et } \ x - \frac{\pi}{6} \in D_{\cot} \right\},$

$$D_{\text{def}} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3\pi}{2} + 3k\pi\,,\ \frac{\pi}{6} + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$\tan(\frac{x}{3}) = \cot(x - \frac{\pi}{6}) \quad \Leftrightarrow \quad \tan(\frac{x}{3}) = \tan[\,\frac{\pi}{2} - (x - \frac{\pi}{6})\,]$

$\Leftrightarrow \quad \frac{x}{3} = \frac{\pi}{2} - (x - \frac{\pi}{6}) + k\pi \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4x}{3} = \frac{2\pi}{3} + k\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + \frac{3k\pi}{4} \quad k \in \mathbb{Z}.$

On vérifie que ces valeurs sont bien dans le domaine de définition :

- $\frac{\pi}{2} + \frac{3k\pi}{4} \neq \frac{\pi}{6} + n\pi\,, \quad \forall\, k, n \in \mathbb{Z}$
- et $\frac{\pi}{2} + \frac{3k\pi}{4} \neq \frac{3\pi}{2} + 3n\pi\,, \quad \forall\, k, n \in \mathbb{Z},$ car

  $\frac{\pi}{2} + \frac{3k\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} + 3n\pi \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3k}{4} = 3n + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3\,(k - 4n) = 4\,,$

  ce qui n'est pas possible si k et n sont entiers.

$$S = \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{3k\pi}{4}\,,\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Ex-07-06: *Résoudre les inéquations suivantes dans l'intervalle donné :*

a) $\sin x \geq \frac{1}{2}$, $\quad 4\pi \leq x < 5\pi$,

b) $-\frac{1}{2} < \cos x < 0$, $\quad -5\pi \leq x < -3\pi$,

c) $\sin(\,3x + \frac{\pi}{4}\,) > \sin(-\frac{3\pi}{4}\,)$, $\quad -2\pi \leq x < 0$,

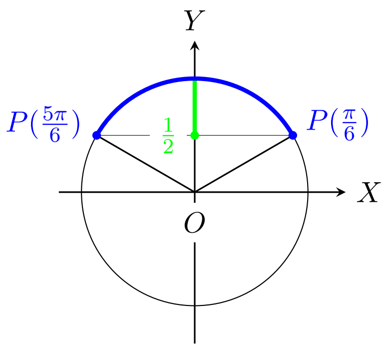
d) $\tan x \leq -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\quad 0 \leq x < 2\pi$,

e) $\cot x > \sqrt{3}$, $\quad -2\pi \leq x < \pi$,

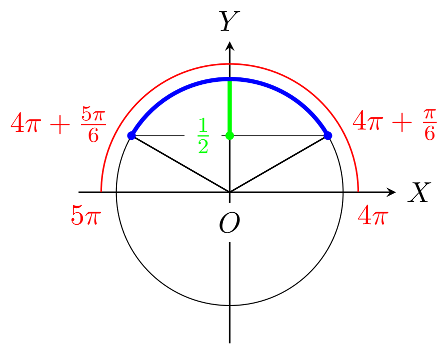
f) $\tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\quad x \in [-\pi\,,\,0\,]$.

a) Résolution de l'inéquation $\quad \sin x \geq \frac{1}{2} \quad$ sur l'intervalle $\quad [\,4\pi\,,\,5\pi\,[$

- Représentation des points $P(x)$ tels que
$$\sin x \geq \tfrac{1}{2}\,.$$
On représente, sur l'axe des sinus, les valeurs plus grandes que $\frac{1}{2}$.
Puis on en déduit les points du cercle trigonométrique dont l'ordonnée est plus grande que $\frac{1}{2}$.
$$\sin x \geq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$



- Toujours graphiquement, on retient les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[\,4\pi\,,\,5\pi\,[$:
$$4\pi + \frac{\pi}{6} \leq x \leq 4\pi + \frac{5\pi}{6}\,,$$
$$S = \left[\,\tfrac{25\pi}{6}\,,\,\tfrac{29\pi}{6}\,\right]\,.$$



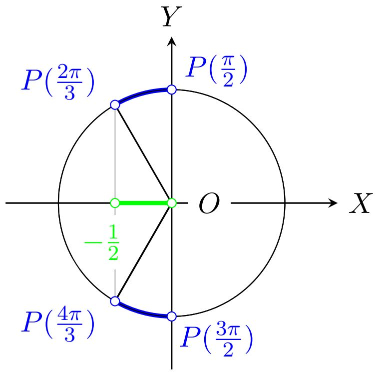
b) Résolution de l'inéquation $\quad -\frac{1}{2} < \cos x < 0 \quad$ sur l'intervalle $\quad [-5\pi\,,\,-3\pi\,[$

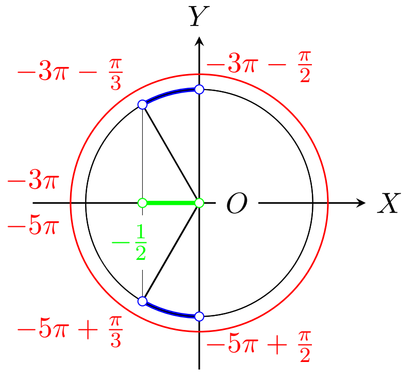
- Représentation des points $P(x)$ tels que $\quad -\frac{1}{2} < \cos x < 0$.

  On représente, sur l'axe des cosinus, les valeurs comprises entre $-\frac{1}{2}$ et 0 .

  Puis on en déduit les points du cercle trigonométrique dont l'abscisse est comprise entre $-\frac{1}{2}$ et 0 .

$$-\tfrac{1}{2} < \cos x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \frac{4\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{array} \right. \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$





- Toujours graphiquement, on retient les solutions qui appartiennent à $[-5\pi\,,\,-3\pi\,[$:

$$-5\pi+\frac{\pi}{3}<x<-5\pi+\frac{\pi}{2} \qquad \text{ou} \qquad -3\pi-\frac{\pi}{2}<x<-3\pi-\frac{\pi}{3}\,,$$

$$S=\,]-\tfrac{14\pi}{3}\,,\,-\tfrac{9\pi}{2}\,[\;\cup\;]-\tfrac{7\pi}{2}\,,\,-\tfrac{10\pi}{3}\,[\,.$$

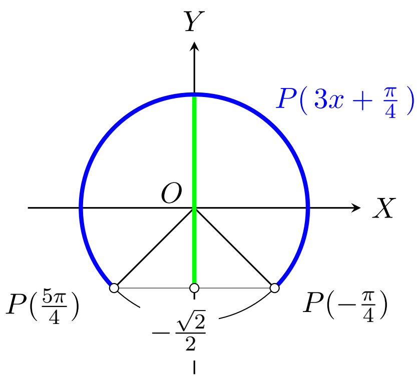
c) Résolution de l'inéquation $\quad\sin(\,3x+\frac{\pi}{4}\,)\,>\,\sin(-\frac{3\pi}{4}\,)\quad$ sur l'intervalle $\quad[-2\pi\,,\,0\,[$

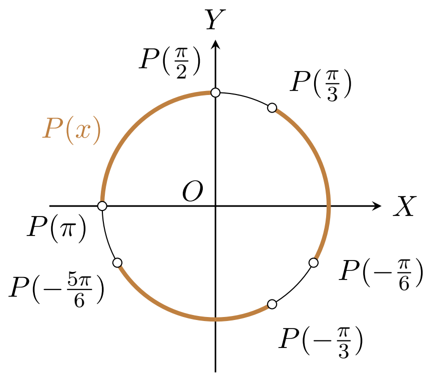
- Représentation des points $P(\,3x+\frac{\pi}{4}\,)$ tels que $\quad\sin(\,3x+\frac{\pi}{4}\,)\,>\,\sin(-\frac{3\pi}{4}\,)$.

  Sur l'axe des sinus, on représente les valeurs supérieures à $\sin(-\frac{3\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

  Puis on représente les points du cercle trigonométrique dont l'ordonnée est plus grande que $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\sin(\,3x+\tfrac{\pi}{4}\,)\,>\,\sin(-\tfrac{3\pi}{4}\,) \quad\Leftrightarrow\quad -\frac{\pi}{4}+2k\pi<3x+\frac{\pi}{4}<\frac{5\pi}{4}+2k\pi\,,\quad k\in\mathbb{Z}\,.$$



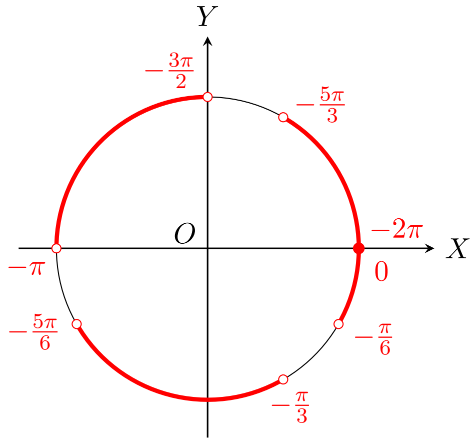


- On en déduit les points $P(x)$ vérifiant $\sin(\,3x+\frac{\pi}{4}\,)>\sin(-\frac{3\pi}{4}\,)$:

$$\begin{aligned}-\frac{\pi}{4}+2k\pi<3x+\frac{\pi}{4}<\frac{5\pi}{4}+2k\pi \quad&\Leftrightarrow\quad -\frac{\pi}{2}+2k\pi<3x<\pi+2k\pi\\ &\Leftrightarrow\quad -\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}<x<\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\,,\quad k\in\mathbb{Z}\,.\end{aligned}$$

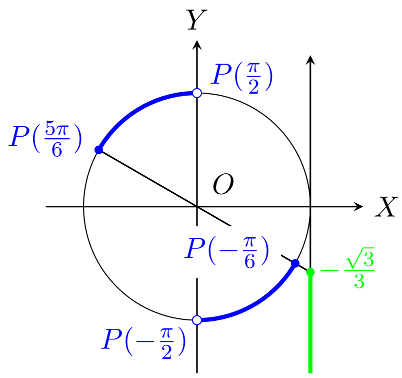
- Toujours graphiquement, on retient les solutions qui appartiennent à $[-2\pi\,,\,0\,[$:

$$S=[-2\pi\,,\,-\tfrac{5\pi}{3}\,[\,\cup\,]-\tfrac{3\pi}{2}\,,-\pi\,[\,\cup\,]-\tfrac{5\pi}{6}\,,-\tfrac{\pi}{3}\,[\,\cup\,]-\tfrac{\pi}{6}\,,0\,[\,.$$



d) Résolution de l'inéquation $\tan x \leq -\frac{\sqrt{3}}{3}$ sur l'intervalle $[\,0\,,\,2\pi\,[$

- Représentation des points $P(x)$ tels que
$$\tan x \leq -\frac{\sqrt{3}}{3}\,.$$
On représente, sur l'axe des tangentes, les valeurs plus petites que $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.
Puis on en déduit les points correspondants sur le cercle trigonométrique.

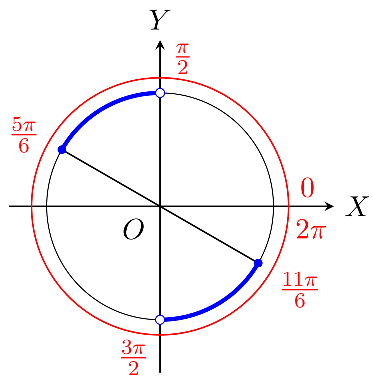


$$\tan x \leq -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq -\frac{\pi}{6} + k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

- Toujours graphiquement, on retient les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[\,0\,,\,2\pi\,[$:

$$\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{5\pi}{6} \qquad \text{ou} \qquad \frac{3\pi}{2} < x \leq \frac{11\pi}{6}$$

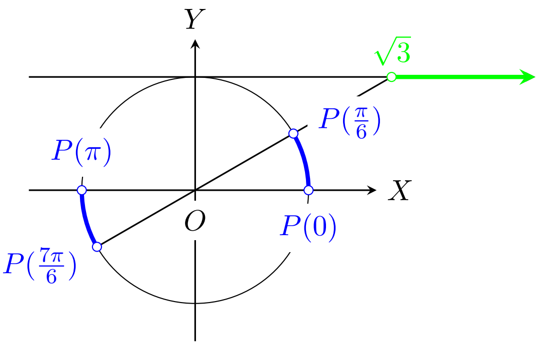
$$S = \left]\,\tfrac{\pi}{2}\,,\,\tfrac{5\pi}{6}\,\right] \,\cup\, \left]\,\tfrac{3\pi}{2}\,,\,\tfrac{11\pi}{6}\,\right].$$

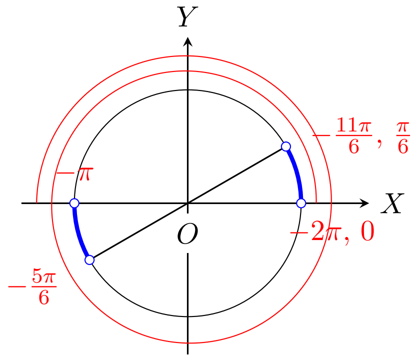


e) Résolution de l'inéquation $\cot x > \sqrt{3}$ sur l'intervalle $[-2\pi\,,\,\pi\,[$

- Représentation des points $P(x)$ tels que $\cot x > \sqrt{3}\,.$
On représente, sur l'axe des cotangentes, les valeurs plus grandes que $\sqrt{3}\,.$
Puis on en déduit les points correspondants sur le cercle trigonométrique.

$$\cot x > \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad k\pi < x < \frac{\pi}{6} + k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$



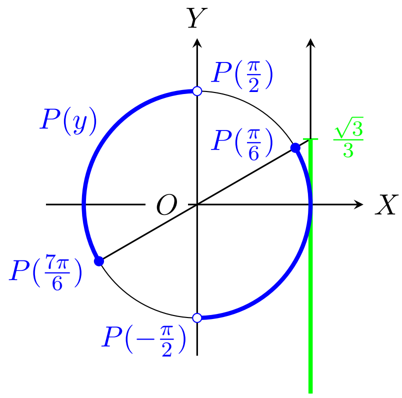


- Toujours graphiquement, on retient les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[-2\pi\,,\,\pi\,[$:

$$-2\pi < x < -2\pi + \frac{\pi}{6} \qquad \text{ou} \qquad -\pi < x < -\pi + \frac{\pi}{6} \qquad \text{ou} \qquad 0 < x < \frac{\pi}{6}\,,$$

$$S = \,\left]-2\pi\,,\, -\tfrac{11\pi}{6}\right[\, \cup \,\left]-\pi\,,\, -\tfrac{5\pi}{6}\right[\, \cup \,\left]0\,,\, \tfrac{\pi}{6}\right[\,.$$

f) Résolution sur $\mathbb{R}$ de l'inéquation $\tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$



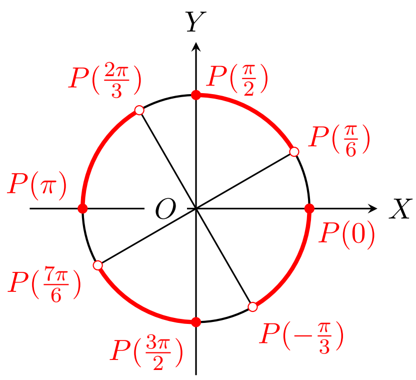
- Représentation des points $P(y)$ tels que $\tan y \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$
  On représente, sur l'axe des tangentes, les valeurs plus petites que $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
  Puis on en déduit les points correspondants sur le cercle trigonométrique.
  $$\tan y \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{2} + k\pi < y \leq \frac{\pi}{6} + k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

- Solutions de l'inéquation $\tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$

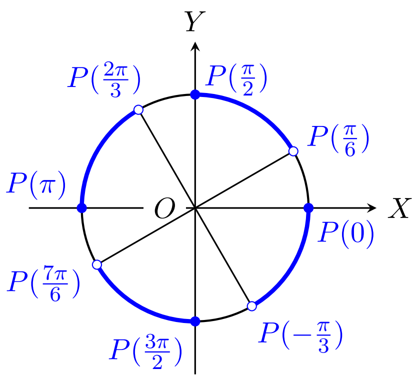
$$\tan\left(2x + \tfrac{\pi}{6}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{2} + k\pi < 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{6} + k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}$$

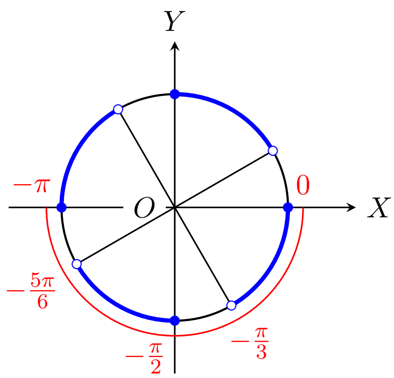
$$\Leftrightarrow \quad -\frac{2\pi}{3} + k\pi \;<\; 2x \;\leq\; k\pi \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} \;<\; x \;\leq\; \frac{k\pi}{2}\,.$$

On en déduit la représentation, sur le cercle trigonométrique, des points $P(x)$ représentant les solutions de l'inéquation $\tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$:



Recherche des solutions appartenant à l'intervalle $[-\pi\,,\,0\,]$





$$S = \{-\pi\} \cup \left]-\tfrac{5\pi}{6}\,,\,-\tfrac{\pi}{2}\right] \cup \left]-\tfrac{\pi}{3}\,,\,0\right].$$

Ex*-07-07*: **Exercice facultatif**

Il est midi. Sur une montre analogique, l'aiguille des heures et celle des minutes sont superposées.

a) A quels instants (heures, minutes, secondes) le seront-elles de nouveau ?

Indication : déterminer $\alpha_1(t)$ *, l'angle décrit par l'aiguille des heures en* t *secondes et* $\alpha_2(t)$ *, l'angle décrit par l'aiguille des minutes.*

b) Même question avec les trois aiguilles , celle des heures, des minutes et des secondes.

---

a)• Soit $\alpha_1(t)$ l'angle parcouru en t secondes par l'aiguille des heures.

- ∘ Pour une valeur de t positive, la mesure de l'angle α_1 est négative car le mouvement des aiguilles d'une montre s'effectue dans le sens trigonométrique négatif.
- ∘ D'autre part, l'aiguille des heures effectue un tour complet en 12 heures.

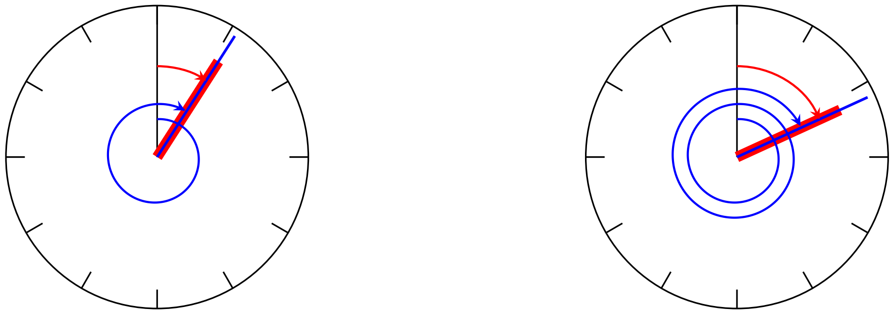
$$\begin{array}{rcl}
12 \text{ heures} & \longleftrightarrow & -2\pi \text{ radians} \\
12\cdot 60^2 \text{ secondes} & \longleftrightarrow & -2\pi \text{ radians} \\
1 \text{ seconde} & \longleftrightarrow & -\dfrac{2\pi}{12\cdot 60^2} \text{ radians} \\
t \text{ secondes} & \longleftrightarrow & -\dfrac{2\pi}{12\cdot 60^2}\; t \text{ radians.}
\end{array}$$

D'où l'expression cherchée : $\alpha_1(t) = -\dfrac{2\pi}{12\cdot 60^2}\; t\,.$

• De façon analogue, on en déduit que l'angle décrit par l'aiguille des minutes en t secondes est donné par

$$\alpha_2(t) = -\frac{2\pi}{60^2}\; t\,.$$

• Les deux aiguilles se superposent au temps t si les deux angles diffèrent d'un nombre entier de tours (si les deux angles sont des déterminations différentes d'un même angle orienté).



$$\alpha_1(t) - \alpha_2(t) = 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

$$-\frac{2\pi}{12\cdot 60^2}\,t + \frac{2\pi}{60^2}\,t = 2k\pi \quad \Leftrightarrow \quad t\left(-\frac{1}{12\cdot 60^2} + \frac{1}{60^2}\right) = k$$

$$t\left(\frac{11}{12\cdot 60^2}\right) = k \quad \Leftrightarrow \quad t = k\left(\frac{12\cdot 60^2}{11}\right) \text{ secondes}$$

$$t = k\left(\frac{11\cdot 60^2}{11} + \frac{60^2}{11}\right) = k\left(\frac{11\cdot 60^2}{11} + \frac{55\cdot 60}{11} + \frac{5\cdot 60}{11}\right) \text{ secondes}$$

$$t \approx k\,(1\text{h } 5'\ 27'')\,, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

b) Soit $\alpha_3(t)$ l'angle parcouru en t secondes par l'aiguille des secondes :

$$\alpha_3(t) = -\frac{2\pi}{60}\,t\,.$$

Les trois aiguilles se superposent au temps t si les trois angles diffèrent d'un nombre entier de tours.

$$\begin{cases} \alpha_1(t) - \alpha_2(t) = 2k\pi \\ \alpha_2(t) - \alpha_3(t) = 2\ell\pi \end{cases} \qquad k, \ell \in \mathbb{N}^*.$$

$$\begin{cases} -\dfrac{2\pi}{12\cdot 60^2}\,t + \dfrac{2\pi}{60^2}\,t = 2k\pi \\ -\dfrac{2\pi}{60^2}\,t + \dfrac{2\pi}{60}\,t = 2\ell\pi \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -t + 12\,t = k\cdot 12\cdot 60^2 \\ -t + 60\,t = \ell\cdot 60^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} t = \dfrac{12}{11}\cdot 60^2\cdot k \\ t = \dfrac{1}{59}\cdot 60^2\cdot \ell \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{12\,k}{11} = \frac{\ell}{59} \quad \Leftrightarrow \quad 12\cdot 59\,k = 11\,\ell\,.$$

La première rencontre des trois aiguilles a lieu lorsque

$$(k\,,\ \ell) = (11\,,\ 12\cdot 59)$$

car les deux nombres 11 et $12\cdot 59$ sont premiers entre eux.

Or $\quad k = 11 \quad \Leftrightarrow \quad t = 12\cdot 60^2$ secondes $=$ 12 heures.

Les trois aiguilles sont de nouveau superposées à minuit : cela n'est pas une surprise !

Mais ce que nous venons de démontrer c'est qu'il n'y a pas de superposition des trois aiguilles de la montre entre midi et minuit.