Analyse A Mise à Niveau, EPFL

Série 06: Racine

Ex-06-01: *Simplifier les expressions suivantes où p et q sont des nombres réels strictement positifs.*

a) $A = [-p\,(-p^{-2})^m]^{-2m}$, $m \in \mathbb{Z}$.

b) $B = 9\,\sqrt[3]{2\,p^6\,q} + 3\,\sqrt[3]{-16\,p^3\,q} + \sqrt[3]{2\,q}$.

a) $A = \left[-p\,(-p^{-2})^m\right]^{-2m}, \qquad m \in \mathbb{Z}$

Travailler étape par étape en commençant par éliminer les parenthèses les plus extérieures.

Rappel de quelques propriétés : $\forall\, k, n \in \mathbb{Z}\,,\ \forall\, p, q \in \mathbb{R}\,,$

* $(p \cdot q)^n = p^n \cdot q^n$, en particulier, $(-p)^n = (-1)^n \cdot p^n$
* $\left(p^k\right)^n = p^{k \cdot n}$, en particulier, $(-1)^{2\,n} = \left[(-1)^2\right]^n = (+1)^n = +1$.

$$\begin{aligned}
A &= \left[-p\,(-p^{-2})^m\right]^{-2m}, \qquad m \in \mathbb{Z} \\
&= (-p)^{-2m} \cdot (-p^{-2})^{-2m^2} \\
&= (-1)^{-2m} \cdot p^{-2m} \cdot (-1)^{-2m^2} \cdot (p^{-2})^{-2m^2} \\
&= p^{-2m} \cdot p^{4m^2} \qquad \text{car } -2m \text{ et } -2m^2 \text{ sont des nombres pairs} \\
&= p^{4m^2-2m}.
\end{aligned}$$

b) $B = 9\,\sqrt[3]{2\,p^6\,q} + 3\,\sqrt[3]{-16\,p^3\,q} + \sqrt[3]{2\,q}$

Factoriser cette expression : dans les trois termes de B apparaît la quantité $\sqrt[3]{2\,q}$.

$$\begin{aligned}
B &= \sqrt[3]{2\,q}\,\left[9\,\sqrt[3]{p^6} + 3\,\sqrt[3]{-8\,p^3} + 1\right] \\
&= \sqrt[3]{2\,q}\,\left[9\,p^2 + 3\,p\,\sqrt[3]{-8} + 1\right] \\
&= \sqrt[3]{2\,q}\,\left[(3\,p)^2 - 2\,(3\,p) + 1\right] \\
&= \sqrt[3]{2\,q}\,\left(3p - 1\right)^2 .
\end{aligned}$$

Ex-06-02: *Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Dans les cinq cas suivants, déterminer si les deux expressions données sont égales. Justifier rigoureusement votre réponse.*

a) $A(x) = \dfrac{1}{x}\,\sqrt{x^2+x+1}$ *et* $a(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$,

b) $B(x) = \operatorname{sgn}(x)\,\sqrt{x^6+1}$ *et* $b(x) = x^3\,\sqrt{1 + \frac{1}{x^6}}$,

c) $C(x) = \sqrt[3]{x^4+x^3}$ *et* $c(x) = x\,\sqrt[3]{x+1}$,

d) $D(x) = \sqrt{x^6}$ *et* $d(x) = x^2\,|x|$,

e) $E(x) = \sqrt[4]{x^2}$ *et* $e(x) = \sqrt{x}$.

On commence par se forger une opinion en comparant, par exemple, les domaines de définition ou l'ensemble des valeurs des deux expressions.

Si les deux expressions semblent être différentes, on cherche un contre-exemple à l'égalité.

Si les deux expressions semblent être égales, on tente une démonstration.

a) Les deux expressions ont même domaine de définition $D_A = D_a = \mathbb{R}^*$, mais elles n'ont pas même ensemble de valeurs : $a(x)$ est toujours strictement positif, $A(x)$ peut être négatif.
On montre que ces deux expressions ne sont pas égales à l'aide d'un contre-exemple :

$$A(-1) = \frac{1}{x}\sqrt{x^2+x+1}\,\Big|_{x=-1} = -1 \qquad \text{et} \qquad a(-1) = \sqrt{1+\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{x^2}}\,\Big|_{x=-1} = +1\,.$$

b) Les deux expressions ont même domaine de définition $D_B = D_b = \mathbb{R}^*$ et même ensemble de valeurs : $\operatorname{Im} B = \operatorname{Im} b = \,]-\infty\,,\,-1\,[\,\cup\,]\,1\,,\,+\infty\,[\,.$
Montrons que ces deux expressions coïncident sur leur domaine de définition.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sgn}(x)\,\sqrt{x^6+1} &= \operatorname{sgn}(x)\,\sqrt{x^6\,(1+\tfrac{1}{x^6})}\\
&= \operatorname{sgn}(x)\,\sqrt{x^6}\,\sqrt{1+\tfrac{1}{x^6}}\\
&= \operatorname{sgn}(x)\,|x^3|\,\sqrt{1+\tfrac{1}{x^6}}\\
&= \operatorname{sgn}(x^3)\,|x^3|\,\sqrt{1+\tfrac{1}{x^6}}\\
&= x^3\,\sqrt{1+\tfrac{1}{x^6}}\,, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^*.
\end{aligned}$$

c) Les deux expressions ont même domaine de définition et même ensemble de valeurs.
Montrons que ces deux expressions coïncident sur leur domaine de définition.

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{x^4+x^3} &= \sqrt[3]{x^3\,(x+1)}\\
&= \sqrt[3]{x^3}\cdot\sqrt[3]{x+1}\\
&= x\,\sqrt[3]{x+1}\,, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^*.
\end{aligned}$$

d) Les deux expressions ont même domaine de définition et même ensemble de valeurs.
Montrons que ces deux expressions coïncident sur leur domaine de définition.

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^6} &= \sqrt{(x^3)^2}\\
&= |x^3|\\
&= |x^2\cdot x|\\
&= |x^2|\cdot|x|\\
&= x^2\cdot|x|\,, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^*.
\end{aligned}$$

e) Ces deux expressions ont des domaines de définition différents.
On montre que ces deux expressions ne sont pas égales à l'aide d'un contre-exemple :

$$E(-1) = 1 \qquad \text{et} \qquad -1 \notin D_e\,.$$

Ex-06-03*: Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *les équations irrationnelles suivantes :*

a) $\sqrt{-x^2-x+6} = -(x+1)\,,$

b) $\dfrac{x-2\,(1+\sqrt{x-1})}{2x-\sqrt{x-1}-5}=1\,.$

Rappel : $\sqrt{f}=g \Leftrightarrow g\geq 0$ et $f=g^2$.

a) Comment se ramener à une équation polynomiale ?
On commence par déterminer le domaine de définition de cette équation.
Domaine de définition.

$$D_{\text{def}}=\left\{x\in\mathbb{R}\mid -x^2-x+6\geq 0\right\}\,.$$

$$-x^2-x+6\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2+x-6\leq 0 \quad\Leftrightarrow\quad (x+3)\,(x-2)\leq 0\,.$$

$$D_{\text{def}}=[-3\,,\,2\,]\,.$$

L'équation $\sqrt{-x^2-x+6}=-(x+1)$ n'admet d'éventuelles solutions que si $-(x+1)$ est positif ou nul.
Résolution de l'équation sur son domaine de définition.

- Cette équation n'admet d'éventuelles solutions que si $-(x+1)\geq 0$.

  Condition de positivité :

  $$-(x+1)\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad x\leq -1 \quad\Leftrightarrow\quad x\in\,]-\infty\,,\,-1]=D_{\text{pos}}.$$

- Pour $x\in D_{\text{déf}}\cap D_{\text{pos}}=[-3,-1]$, on peut élever au carré :

  $$\begin{aligned}\sqrt{-x^2-x+6}=-(x+1) \quad&\Leftrightarrow\quad -x^2-x+6=[-(x+1)\,]^2\\ &\Leftrightarrow\quad 2x^2+3x-5=0 \quad\Leftrightarrow\quad (2x+5)\,(x-1)=0\end{aligned}$$

  $$\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} x=-\frac{5}{2}\in[-3,-1],\\ \text{ou}\\ x=1\notin[-3,-1].\end{array}\right.$$

  En conclusion : $S=\{-\frac{5}{2}\}$.

b) On commence par déterminer le domaine de définition de cette équation.
Domaine de définition.

$$D_{\text{def}}=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x-1\geq 0 \quad\text{et}\quad 2x-\sqrt{x-1}-5\neq 0\right\}\,.$$

i) $x-1\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad x\ \in[\,1\,,\,+\infty\,[$.

ii) Résolvons l'équation : $\sqrt{x-1}=2x-5$.

- Condition de positivité : $2x-5\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad x\ \in\ [\,\frac{5}{2}\,,\,+\infty\,[$.
- Pour $x\in D_{\text{déf}}\cap D_{\text{pos}}=\ [\,\frac{5}{2}\,,\,+\infty\,[$ on peut élever au carré :

  $$x-1=(2x-5)^2 \;\Leftrightarrow\; 4x^2-21x+26=0 \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{l} x=2\notin[\,\frac{5}{2}\,,\,+\infty\,[\;\;:\;\text{à exclure}\\ \text{ou}\\ x=\frac{13}{4}\in[\,\frac{5}{2}\,,\,+\infty\,[\end{array}\right.$$

  L'unique solution de l'équation $\sqrt{x-1}=2x-5$ est $x=\frac{13}{4}$.

En conclusion : $D_{\text{def}} = \left[\,1\,;\,\frac{13}{4}\,\right[\ \cup\ \left]\,\frac{13}{4}\,;\,+\infty\,\right[\,.$

On se ramène à une équation irrationnelle élémentaire en amplifiant les deux membres de l'équation par le dénominateur.

Résolution de l'équation sur son domaine de définition.

$$\frac{x - 2\,(1 + \sqrt{x-1})}{2x - \sqrt{x-1} - 5} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x - 2\,(1 + \sqrt{x-1}) = 2x - \sqrt{x-1} - 5$$
$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{x-1} = 3 - x\,.$$

Cette équation n'admet d'éventuelles solutions que si $3 - x \geq 0\,.$

Condition de positivité : $3 - x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in\ [\,1\,;\,3\,] = D_{\text{pos}}\,.$

Sur ce domaine restreint $D_{\text{déf}} \cap D_{\text{pos}} = [1, 3]$, l'équation devient équivalente à :

$$x - 1 = (3-x)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 7x + 10 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 2 \\ \text{ou} \\ x = 5\ :\ \text{à exclure} \end{cases}$$

En conclusion : $S = \{2\}\,.$

> ***Ex***-06-04*: Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *les inéquations suivantes :*
>
> *a)* $x - 3 > \sqrt{x^2 + 3x}\,,$ *b)* $\sqrt{\dfrac{x^2\,(2x-5)}{2\,(x+1)}} \geq 2 - x\,.$

Rappels :

- $\sqrt{f} < g \Leftrightarrow g \geq 0$ et $f < g^2$
- $\sqrt{f} > g \Leftrightarrow g < 0$ ou $(g \geq 0$ et $f > g^2)$

a) Distinguer deux cas selon que $x - 3$ est positif ou négatif.

On commence par déterminer le domaine de définition de cette inéquation.

Domaine de définition.

$$D_{\text{def}} = \left\{x \in \mathbb{R}\ |\ x^2 + 3x \geq 0\right\} = \left]-\infty\,,\,-3\right] \cup \left[\,0\,,+\infty\,\right[.$$

Condition de positivité.

$$D_{\text{pos}} = [3, +\infty[.$$

Premier cas

Pour $x \in D_{\text{déf}} \cap \overline{D}_{\text{pos}}$, on a

$$\underbrace{\sqrt{x^2 + 3x}}_{\geq 0}\ <\ \underbrace{x - 3}_{<0}\,.$$

Sur ce référentiel restreint, l'inéquation n'est pas vérifiée, l'ensemble solution est vide : $S_1 = \emptyset\,.$

Deuxième cas

Si $x \in D_{\text{déf}} \cap D_{\text{pos}}$, les deux membres de l'inéquation sont positifs, on peut les élever au carré :

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x^2+3x} < x-3 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2+3x < (x-3)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2+3x < x^2-6x+9 \\
&\Leftrightarrow \quad 9x < 9 \\
&\Leftrightarrow \quad x < 1\,.
\end{aligned}
$$

Sur ce référentiel restreint, l'ensemble solution est aussi vide : $S_2 = \emptyset\,.$

Conclusion

L'ensemble solution est la réunion des ensembles solutions partiels :

$$S = S_1 \cup S_2 = \emptyset\,.$$

b) Distinguer deux cas selon que $2-x$ est positif ou négatif.
On commence par déterminer le domaine de définition de cette inéquation.

Domaine de définition.

$$\mathcal{D}_{\text{def}} = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x+1 \neq 0 \;\text{ et }\; \tfrac{x^2\,(2x-5)}{2\,(x+1)} \geq 0 \right\} = \left]-\infty\,, -1\,\right[\,\cup\, \{0\} \,\cup\, \left[\,\tfrac{5}{2}\,, +\infty\,\right[.$$

Condition de positivité.

$$D_{\text{pos}} =]-\infty, 2].$$

Premier cas

Si $x \in D_{\text{déf}} \cap \overline{D}_{\text{pos}}$, on a

$$\underbrace{\sqrt{\frac{x^2\,(2x-5)}{2\,(x+1)}}}_{\geq 0} \;\geq\; \underbrace{2-x}_{<0}\,.$$

Sur ce référentiel restreint, l'inéquation est vérifiée, l'ensemble solution est "l'ensemble plein" : $S_1 = \left[\,\frac{5}{2}\,, +\infty\,\right[\,.$

Deuxième cas

Si $x \in D_{\text{déf}} \cap D_{\text{pos}}$, les deux membres de l'inéquation sont positifs, on peut les élever au carré :

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\frac{x^2\,(2x-5)}{2\,(x+1)}} \;\geq\; 2-x \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x^2\,(2x-5)}{2\,(x+1)} \geq (2-x)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{x^2\,(2x-5)}{2\,(x+1)} \;-\; (2-x)^2 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{x^2\,(2x-5) - 2\,(2-x)^2\,(x+1)}{2\,(x+1)} \;\geq\; 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{x^2-8}{x+1} \;\geq\; 0\,.
\end{aligned}
$$

On étudie le signe de cette fraction rationnelle Q à l'aide d'un tableau de signe :

x		$-2\sqrt{2}$		-1		$2\sqrt{2}$	
x^2-8	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
Q	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$

$$Q \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \; [-2\sqrt{2}\,,\, -1\,[\, \cup \,[\, 2\sqrt{2}\,,\, +\infty\,[\,.$$

L'ensemble solution est donc : $S_2 = ([-2\sqrt{2}\,,\, -1\,[\, \cup \,[\, 2\sqrt{2}\,,\, +\infty\,[) \cap D_{\text{déf}} \cap D_{\text{pos}} = \; [-2\sqrt{2}\,,\, -1\,[\,.$

Conclusion

L'ensemble solution est la réunion des ensembles solutions partiels :

$$S = S_1 \cup S_2 = \; [-2\sqrt{2}\,,\, -1\,[\, \cup \,[\, \tfrac{5}{2}\,,\, +\infty\,[\,.$$

Ex-06-05*: On considère l'équation suivante :*

$$\sqrt{\sqrt{x^2 - 5x + 4} \; + \; 5x - 2} \; = \; 5\,.$$

a) Déterminer le domaine de définition de cette équation.

b) Résoudre cette équation sur son domaine de définition.

Il s'agit de résoudre une inéquation irrationnelle, puis une équation irrationnelle.

a) **Domaine de définition.**

$$D_{\text{def}} \; = \; \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 4 \geq 0 \quad \text{et} \quad \sqrt{x^2 - 5x + 4} \; + \; 5x - 2 \geq 0 \right\}.$$

i) Résolution de l'inéquation $x^2 - 5x + 4 \geq 0$.

$x^2 - 5x + 4 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)\,(x-4) \geq 0\,, \quad S_i \; = \,]-\infty\,,\, 1\,] \; \cup \; [\,4\,,\, +\infty\,[\,.$

ii) Résolution de l'inéquation $\sqrt{x^2 - 5x + 4} \geq 2 - 5x$ sur S_i.

La résolution de cette inéquation dépend du signe de $2 - 5x$.

- Premier cas : $2 - 5x < 0$ et $x \in S_i \quad \Leftrightarrow \quad x \in \,]\,\frac{2}{5}\,,\, 1\,] \; \cup \; [\,4\,,\, +\infty\,[\,.$

  Sur ce référentiel restreint, l'inéquation est toujours vraie :

  $$\underbrace{\sqrt{x^2 - 5x + 4}}_{\geq 0} \; \geq \; \underbrace{2 - 5x}_{<0}\,, \qquad\qquad S_1 = \,]\,\tfrac{2}{5}\,,\, 1\,] \cup [\,4\,,\, +\infty\,[\,.$$

- Deuxième cas : $2 - 5x \geq 0$ et $x \in S_i \quad \Leftrightarrow \quad x \in \,]-\infty\,,\, \frac{2}{5}\,]\,.$

  Sur ce référentiel restreint, les deux membres de l'inéquation sont positifs ou nuls, on peut les élever au carré.

  $$\sqrt{x^2 - 5x + 4} \geq 2 - 5x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 5x + 4 \geq (2 - 5x)^2$$

  $\Leftrightarrow \quad 3x\,(5 - 8x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \; [\,0\,,\, \frac{5}{8}\,]\,,$
  d'où $S_2 = [\,0\,,\, \frac{5}{8}\,] \cap]-\infty\,,\, \frac{2}{5}\,] = [\,0\,,\, \frac{2}{5}\,]\,.$

- Conclusion

  L'ensemble solution de l'inéquation $\sqrt{x^2 - 5x + 4} \geq 2 - 5x$ est donc

  $$S_{ii} = S_1 \cup S_2 = \; [\,0\,,\, 1\,] \cup [\,4\,,\, +\infty\,[\,.$$

iii) Le domaine de définition s'écrit :

$$D_{\text{def}} = S_{ii} = \; [\,0\,,\, 1\,] \cup [\,4\,,\, +\infty\,[\,.$$

b) **Résolution de l'équation sur son domaine de définition.**

Les deux membres de cette équation étant positifs, on les élève au carré.

$$\sqrt{\sqrt{x^2-5x+4}\,+\,5x-2}=5 \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{x^2-5x+4}\,+\,5x-2=25$$
$$\Leftrightarrow\quad \sqrt{x^2-5x+4}=27-5x\,.$$

L'équation $\sqrt{x^2-5x+4} \;=\; 27-5x$ n'admet d'éventuelles solutions que si

$27-5x\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad x\in\,]-\infty\,,\,\frac{27}{5}\,]=D_{\text{pos}}$

Pour $x\in D_{\text{pos}}\cap D_{\text{déf}}=[\,0\,,\,1\,]\cup[\,4\,,\,\frac{27}{5}\,]$ les deux membres de l'équation sont positifs ou nuls, on peut les élever au carré.

$$\sqrt{x^2-5x+4} \;=\; 27-5x \quad\Leftrightarrow\quad x^2-5x+4 \;=\; (27-5x)^2$$
$$\Leftrightarrow\quad 24x^2-265x+725=0 \quad\Leftrightarrow\quad x_1=5 \quad\text{ou}\quad x_2=\frac{145}{24}\,.$$

La solution x_2 est à exclure car $\frac{145}{24}>\frac{27}{5}$.

La solution $x_1=5$ appartient à $[\,0\,,\,1\,]\cup[\,4\,,\,\frac{27}{5}\,]$ et donc

$$S=\{\,5\,\}\,.$$

Ex-06-06*: Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *les deux inéquations suivantes :*

a) $\left|\,3x-5-\sqrt{-x^2+x+42}\,\right|\geq -x+11-\sqrt{-x^2+x+42}\,,$

b) $\sqrt{x^2-|3x+4|}\;\leq\; x-2\,.$

a) Appliquer l'équivalence permettant de résoudre les inéquations de type $|f(x)|\geq g(x)$.
On commence par déterminer le domaine de définition de cette inéquation.
Domaine de définition.

$$D_{\text{def}}=\left\{x\in\mathbb{R}\mid\; -x^2+x+42\geq 0\right\}\;.$$

$$-x^2+x+42\;\geq\;0 \quad\Leftrightarrow\quad -(x+6)\,(x-7)\;\geq\;0 \quad\Leftrightarrow\quad x\;\in\;[-6\,,\,7\,]\,,$$

$$D_{\text{def}}\;=\;[-6\,,\,7\,]\,.$$

On résout l'inéquation $|f(x)|\geq g(x)$ à l'aide de l'équivalence suivante :

$$|f(x)|\geq g(x) \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} f(x)\geq g(x) \\ \text{ou} \\ f(x)\leq -g(x)\end{cases} \qquad \forall\,x\in D_{\text{def}}\,.$$

Equivalence de résolution.

$$\left|\,3x-5-\sqrt{-x^2+x+42}\,\right|\geq -x+11-\sqrt{-x^2+x+42}$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases} 3x-5-\sqrt{-x^2+x+42}\geq -x+11-\sqrt{-x^2+x+42} \\ \text{ou} \\ 3x-5-\sqrt{-x^2+x+42}\leq -(-x+11-\sqrt{-x^2+x+42}\,)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases} 4x\geq 16 & (1) \\ \text{ou} & \\ 2x+6\leq 2\sqrt{-x^2+x+42} & (2)\end{cases}$$

Résolution de l'inéquation (1) sur $D_{\mathbf{def}}$.

$$4x \geq 16 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 4\,, \qquad S_1 = [\,4\,,\,7\,]\,.$$

Résolution de l'inéquation (2) sur $D_{\mathbf{def}}$.

$$2x+6 \leq 2\sqrt{-x^2+x+42} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{-x^2+x+42} \geq x+3\,.$$

La résolution de cette inéquation irrationnelle dépend du signe de $(x+3)$: $D_{\text{pos}} = [-3, +\infty[$.

a) $x+3<0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in\,]-\infty\,,\,-3\,[= \overline{D}_{\text{pos}}\,.$

Pour $x \in D_{\text{déf}} \cap \overline{D}_{\text{pos}} = [-6, -3[$ l'inéquation est toujours vérifiée :

$$\underbrace{\sqrt{-x^2+x+42}}_{\geq 0} \;\geq\; \underbrace{x+3}_{<0}, \qquad\qquad S_a = [-6\,,\,-3\,[\,.$$

b) $x+3 \;\geq\; 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in\,[-3\,,+\infty[= D_{\text{pos}}\,.$

Pour $x \in D_{\text{déf}} \cap D_{\text{pos}} = [-3, 7]$ les deux membres de l'inéquation étant positifs ou nuls, on peut les élever au carré.

$$\sqrt{-x^2+x+42} \geq x+3 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2+x+42 \geq (x+3)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2+5x-33 \;\leq\; 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (2x+11)\,(x-3) \;\leq\; 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \;\in\; [-\tfrac{11}{2}\,,\,3\,]\,, \qquad S_b \;= [-3, 7] \cap [-\tfrac{11}{2}\,,\,3\,] = \;[-3\,,\,3\,]\,.$$

c) L'ensemble solution de l'inéquation (2) s'écrit :

$$S_2 = S_a \,\cup\, S_b = \;[-6\,,\,-3\,[\,\cup\,[-3\,,\,3\,] = [-6\,,\,3\,]\,.$$

Conclusion

L'ensemble solution est la réunion des ensembles solutions S_1 et S_2 :

$$S = S_1 \,\cup\, S_2 = \;[-6\,,\,3\,] \;\cup\; [\,4\,,\,7\,]\,.$$

b) Résolution d'une inéquation de type $\sqrt{f(x)} \leq g(x)\,.$
On commence par déterminer le domaine de définition de cette inéquation.
On résout l'inéquation $|f(x)| \leq g(x)$ à l'aide de l'équivalence suivante :

$$|f(x)| \leq g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x) \leq g(x) \\ \text{et} \\ f(x) \geq -g(x) \end{array} \right. \qquad\qquad \forall\, x \in D_{\text{def}}\,.$$

- **Domaine de définition** : $\quad D_{\text{def}} = \big\{\, x \in \mathbb{R} \;\big|\; x^2 - |3x+4| \geq 0 \,\big\}.$

$$|3x+4| \leq x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} 3x+4 \leq x^2 \\ \text{et} \\ 3x+4 \geq -x^2 \end{array} \right. \qquad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2-3x-4 \geq 0 \\ \text{et} \\ x^2+3x+4 \geq 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} (x-4)\,(x+1) \geq 0 \\ \text{et} \\ x \in \mathbb{R} \quad (\Delta < 0) \end{array} \right. \qquad \Leftrightarrow \quad x \in\;]-\infty\,,\,-1\,] \,\cup\, [\,4\,,\,+\infty\,[\;.$$

$$D_{\text{def}} = \,]-\infty\,,\,-1\,] \,\cup\, [\,4\,,\,+\infty\,[\;.$$

Distinguer deux cas selon que $x-2$ est positif ou négatif.

- **Elévation au carré**

◦ Si $x-2<0$, alors $\sqrt{x^2-|3x+4|} \leq x-2$ n'admet pas de solution.

◦ Si $x-2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [2\,,\,+\infty[= D_{\text{pos}}$.
Pour $x \in D_{\text{déf}} \cap D_{\text{pos}} = [4\,,\,+\infty[$, on a

$$\sqrt{x^2-|3x+4|} \leq x-2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-|3x+4| \leq (x-2)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2-|3x+4| \leq x^2-4x+4 \quad \Leftrightarrow \quad |3x+4| \geq 4x-4\,.$$

On résout l'inéquation $|f(x)| \geq g(x)$ à l'aide de l'équivalence suivante :

$$|f(x)| \geq g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ \text{ou} \\ f(x) \leq -g(x) \end{cases} \qquad \forall\, x \in D_{\text{def}} \cap D_{\text{pos}}\,.$$

- **Résolution de l'inéquation** $|3x+4| \geq 4x-4$

$$|3x+4| \geq 4x-4 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x+4 \geq 4x-4 \\ \text{ou} \\ 3x+4 \leq -4x+4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \leq 8 \\ \text{ou} \\ 7x \leq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 8\,.$$

- **Conclusion**

L'ensemble solution est donc donné par l'intersection de l'intervalle $]-\infty\,,\,8]$ avec $D_{\text{déf}} \cap D_{\text{pos}} = [4\,,\,+\infty[$.

$$S = [4\,,\,8]\,.$$

Ex-06-07*: Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante par rapport à la variable x en fonction du paramètre m :*

$$\sqrt{2\,(x^2+1)} = x-m\,, \qquad m \in \mathbb{R}\,.$$

Expliciter l'ensemble solution pour chaque valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$.

Résolution d'une équation irrationnelle de type $\sqrt{f(x)} = g(x)$.
La résolution de l'équation $\sqrt{2\,(x^2+1)} = x-m$ dépend du signe de $x-m$.

- **Domaine de définition**

$$D_{\text{def}} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2\,(x^2+1) \geq 0\} = \mathbb{R}\,.$$

- **Condition de positivité**

Cette équation n'admet d'éventuelles solutions que si

$$x-m \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq m \Leftrightarrow D_{\text{pos}} = [m,+\infty[.$$

- **Equivalence**

Sous cette condition, on a les équivalences suivantes :

$$\sqrt{2\,(x^2+1)} = x-m \quad \Leftrightarrow \quad 2\,(x^2+1) = (x-m)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+2m\,x+2-m^2 = 0\,.$$

L'existence de solution de cette équation du deuxième degré dépend du signe de son discriminant Δ ou de son discriminant réduit Δ'.

- **Existence de solution**

  L'équation du deuxième degré $x^2 + 2m\,x + 2 - m^2 = 0$ n'admet d'éventuelles solutions que si son discriminant est positif ou nul.

$$\Delta' = m^2 - (2 - m^2) = 2m^2 - 2 = 2\,(m^2 - 1)\,.$$

$$\Delta' \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \in \,]-\infty\,,\,-1] \cup [\,1\,,\,+\infty\,[= M.$$

  Dans ce cas, l'équation du deuxième degré admet deux solutions :

$$x_1 = -m - \sqrt{2\,(m^2 - 1)} \qquad \text{et} \qquad x_2 = -m + \sqrt{2\,(m^2 - 1)}\,.$$

Les deux solutions x_1 et x_2 de l'équation du deuxième degré ne sont pas nécessairement solution de l'équation initiale.

- **Validité des deux valeurs obtenues**

  Les deux valeurs x_1 et x_2 sont solutions de l'équation initiale si et seulement si elles vérifient la condition de positivité. Par conséquent, pour $m \in M$:

1) $x_1 \geq m \quad \Leftrightarrow \quad -m - \sqrt{2\,(m^2 - 1)} \geq m \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2\,(m^2 - 1)} \leq -2m\,.$

   Soit M_1 l'ensemble des solutions en m de cette inéquation.

   La résolution de cette inéquation dépend du signe de $-2m$:

   i) Si $-2m < 0$ et $m \in M \quad \Leftrightarrow \quad m \in \,[\,1\,,\,+\infty\,[\,,$ alors $M_{1i} = \emptyset\,.$

   ii) Si $-2m \geq 0$ et $m \in M \quad \Leftrightarrow \quad m \in \,]-\infty\,,\,-1\,]\,,$ alors les deux membres de l'inéquation sont positifs ou nuls, on les élève au carré :

$$2\,(m^2 - 1) \leq (-2m)^2 \quad \Leftrightarrow \quad m^2 \geq -1\,, \qquad M_{1ii} = \,]-\infty\,,\,-1\,]\,.$$

   iii) L'ensemble M_1 est la réunion des ensembles solutions partiels :

$$M_1 = M_{1i} \cup M_{1ii} = \,]-\infty\,,\,-1\,]\,.$$

2) $x_2 \geq m \quad \Leftrightarrow \quad -m + \sqrt{2\,(m^2 - 1)} \geq m \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2\,(m^2 - 1)} \geq 2m\,.$

   Soit M_2 l'ensemble des solutions en m de cette inéquation.

   La résolution de cette inéquation dépend du signe de $2m$:

   i) Si $2m < 0$ et $m \in M \quad \Leftrightarrow \quad m \in \,]-\infty\,,\,-1\,]\,,$ alors $M_{2i} = \,]-\infty\,,\,-1\,]\,.$

   ii) Si $2m \geq 0$ et $m \in M \quad \Leftrightarrow \quad m \in \,[\,1\,,\,+\infty\,[\,,$ alors les deux membres de l'inéquation sont positifs ou nuls, on les élève au carré :

$$2\,(m^2 - 1) \geq (2m)^2 \quad \Leftrightarrow \quad m^2 \leq -1\,, \qquad M_{2ii} = \emptyset\,.$$

   iii) L'ensemble M_2 est la réunion des ensembles solutions partiels :

$$M_2 = M_{2i} \cup M_{2ii} = \,]-\infty\,,\,-1\,]\,.$$

  En résumé :

  ◦ x_1 est solution de l'équation initiale si et seulement si $m \in M_1 = \,]-\infty\,,\,-1\,]\,,$

  ◦ x_2 est solution de l'équation initiale si et seulement si $m \in M_2 = \,]-\infty\,,\,-1\,]\,.$

- **Conclusion**

  On explicite l'ensemble solution pour chaque valeur du paramètre m :

$*$ si $\quad m \in]-\infty\,,-1]\,,\quad$ alors $\quad S = \left\{-m - \sqrt{2\,(m^2-1)}\,,\, -m + \sqrt{2\,(m^2-1)}\,\right\},$

$*$ si $\quad m \in]-1\,,+\infty\,[\,,\quad$ alors $\quad S = \emptyset\,.$

Ex**-06-08: **Exercice facultatif

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante par rapport à la variable x en fonction du paramètre m :

$$\sqrt{|x^2-5m^2|} \;\le\; x-m\,, \qquad m \in \mathbb{R}\,.$$

Expliciter l'ensemble solution pour chaque valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$.

Distinguer deux cas selon que $x-m$ est positif ou négatif.

Domaine de définition : $\quad D_{\text{déf}} = \mathbb{R}\,.$

La résolution de cette inéquation dépend du signe de $x-m$: $D_{\text{pos}} = [m,+\infty[.$

- Premier cas : $\quad x-m<0 \quad \Leftrightarrow \quad x<m \Leftrightarrow x \in \overline{D}_{\text{pos}}\,.$

  Dans ce cas, l'inéquation n'est pas vérifiée

$$\underbrace{\sqrt{|x^2-5m^2|}}_{\geq 0} \;\le\; \underbrace{x-m}_{<0}\,, \qquad\qquad S_1 = \emptyset\,.$$

- Deuxième cas (condition de positivité) : $\quad x-m \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \ge m \Leftrightarrow x \in D_{\text{pos}}\,.$

  Dans ce cas, les deux membres de l'inéquation sont positifs. L'ensemble solution ne change pas si on les élève au carré :

$$\sqrt{|x^2-5m^2|} \;\le\; x-m \quad \Leftrightarrow \quad |x^2-5m^2| \;\le\; (x-m)^2\,.$$

On utilise l'équivalence :

$$|f(x)| \le g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) \le g(x) \\ \text{et} \\ f(x) \ge -g(x) \end{cases} \qquad \forall\, x \in D_{\text{def}} \cap D_{\text{pos}}\,.$$

On résout cette inéquation à l'aide de l'équivalence suivante :

$$|x^2-5m^2| \le (x-m)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2-5m^2 \le (x-m)^2 \\ \text{et} \\ x^2-5m^2 \ge -(x-m)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2m\,x \le 6m^2 \\ \text{et} \\ 2x^2-2mx-4m^2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} m\,x \le 3m^2 & (i) \\ \text{et} \\ x^2-mx-2m^2 \ge 0 & (ii) \end{cases}$$

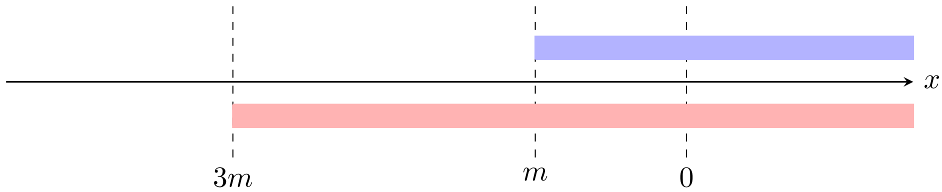
La résolution de l'inéquation $m\,x \le 3m^2$ dépend du signe du coefficient m.

Résolution de l'inéquation $m\,x \le 3m^2$ sur le domaine défini par la condition de positivité $D_{\text{pos}} = [\,m\,,+\infty\,[\,.$

La résolution de cette inéquation dépend du signe du coefficient m.

- Si $m < 0$: $\quad m\,x \;\leq\; 3m^2 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 3m\,.$

$$S_i = [\,3m\,,\,+\infty\,[\,\cap D_{\text{pos}} = [\,3m\,,\,+\infty\,[\,\cap[\,m\,,\,+\infty\,[\, = [\,m\,,\,+\infty\,[\,.$$

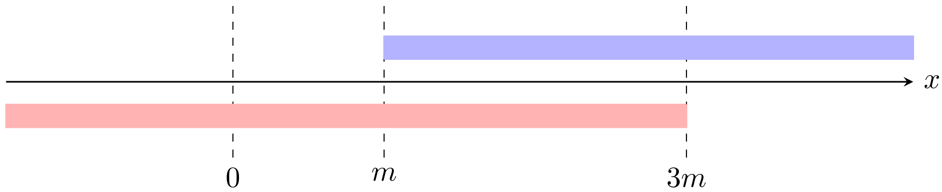


- Si $m = 0$: $\quad m\,x \;\leq\; 3m^2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq 0\,.$

$$S_i = \mathbb{R} \,\cap\, D_{\text{pos}} = \mathbb{R} \,\cap\, \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_+\,.$$

- Si $m > 0$: $\quad m\,x \;\leq\; 3m^2 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 3m$

$$S_i =]\,-\infty\,,\,3m\,] \,\cap\, D_{\text{pos}} =]\,-\infty\,,\,3m\,] \,\cap\, [\,m\,,\,+\infty\,[\, = [\,m\,,\,3m\,]\,.$$



Déterminer les deux racines du trinôme $x^2 - mx - 2m^2$, puis les ordonner.

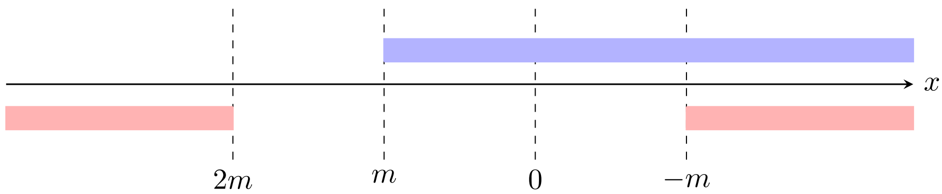
Résolution de l'inéquation $x^2 - mx - 2m^2 \geq 0$ sur le domaine défini par la condition de positivité $D_{\text{pos}} = [\,m\,,\,+\infty\,[\,.$

$$x^2 - mx - 2m^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+m)\,(x-2m) \geq 0\,.$$

Donc x est "à l'extérieur" de l'intervalle dont les bornes sont $-m$ et $2m$. On explicite l'ensemble solution S_{ii} en fonction du signe de m :

- Si $m < 0$, on a $2m < 0 < -m$:

$$\begin{aligned} S_{ii} &= \left(\,]-\infty\,,\,2m\,] \cup [-m\,,\,+\infty\,[\,\right) \,\cap\, D_{\text{pos}} \\ &= \left(\,]-\infty\,,\,2m\,] \cup [-m\,,\,+\infty\,[\,\right) \cap [\,m\,,\,+\infty\,[\\ &= [-m\,,\,+\infty\,[\end{aligned}$$

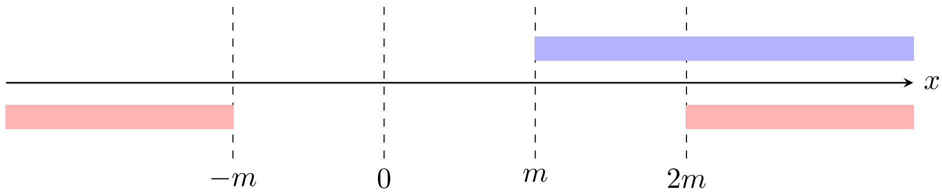


- Si $m = 0$, on a $(x+m)\,(x-2m) \;\geq\; 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \geq 0\,.$

$$S_{ii} = \mathbb{R} \,\cap\, D_{\text{pos}} = \mathbb{R} \,\cap\, \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_+\,.$$

- Si $m > 0$, on a $-m < 0 < 2m$:

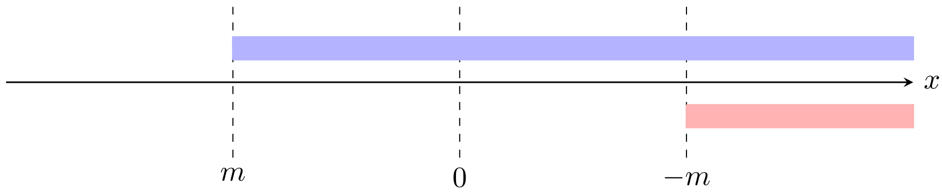
$$\begin{aligned} S_{ii} &= \left(\,]-\infty\,,\,-m\,] \cup [\,2m\,,\,+\infty\,[\,\right) \,\cap\, D_{\text{pos}} \\ &= \left(\,]-\infty\,,\,-m\,] \cup [\,2m\,,\,+\infty\,[\,\right) \cap [\,m\,,\,+\infty\,[\\ &= [2m\,,\,+\infty\,[\end{aligned}$$



On en déduit l'ensemble solution S comme intersection des ensembles solutions des inéquations (i) et (ii)

$$S = S_i \cap S_{ii} \,.$$

- Si $m < 0$, alors $S = [\,-m\,,\,+\infty\,[$.



- Si $m = 0$, alors $S = \mathbb{R}_+$.

- Si $m > 0$, alors $S = [\,2m\,,\,3m\,]$.