***Ex*-05-01**: **Exercice facultatif**

On considère les fonctions f *et* g *définies par* $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$ *et* $g(x) = -3x - \frac{11}{2}$.

a) Dans un repère orthonormé (unité = 2 carrés), représenter le graphe de f *et de* g, *puis en déduire celui de* $|f|$.

Déterminer graphiquement les solutions de l'équation $|f(x)| = g(x)$.

b) Interpréter graphiquement, sur l'exemple ci-dessus, l'équivalence suivante

$$|f(x)| = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad g(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad \begin{cases} f(x) = g(x) \\ \text{ou} \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$$

Il s'agit de vérifier graphiquement, sur un exemple, l'équivalence de résolution des équations avec valeur absolue :

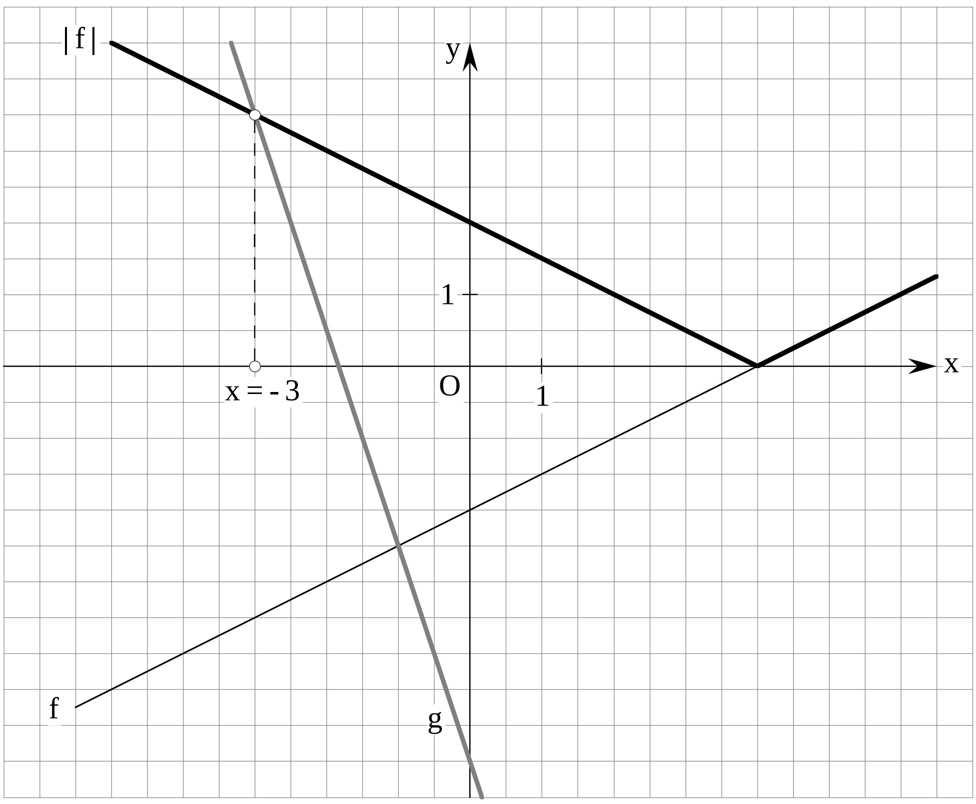
$$|f(x)| = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad g(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad \begin{cases} f(x) = g(x) \\ \text{ou} \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$$

a) Les graphes de f et g sont des droites.

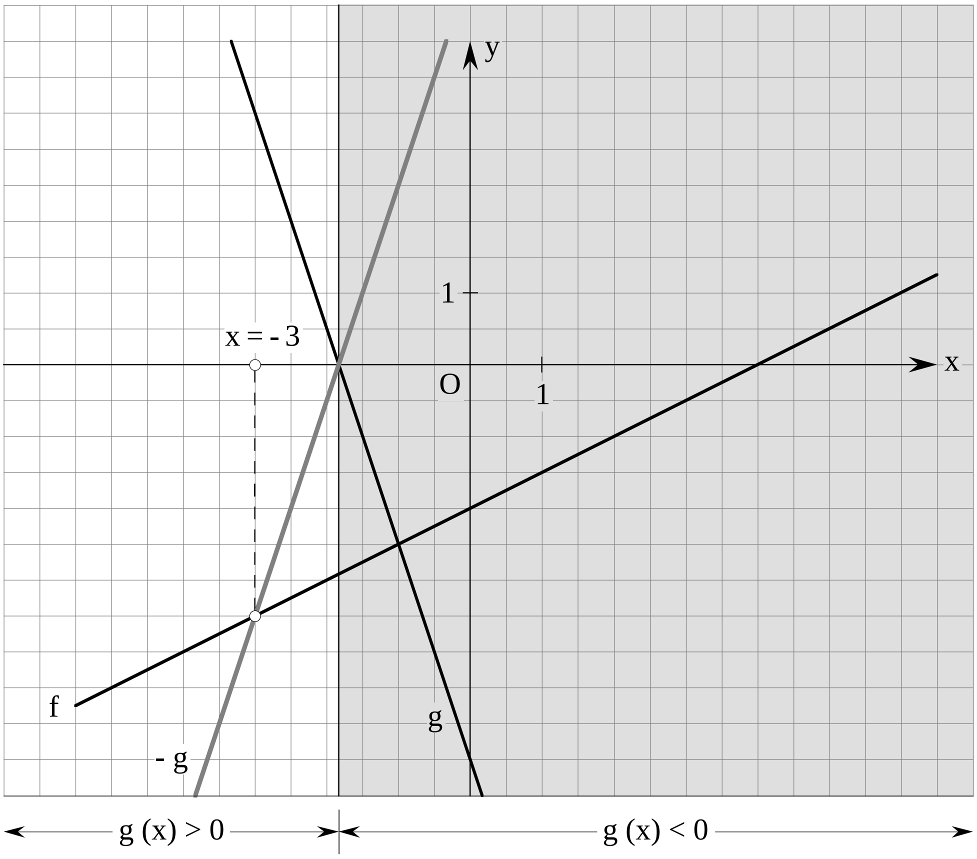
Pour les représenter dans un système d'axes cartésien, il suffit de deux points, ou mieux, d'utiliser leur pente et l'ordonnée à l'origine.

Le graphe de $|f|$ se déduit de celui de f en symétrisant par rapport à l'axe Ox tous les points d'ordonnée négative.

On en déduit graphiquement que l'unique solution de $|f(x)| = g(x)$ est $x = -3$.



b) Représenter le graphe de $-g$ en symétrisant par rapport à l'axe Ox tous les points du graphe de g.
Résoudre graphiquement les deux équations $f(x) = g(x)$ et $f(x) = -g(x)$ sur le référentiel défini par $g(x) \geq 0$ et vérifier que la seule solution est $x = -3$.
Sur le domaine $I = \{ x \in \mathbb{R} \mid g(x) \geq 0 \}$, l'équation $f(x) = g(x)$ n'admet pas de solution, l'équation $f(x) = -g(x)$ admet une unique solution $x = -3$.



Remarque : il est essentiel de tenir compte de la condition de positivité $g(x) \geq 0$; l'étude du signe de f est alors inutile.

***Ex*-05-02**: *Résoudre dans $\mathbb{R}$ les deux équations suivantes :*

a) $|-x+4| \;=\; -\dfrac{3}{x}$,

b) $\left|x^3 - 2x^2 - 4x + 3\right| \;=\; (x^2+1)(x-3)$.

a) Domaine de définition : $D_{\text{def}} = \mathbb{R}^*$.

Cette équation admet d'éventuelles solutions seulement si $-\frac{3}{x} \geq 0$.

$$-\frac{3}{x} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 0.$$

Sous cette condition, l'équation devient :

$$-x+4 = \pm\frac{3}{x} \quad \Leftrightarrow \quad x(-x+4) = \pm 3 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ll} x^2 - 4x + 3 = 0 & (1) \\ \text{ou} & \\ x^2 - 4x - 3 = 0 & (2). \end{array}\right.$$

- Résolution de l'équation (1)

$x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)(x-3) = 0$. Sur le référentiel $\mathbb{R}^*_-$, $\mathcal{S}_1 = \emptyset$.

- Résolution de l'équation (2)

  $x^2-4x-3=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=2\pm\sqrt{7}$. Sur le référentiel $\mathbb{R}_-^*$, $\quad \mathcal{S}_2=\left\{2-\sqrt{7}\right\}$.

$$\mathcal{S}=\mathcal{S}_1\cup\mathcal{S}_2=\left\{2-\sqrt{7}\right\}.$$

b) Domaine de définition : $D_{\text{def}}=\mathbb{R}$.

Cette équation n'admet d'éventuelles solutions que si $(x^2+1)(x-3)\geq 0$.

$$(x^2+1)(x-3)\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad x-3\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad x\in\ [3\,,\ +\infty\,[\,.$$

Sous cette condition, l'équation devient :

$$\begin{aligned} & x^3-2x^2-4x+3=\pm(x^2+1)(x-3) \\ \Leftrightarrow\quad & x^3-2x^2-4x+3=\pm(x^3-3x^2+x-3) \\ \Leftrightarrow\quad & \left\{\begin{array}{ll} x^2-5x+6=0 & (1) \\ \text{ou} & \\ 2x^3-5x^2-3x=0 & (2)\,. \end{array}\right. \end{aligned}$$

- Résolution de l'équation (1)

  $x^2-5x+6=0 \quad\Leftrightarrow\quad (x-3)(x-2)=0$.

  Sur le référentiel $[\,3\,,\ +\infty\,[\,,\quad \mathcal{S}_1=\{3\}$.

- Résolution de l'équation (2)

  $2x^3-5x^2-3x=0 \quad\Leftrightarrow\quad x\,(2x^2-5x-3)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x\,(2x+1)(x-3)=0$.

  Sur le référentiel $[\,3\,,\ +\infty\,[\,,\quad \mathcal{S}_2=\{3\}$.

$$\mathcal{S}=\mathcal{S}_1\cup\mathcal{S}_2=\{3\}.$$

***Ex*-05-03**: *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation suivante par rapport à la variable* x *en fonction du paramètre* m *:*

$$\left|\,m\,x+m+2\,\right| \;=\; x+3\,.$$

Expliciter l'ensemble solution pour chaque valeur du paramètre $m\in\mathbb{R}$.

Domaine de définition : $D_{\text{def}}=\mathbb{R}$.

Cette équation n'admet d'éventuelles solutions que si $x+3\geq 0$.

C'est la condition de positivité : $x+3\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad x\in I=[-3\,,+\infty\,[\,.$

Sur ce référentiel restreint I, l'équation devient équivalente au système suivant :

$$\left|\,m\,x+m+2\,\right| \;=\; x+3 \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{lll} m\,x+m+2 \;=\; x+3 & & (a) \\ \text{ou} & & \\ m\,x+m+2 \;=\; -(x+3) & & (b) \end{array}\right.$$

Résolution de l'équation (a) sur le référentiel I :

$$m\,x+m+2 \;=\; x+3 \quad\Leftrightarrow\quad (m-1)\,x \;=\; -m+1\,,$$

- si $m = 1$, l'équation devient $0\,x = 0$, elle est vérifiée pour tout x dans I,
  $S_a = I = [-3\,,\,+\infty\,[$,
- si $m \neq 1$, l'équation devient $x = \dfrac{-m+1}{m-1} \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$, or $-1 \in I$, donc
  $S_a = \{-1\}$.

Résolution de l'équation (b) sur le référentiel I :

$$m\,x + m + 2 \;=\; -(x+3) \quad \Leftrightarrow \quad (m+1)\,x \;=\; -m-5\,,$$

- si $m = -1$, l'équation devient $0\,x = -4$, elle n'est jamais vérifiée,
  $S_b = \emptyset$,
- si $m \neq -1$, l'équation devient $x = \dfrac{-m-5}{m+1}$ avec $x \in I$,

$$\frac{-m-5}{m+1} \geq -3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2\,(m-1)}{m+1} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \in\,]-\infty\,,\,-1\,[\, \cup\, [\,1\,,\,+\infty\,[\,,$$

donc si $m \in\,]-\infty\,,\,-1\,[\, \cup\, [\,1\,,\,+\infty\,[$, alors $S_b = \{-\frac{m+5}{m+1}\}$

et si $m \in\,]-1\,,\,1\,[$, alors $S_b = \emptyset$.

Expliciter l'ensemble solution S pour chaque valeur du paramètre m à partir des informations suivantes :

- si $m = 1$, alors $S_a = I = [-3\,,\,+\infty\,[$,
- si $m \neq 1$, alors $S_a = \{-1\}$,
- si $m \in [-1\,,\,1\,[$, alors $S_b = \emptyset$,
- si $m \in\,]-\infty\,,\,-1\,[\, \cup\, [\,1\,,\,+\infty\,[$, alors $S_b = \{-\frac{m+5}{m+1}\}$.

Détermination de l'ensemble solution S de l'équation initiale pour chaque valeur de $m \in \mathbb{R}$:

$$S \;=\; S_a \;\cup\; S_b\,,$$

- ∘ si $m \in\,]-\infty\,,\,-1\,[\, \cup\,]\,1\,,\,+\infty\,[$, alors $S \;=\; \{-1\,,\,-\frac{m+5}{m+1}\}$,
- ∘ si $m \in\, [-1\,,\,1\,[$, alors $S \;=\; \{-1\}$,
- ∘ si $m = 1$, alors $S \;=\; [-3\,,\,+\infty\,[$.

Ex-05-04: *Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :*

a) $|x^2 + 3x - 1| \geq x^2 + x + 1$,

b) $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| < x - 1$,

c) $\Big|\,2\,(x+3) - |x-1|\,\Big| \leq |x-1|$,

d) $\dfrac{1-x}{2+x} \leq 1 - \left|1 + \dfrac{2}{3x-4}\right|$.

a) Domaine de définition : $D_{\text{def}} = \mathbb{R}$.

On utilise l'équivalence suivante :

$$|x^2+3x-1| \geq x^2+x+1 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x^2+3x-1 \geq x^2+x+1 \\ \text{ou} \\ x^2+3x-1 \leq -(x^2+x+1) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ll} 2x-2 \geq 0 & (1) \\ \text{ou} & \\ 2x^2+4x \leq 0 & (2) \end{array}\right.$$

- Résolution de l'inéquation (1) :

$2x - 2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 1\,, \qquad \mathcal{S}_1 = [\,1\,,\,+\infty\,[\,.$

- Résolution de l'inéquation (2) :

$2x^2 + 4x \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x\,(x+2) \leq 0\,, \qquad \mathcal{S}_2 = [-2\,,\,0\,]\,.$

- Conclusion :

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 = [-2\,,\,0\,] \cup [\,1\,,\,+\infty\,[\,.$$

b) Domaine de définition : $D_{\text{def}} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}\,.$

On utilise l'équivalence suivante :

$$\left|\frac{x-1}{x+1}\right| < x-1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{x-1}{x+1} < x-1 & (1) \\ \text{et} \\ \dfrac{x-1}{x+1} > -(x-1) & (2) \end{cases}$$

On résout l'inéquation (1) en se ramenant à l'étude du signe d'une fraction rationnelle à l'aide d'un tableau de signe.
Résolution de l'inéquation (1) :

$$\frac{x-1}{x+1} < x-1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{x+1} - (x-1) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{x+1} - \frac{(x-1)\,(x+1)}{x+1} < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x-1)\,[1-(x+1)]}{x+1} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{x\,(x-1)}{x+1} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x\,(x-1)}{x+1} > 0\,.$$

Etude du signe de la fraction rationnelle $Q_1 = \dfrac{x\,(x-1)}{x+1}$:

x		-1		0		1	
x	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$
$x-1$	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$
Q_1	$-$	||	$+$	0	$-$	0	$+$

$$Q_1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \,]-1\,,\,0\,[\, \cup \,]\,1\,,\,+\infty\,[\,, \qquad S_1 = \,]-1\,,\,0\,[\, \cup \,]\,1\,,\,+\infty\,[\,.$$

On résout l'inéquation (2) en se ramenant à l'étude du signe d'une fraction rationnelle à l'aide d'un tableau de signe.
Résolution de l'inéquation (2) :

$$\frac{x-1}{x+1} > -(x-1) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{x+1} + (x-1) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{x+1} + \frac{(x-1)\,(x+1)}{x+1} > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x-1)\,[1+(x+1)]}{x+1} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x+2)\,(x-1)}{x+1} > 0\,.$$

Etude du signe de la fraction rationnelle $Q_2 = \dfrac{(x+2)\,(x-1)}{x+1}$:

x		-2		-1		1	
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
Q_2	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$

$$Q_2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \,]-2\,,\,-1\,[\,\cup\,]\,1\,,\,+\infty\,[\,, \qquad S_2 = \,]-2\,,\,-1\,[\,\cup\,]\,1\,,\,+\infty\,[\,.$$

Conclusion :

$$S = S_1 \cap S_2\,,$$

avec $\quad S_1 = \,]-1\,,\,0\,[\,\cup\,]\,1\,,\,+\infty\,[\quad$ et $\quad S_2 = \,]-2\,,\,-1\,[\,\cup\,]\,1\,,\,+\infty\,[\,.$

$$S = \,]\,1\,,\,+\infty\,[\,.$$

c) Utiliser l'équivalence permettant de résoudre les inéquations de type $|f(x)| \leq g(x)$ pour éliminer "la grande valeur absolue".
Résoudre l'inéquation $|f(x)| \leq g(x)$ à l'aide de l'équivalence suivante :

$$|f(x)| \leq g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ \text{et} \\ f(x) \geq -g(x) \end{cases} \qquad \forall\, x \in D_{\text{def}}\,.$$

Puis l'inéquation $|f(x)| \geq g(x)$ à l'aide de l'équivalence suivante :

$$|f(x)| \geq g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ \text{ou} \\ f(x) \leq -g(x) \end{cases} \qquad \forall\, x \in D_{\text{def}}\,.$$

Domaine de définition : $D_{\text{def}} = \mathbb{R}\,.$

On élimine "la grande valeur absolue" en utilisant l'équivalence suivante :

$$\Big|\, 2\,(x+3) - |x-1| \,\Big| \leq |x-1| \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2\,(x+3) - |x-1| \leq |x-1| \\ \text{et} \\ 2\,(x+3) - |x-1| \geq -|x-1| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} |x-1| \geq x+3 & (1) \\ \text{et} \\ x+3 \geq 0 & (2) \end{cases}$$

- Résolution de l'inéquation (1) :

$$|x-1| \geq x+3 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x-1 \geq x+3 \\ \text{ou} \\ x-1 \leq -(x+3) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0\,x \geq 4 \\ \text{ou} \\ x \leq -1 \end{cases}\,,$$

$\mathcal{S}_1 \;=\; \emptyset \cup \,]-\infty\,,\,-1\,] \;=\,]-\infty\,,\,-1\,]\,.$

- Résolution de l'inéquation (2) :

$x+3 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -3, \qquad \mathcal{S}_2 = [-3\,;\,+\infty[.$

- Conclusion :

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = [-3\,;\,-1].$$

d) Domaine de définition : $D_{\text{def}} = \mathbb{R} \setminus \{-2, \frac{4}{3}\}$.

$$\frac{1-x}{2+x} \leq 1 - \left|1 + \frac{2}{3x-4}\right| \quad \Leftrightarrow \quad \left|1 + \frac{2}{3x-4}\right| \leq 1 - \frac{1-x}{2+x}.$$

On utilise l'équivalence suivante :

$$\left|1 + \frac{2}{3x-4}\right| \leq 1 - \frac{1-x}{2+x} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1 + \frac{2}{3x-4} \leq 1 - \frac{1-x}{2+x} & (1) \\ \text{et} & \\ 1 + \frac{2}{3x-4} \geq -1 + \frac{1-x}{2+x} & (2) \end{cases}$$

Résolution de l'inéquation (1) :

$$\begin{aligned} 1 + \frac{2}{3x-4} \leq 1 - \frac{1-x}{2+x} \quad & \Leftrightarrow \quad \frac{1-x}{2+x} + \frac{2}{3x-4} \leq 0 \\ & \Leftrightarrow \quad \frac{(1-x)(3x-4) + 2(2+x)}{(3x-4)(2+x)} \leqslant 0 \\ & \Leftrightarrow \quad \frac{-3x^2+9x}{(3x-4)(2+x)} \leqslant 0 \\ & \Leftrightarrow \quad \frac{x(x-3)}{(3x-4)(2+x)} \geqslant 0 \end{aligned}$$

Notons $Q(x)$ le premier membre de la dernière inéquation.

On étudie à présent le signe de $Q(x)$. On effectue notre étude à l'aide d'un tableau de signe :

x	$-\infty$		-2		0		$\frac{4}{3}$		3		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x-4$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2+x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$Q(x)$		$+$	||	$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	

On en déduit l'ensemble solution :
$S_1 =]-\infty, -2[\, \cup\, [0, \frac{4}{3}[\, \cup\, [3, +\infty[.$

Résolution de l'inéquation (2) :

$$1 + \frac{2}{3x-4} \geq -1 + \frac{1-x}{2+x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{3x-4} + \frac{x-1}{2+x} + 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2\,(2+x) + (x-1)\,(3x-4) + 2\,(3x-4)\,(2+x)}{(3x-4)\,(2+x)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{9x^2 - x - 8}{(3x-4)\,(2+x)} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(9x+8)\,(x-1)}{(3x-4)\,(2+x)} \geq 0$$

Signe de la fraction rationnelle $Q(x) = \dfrac{(9x+8)\,(x-1)}{(3x-4)\,(2+x)}$.

x		-2		$-\frac{8}{9}$		1		$\frac{4}{3}$	
$9x+8$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$3x-4$	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$Q(x)$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$

$$Q(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \,]-\infty\,,\,-2\,[\,\cup\,[-\tfrac{8}{9}\,,\,1\,]\,\cup\,]\,\tfrac{4}{3}\,,\,+\infty\,[\,.$$

$$S_2 = \,]-\infty\,,\,-2\,[\,\cup\,[-\tfrac{8}{9}\,,\,1\,]\,\cup\,]\,\tfrac{4}{3}\,,\,+\infty\,[\,.$$

Conclusion :

$$S = S_1 \cap S_2 = \,]-\infty\,,\,-2\,[\,\cup\,[\,0\,,\,1\,]\;\cup\;[\,3\,,\,+\infty\,[\,.$$

Ex-05-05*: Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation suivante par rapport à la variable* x *en fonction du paramètre réel* m.

$$\left|\,x^2 - x\,(m+3) + m\,\right| \;=\; -x^2 - x\,.$$

- Domaine de définition : $\mathcal{D}_{\text{def}} = \mathbb{R}$.
- Condition de positivité

  Cette équation n'admet d'éventuelles solutions que si $-x^2 - x \geq 0$:

  $$-x^2 - x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x\,(x+1) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\,(x+1) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [-1\,;\,0\,]\,.$$

  Sur cet intervalle, l'équation devient équivalente au système suivant :

  $$\left\{\begin{array}{l} x^2 - x\,(m+3) + m = -x^2 - x \\ \text{ou} \\ x^2 - x\,(m+3) + m = x^2 + x \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ll} 2\,x^2 - x\,(m+2) + m = 0 & (a) \\ \text{ou} & \\ -x\,(m+4) + m = 0 & (b) \end{array}\right.$$

- Résolution de l'équation (a) sous la condition $x \in [-1\,;\,0\,]$.

$$2\,x^2 - x\,(m+2) + m = 0\,.$$

$$\Delta = (m+2)^2 - 8m = (m-2)^2\,, \qquad x = \frac{m+2 \pm (m-2)}{4} = \left\{\begin{array}{l} m/2 \\ \text{ou} \\ 1 \end{array}\right.$$

$x = 1$ ne vérifie pas la condition de positivité, et $x = \frac{m}{2}$ vérifie cette condition si et seulement si $m \in [-2\,;\,0\,]$.

- ∘ si $m \in]-\infty\,;\,-2\,[\,\cup\,]\,0\,;\,+\infty\,[$ alors $\mathcal{S}_a = \emptyset$,
- ∘ si $m \in [-2\,;\,0\,]$ alors $\mathcal{S}_a = \{\frac{m}{2}\}$.

• Résolution de l'équation (b) sous la condition $x \in [-1\,;\,0\,]$.

$$-x\,(m+4) + m = 0\,.$$

- ∘ Si $m = -4$, alors l'équation s'écrit $0\,x - 4 = 0$, $\mathcal{S}_b = \emptyset$.
- ∘ Si $m \neq -4$, alors $x = \dfrac{m}{m+4}$.

La valeur $x = \dfrac{m}{m+4}$ n'est solution que si elle vérifie la condition de positivité :

$$-1 \;\le\; \frac{m}{m+4} \;\le\; 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \frac{m}{m+4} \;\le\; 0 \\ \text{et} \\ \frac{m}{m+4} \;\ge\; -1 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \frac{m}{m+4} \;\le\; 0 \\ \text{et} \\ \frac{2m+4}{m+4} \;\ge\; 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} m \;\in\;]-4\,;\,0\,] \\ \text{et} \\ m \;\in\;]-\infty\,;\,-4\,[\,\cup\,[-2\,;\,+\infty\,[\end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad m \;\in\; [-2\,;\,0\,]\,.$$

- ∘ si $m \in]-\infty\,;\,-2\,[\,\cup\,]\,0\,;\,+\infty\,[$ alors $\mathcal{S}_b = \emptyset$,
- ∘ si $m \in [-2\,;\,0\,]$ alors $\mathcal{S}_b = \{\frac{m}{m+4}\}$.

• Conclusion : $\mathcal{S} \;=\; \mathcal{S}_a \,\cup\, \mathcal{S}_b$.

- ∘ si $m \in]-\infty\,;\,-2\,[\,\cup\,]\,0\,;\,+\infty\,[$ alors $\mathcal{S} = \emptyset$,
- ∘ si $m \in [-2\,;\,0\,]$ alors $\mathcal{S} = \{\frac{m}{2}\,,\,\frac{m}{m+4}\}$.

On peut être un peu plus précis en constatant que ces deux valeurs coïncident en $m = -2$ et $m = 0$.

D'où la synthèse finale :

- ∘ si $m \in]-\infty\,;\,-2\,[\,\cup\,]\,0\,;\,+\infty\,[$ alors $\mathcal{S} = \emptyset$,
- ∘ si $m \in \{-2\,,\,0\}$ alors $\mathcal{S} = \{\frac{m}{2}\}$,
- ∘ si $m \in]-2\,;\,0\,[$ alors $\mathcal{S} = \{\frac{m}{2}\,,\,\frac{m}{m+4}\}$.

Ex-05-06*: Dans le plan muni d'un repère cartésien* (O,x,y), *représenter les points de coordonnées* (x,y) *vérifiant*

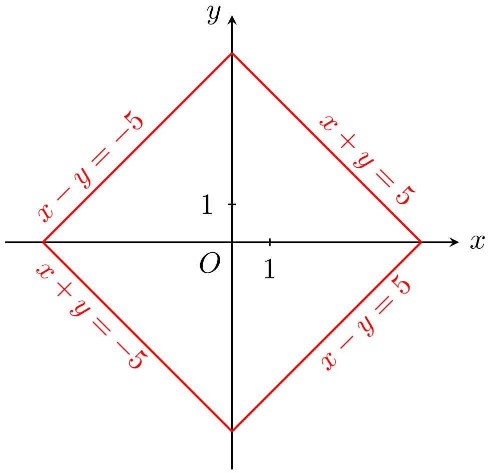
$$|x| + |y| = 5 \qquad \textit{et} \qquad 2x - 3y - 5 = 0\,.$$

Puis résoudre algébriquement le système $\left\{\begin{array}{l} |x| + |y| = 5 \\ 2x - 3y - 5 = 0\,. \end{array}\right.$

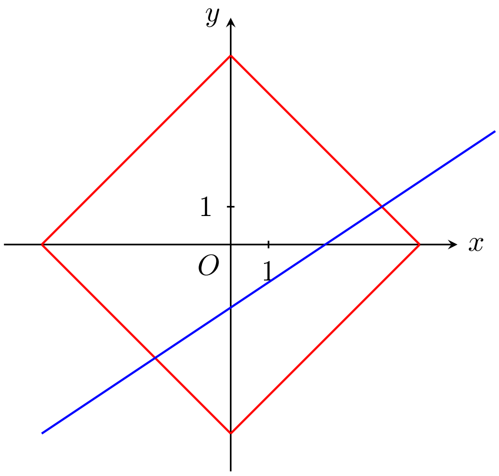
On explicite la relation $|x| + |y| = 5$ en tenant compte du signe de x et de y :

- si $x \ge 0$ et $y \ge 0$, alors $|x| + |y| = 5 \;\Leftrightarrow\; x + y = 5$,
- si $x \ge 0$ et $y \le 0$, alors $|x| + |y| = 5 \;\Leftrightarrow\; x - y = 5$,
- si $x \le 0$ et $y \ge 0$, alors $|x| + |y| = 5 \;\Leftrightarrow\; x - y = -5$,
- si $x \le 0$ et $y \le 0$, alors $|x| + |y| = 5 \;\Leftrightarrow\; x + y = -5$.

On en déduit le graphe de la relation $|x| + |y| = 5$:



On y adjoint la représentation de la droite d'équation $2x - 3y - 5 = 0$:



On déduit de la représentation graphique précédente que le système

$$\left\{ \begin{array}{l} |x| + |y| = 5 \\ 2x - 3y - 5 = 0 \end{array} \right.$$

admet deux solutions.

Plus précisément ces deux solutions sont données par les deux systèmes suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 5 \\ 2x - 3y - 5 = 0 \end{array} \right. \quad (a) \qquad \text{et} \qquad \left\{ \begin{array}{l} x + y = -5 \\ 2x - 3y - 5 = 0 \end{array} \right. \quad (b)\,.$$

$$(a)\ \left\{ \begin{array}{l} x + y = 5 \\ 2x - 3y = 5 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x + 2y = 10 \\ 2x - 3y = 5 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 4 \\ y = 1 \end{array} \right.$$

$$(b)\ \left\{ \begin{array}{l} x + y = -5 \\ 2x - 3y = 5 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x + 2y = -10 \\ 2x - 3y = 5 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -2 \\ y = -3 \end{array} \right.$$

En résumé, $S = \{(-2\,,\,-3)\,,\,(4\,,\,1)\}\,.$