Série 03: Méthode de preuve

Ex-03-01*: En utilisant la méthode directe, démontrer les propositions suivantes :*

a) Si n est un nombre pair alors n^2+1 est impair.

b) Si n est un nombre impair alors n^2-1 est pair.

c) Si n est un nombre impair alors n^2+2 est impair.

d) Si n est un entier positif alors n^2-n est pair.

e) Si n est un entier positif alors n^3-n est un multiple de 3.

f) Si n est impair alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n^2 = 8k+1$.

g) Soit $a \in \mathbb{N}$, si a n'est pas un multiple de 3 alors a^2+2 est un multiple de 3.

h) Si m est pair ou n est pair alors m^2+n^2 est impair ou m^2+n^2 est un multiple de 4.

i) Soit $m \in \mathbb{N}$, si m est la somme de 5 entiers consécutifs alors m est un multiple de 5. Peut-on généraliser cet énoncé à la somme d'un nombre quelconque d'entiers consécutifs ? Justifier la réponse par une démonstration.

j) Soient A et B des sous-ensembles de E :
$A \cup B = A \cap B \;\Rightarrow\; A = B$.

a) Démonstration par la méthode directe.
n est pair $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\quad n = 2k$
m est impair $\Leftrightarrow \exists l \in \mathbb{Z},\quad m = 2l+1$
Référentiel : $\mathbb{Z}$

Hypothèse : n pair

Conclusion : $\exists l \in \mathbb{Z},\quad n^2+1 = 2l+1$

Preuve :

n pair $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\quad n = 2k$

$$\begin{aligned} n^2+1 &= (2k)^2+1 \\ &= 4k^2+1 \\ &= 2\,(2k^2)+1 \;:\quad \text{on pose } 2k^2 = l \in \mathbb{N} \\ &= 2l+1 \quad \text{où} \quad l \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

b) Démonstration par la méthode directe.
n est pair $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\quad n = 2k$
m est impair $\Leftrightarrow \exists l \in \mathbb{Z},\quad m = 2l+1$
Référentiel : $\mathbb{Z}$

Hypothèse : n impair

Conclusion : $\exists l \in \mathbb{N},\quad n^2-1 = 2l$

Preuve :

n impair $\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}, \quad n = 2k+1$

$$\begin{aligned} n^2 - 1 &= (2k+1)^2 - 1 \\ &= 4k^2 + 4k \\ &= 2\,(2k^2+2k) \;: \quad \text{on pose } 2k^2+2k = l \in \mathbb{N} \\ &= 2l \quad \text{où} \quad l \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Remarque : une autre preuve est aussi possible. Par exemple :
$n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$
n étant impair, $n-1$ et $n+1$ sont pairs donc leur produit est pair.

c) Démonstration par la méthode directe.
n est impair $\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}, \quad n = 2k+1$
Référentiel : $\mathbb{Z}$

Hypothèse : n impair

Conclusion : $\exists\, l \in \mathbb{N}, \quad n^2 + 2 = 2l + 1$

Preuve :

n impair $\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}, \quad n = 2k+1$

$$\begin{aligned} n^2 + 2 &= (2k+1)^2 + 2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 + 2 \\ &= 2\,(2k^2+2k+1) + 1 \;: \quad \text{on pose } 2k^2+2k+1 = l \in \mathbb{N} \\ &= 2l + 1 \quad \text{où} \quad l \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

d) Démonstration par la méthode directe.
Factoriser $n^2 - n$ et conclure.
Référentiel : $\mathbb{N}$

Hypothèse : n est un entier positif

Conclusion : $\exists\, l \in \mathbb{N}, \quad n^2 - n = 2l$

Preuve :

$n^2 - n = n\,(n-1)$
ce qui est le produit de deux entiers consécutifs, donc l'un des deux est pair. Le produit est donc pair.

Remarque : une autre preuve est aussi possible. Par exemple par disjonction de l'hypothèse :
si $n = 2k$: $\quad n^2 - n = 4k^2 - 2k = 2\,(2k^2 - k) = 2l$
ou
si $n = 2k+1$: $\quad n^2 - n = 4k^2 + 4k + 1 - 2k - 1 = 4k^2 + 2k = 2l$

e) Démonstration par la méthode directe.
Factoriser $n^3 - n$ et conclure.
Référentiel : $\mathbb{N}$

Hypothèse : n est un entier positif

Conclusion : $\exists\, l \in \mathbb{N}, \quad n^3 - n = 3l$

Preuve :

$n^3 - n = n\ (n^2 - 1) = n(n-1)(n+1)$
ce qui est le produit de trois entiers consécutifs, donc l'un est un multiple de 3. Le produit est donc un multiple de 3.

Remarque : une preuve par disjonction des cas de l'hypothèse n'est ici pas adéquate.

f) Démonstration par la méthode directe.
n est impair $\Leftrightarrow \exists\, l \in \mathbb{Z}, \quad n = 2l+1$
Référentiel : $\mathbb{Z}$

Hypothèse : n impair

Conclusion : $\exists\, k \in \mathbb{N}, \quad n^2 = 8k+1$

Preuve :

n impair $\Leftrightarrow \exists\, l \in \mathbb{Z}, \quad n = 2l+1$

$$\begin{aligned} n^2 &= (2l+1)^2 \\ &= 4l^2 + 4l + 1 \\ &= 4l\,(l+1) + 1 \ : \text{ or } l\,(l+1) \text{ est le produit de 2 entiers consécutifs donc est pair} \\ &= 4 \cdot 2k + 1 \ : \text{ on a posé } l(l+1) = 2k \\ &= 8k + 1 \quad \text{où} \quad k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

g) Démonstration par la méthode directe.
$a \in \mathbb{N}$ n'est pas un multiple de 3
$\Leftrightarrow$
$\exists\, k \in \mathbb{N}, \quad a = 3k+1 \quad$ ou $\quad a = 3k+2$
Référentiel : $\mathbb{N}$

Hypothèse : a n'est pas un multiple de 3

Conclusion : $a^2 + 2$ est un multiple de 3

Preuve :

a n'est pas un multiple de 3
$\Leftrightarrow$
$\exists\, k \in \mathbb{N}, \quad a = 3k+1 \quad$ ou $\quad a = 3k+2$

1er cas : $a = 3k+1$

$$\begin{aligned} a^2 + 2 &= (3k+1)^2 + 2 \\ &= 9k^2 + 6k + 1 + 2 \\ &= 9k^2 + 6k + 3 \\ &= 3(3k^2 + 2k + 1) = 3k' \quad \text{où} \quad k' \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad a^2 + 2$ est un multiple de 3.

2ème cas : $a = 3k+2$

$$\begin{aligned} a^2+2 &= (3k+2)^2+2 \\ &= 9k^2+12k+4+2 \\ &= 9k^2+12k+6 \\ &= 3(3k^2+4k+2) = 3k'' \quad \text{où} \quad k'' \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad a^2+2$ est un multiple de 3.

Au final, si a n'est pas un multiple de 3, alors a^2+2 est un multiple de 3.

h) Démonstration par la méthode directe.
Il faut traduire correctement le "ou" de l'hypothèse : seulement 2 cas sont à envisager.
Référentiel : $\mathbb{Z}$

Hypothèse : m pair ou n pair

Conclusion : $m^2+n^2 = 2k'+1$ ou $m^2+n^2 = 4l'$

Preuve :

1$^{\text{er}}$ cas : m et n sont pairs

$m = 2k$ et $n = 2l$

$$\begin{aligned} n^2+m^2 &= 4k^2+4l^2 \\ &= 4\,(k^2+l^2) \\ &= 4l' \quad \text{où} \quad l' \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad m^2+n^2$ est un multiple de 4.

2$^{\text{ème}}$ cas : m et n ne sont pas de même parité

Soit : $m = 2k$ et $n = 2p+1$

$$\begin{aligned} m^2+n^2 &= 4k^2+4p^2+4p+1 \\ &= 2\,(2k^2+2p^2+2p)+1 \\ &= 2l'+1 \quad \text{où} \quad l' \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

i) Démonstration par la méthode directe.
On additionne un nombre *impair* d'entiers *consécutifs*. Il est donc judicieux de les écrire en utilisant des symétries par rapport au terme de rang milieu. Par exemple :

$n-1$, n, $n+1$ sont 3 entiers consécutifs.
Référentiel : $\mathbb{N}$

Hypothèse : m est la somme de 5 entiers consécutifs

Conclusion : $m = 5k$, $k \in \mathbb{N}$

Preuve :

Soit 5 entiers consécutifs. On peut toujours les écrire de la manière suivante :
$n-2$, $n-1$, n, $n+1$, $n+2$, $\quad n \in \mathbb{N}$.

Par hypothèse, m est la somme de ces 5 entiers consécutifs donc :

$m = n-2+n-1+n+n+1+n+2 = 5n \quad \Leftrightarrow \quad m$ est un multiple de 5.
Si m est la somme de $2k+1$ entiers consécutifs, alors m est un multiple de $2k+1$
car

on écrit ces $2k+1$ entiers ainsi :
$n-k\,, n-k+1\,,\; n-k+2\,,\; \ldots\;,\; n-2\,,\; n-1\,,\; n\,,\; n+1\,,\; \ldots\;, n+k$
et en les additionnant on obtient :
$m = (2k+1)n \quad \Leftrightarrow \quad m$ est un multiple de $2k+1$

Par contre la somme de $2k$ entiers consécutifs n'est pas un multiple de $2k$.
Un contre-exemple le montre.

j) Démonstration par la méthode directe.

- Montrer $\quad A = B \quad \Leftrightarrow \quad$ montrer $\quad A \subset B \quad$ et $\quad B \subset A$
- $A \subset B \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in A\,,\; x \in B$

Référentiel : E

Hypothèse : $A \cup B = A \cap B$

Conclusion : $A = B$

Preuve :

$A \subset B$:

$$\begin{aligned} x \in A \quad &\Rightarrow \quad x \in A \quad \text{ou} \quad x \in B \\ &\Leftrightarrow \quad x \in A \cup B \\ &\Leftrightarrow \quad x \in A \cap B \\ &\Leftrightarrow \quad x \in A \quad \text{et} \quad x \in B \\ &\Rightarrow \quad x \in B \end{aligned}$$

$B \subset A$:

$$\begin{aligned} x \in B \quad &\Rightarrow \quad x \in A \quad \text{ou} \quad x \in B \\ &\Leftrightarrow \quad x \in A \cup B \\ &\Leftrightarrow \quad x \in A \cap B \\ &\Leftrightarrow \quad x \in A \quad \text{et} \quad x \in B \\ &\Rightarrow \quad x \in A \end{aligned}$$

Ex-03-02: *Ecrire l'énoncé contraposé des théorèmes suivants (on ne demande pas de démonstration).*

a) Soient ABC *un triangle et* D *le milieu du côté* AB.
Si E *est le milieu du côté* AC *alors* DE *est parallèle à* BC.

b) $\forall\, a\,, b \in \mathbb{N}^*$, *si* a *ou* b *sont pairs alors* ab *est pair.*

c) $\forall x \in \mathbb{R},\; x\,(x-3) > 0 \;\Rightarrow\; x < 0$ *ou* $x > 3$.

d) $\forall x \in \mathbb{R},\; x^2 - 1 < 0 \;\Rightarrow\; x < 1$ *et* $x > -1$.

e) $\forall\, n\,,\, m \in \mathbb{N},\; (m \leq 3 \;\; \textit{et} \;\; n \leq 3) \;\Rightarrow\; m \cdot n \neq 15$.

f) $\forall\, n\,,\, m \in \mathbb{N},\; m + n = 0 \;\Rightarrow\; m = 0$ *et* $n = 0$.

g) $\forall\, n\,,\, m \in \mathbb{N},\; (m = 0 \;\textit{ou}\; n = 0) \;\Rightarrow m \cdot n = 0$.

h) $\forall a \in \mathbb{R}\,,\ (\forall \varepsilon > 0\,,\ |a| < \varepsilon\,) \ \Rightarrow\ a = 0\,.$

Déterminer l'énoncé contraposé d'un théorème.
Soit le théorème :

$T \quad : \quad \forall x \in E\,, \quad A \quad \Rightarrow \quad B$

A est l'hypothèse et B est la conclusion.

Son énoncé contraposé est :

$C \quad : \quad \forall x \in E\,, \quad \text{non } B \quad \Rightarrow \quad \text{non } A$

non B est l'hypothèse de C et non A est sa conclusion.

Le référentiel du théorème et de son contraposé est le même.

a) *Référentiel* : Soient ABC un triangle et D le milieu du côté AB.
E est le milieu du côté $AC \quad \Rightarrow \quad DE$ est parallèle à BC.

non B : DE n'est pas parallèle à BC
non A : E n'est pas le milieu de AC.

D'où l'énoncé contraposé :

Soient ABC un triangle, D le milieu de AB.
DE n'est pas parallèle à $BC \quad \Rightarrow \quad E$ n'est pas le milieu de AC

b) *Référentiel* : $\forall\, a\,,\, b \in \mathbb{N}^*$
a ou b pairs $\quad \Rightarrow \quad ab$ pair.

non B : ab impair
non A : a et b impairs

D'où l'énoncé contraposé :

$\forall\, a\,,\, b \in \mathbb{N}^* \ :\quad ab$ impair $\quad \Rightarrow \quad a$ et b impairs

c) *Référentiel* : $\forall x \in \mathbb{R}$
$x\,(x-3) > 0 \quad \Rightarrow \quad x < 0$ ou $x > 3$

non B : $x \geq 0$ et $x \leq 3$
non A : $x(x-3) \leq 0$

D'où l'énoncé contraposé :

$\forall x \in \mathbb{R} \ : \quad x \geq 0$ et $x \leq 3 \quad \Rightarrow \quad x(x-3) \leq 0$

d) *Référentiel* : $\forall x \in \mathbb{R}$
$x^2 - 1 < 0 \quad \Rightarrow \quad x < 1$ et $x > -1$

non B : $x \geq 1$ ou $x \leq -1$
non A : $x^2 - 1 \geq 0$

D'où l'énoncé contraposé :

$\forall x \in \mathbb{R} \ : \quad x \geq 1$ ou $x \leq -1 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 1 \geq 0$

e) *Référentiel* : $\forall m\,,\,n \in \mathbb{N}$

$m \leq 3$ et $n \leq 3 \quad \Rightarrow \quad m \cdot n \neq 15.$

non B : $m \cdot n = 15$
non A : $m > 3$ ou $n > 3$

D'où l'énoncé contraposé :

$\forall m\,,\,n \in \mathbb{N} \; : \quad m \cdot n = 15 \quad \Rightarrow \quad m > 3 \text{ ou } n > 3$

f) *Référentiel* : $\forall m\,,\,n \in \mathbb{N}$

$m + n = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 0$ et $n = 0.$

non B : $m \neq 0$ ou $n \neq 0$
non A : $m + n \neq 0$

D'où l'énoncé contraposé :

$\forall m\,,\,n \in \mathbb{N} \; : \quad m \neq 0 \text{ ou } n \neq 0 \quad \Rightarrow \quad m + n \neq 0$

g) *Référentiel* : $\forall m\,,\,n \in \mathbb{N}$

$m = 0$ ou $n = 0 \quad \Rightarrow \quad m \cdot n = 0.$

non B : $m \cdot n \neq 0$
non A : $m \neq 0$ et $n \neq 0$

D'où l'énoncé contraposé :

$\forall m\,,\,n \in \mathbb{N} \; : \quad m \cdot n \neq 0 \quad \Rightarrow \quad m \neq 0 \text{ et } n \neq 0$

h) *Référentiel* : $\forall a \in \mathbb{R}$

$(\forall \varepsilon > 0\,,\; |a| < \varepsilon) \quad \Rightarrow \quad a = 0.$

non B : $a \neq 0$
non A : $\exists \varepsilon > 0\,,\; |a| \geq \varepsilon$

D'où l'énoncé contraposé :

$\forall a \in \mathbb{R} \; : \quad a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \varepsilon > 0\,,\; |a| \geq \varepsilon$

***Ex*-03-03*:** *Démontrer par la contraposée les théorèmes suivants :*

a) $\forall n\,,\,m \in \mathbb{N}\,,\; m \cdot n$ *pair* $\;\Rightarrow\;$ *m est pair ou n est pair.*

b) $\forall n\,,\,m \in \mathbb{N}^*\,,\; m^n$ *impair* $\;\Rightarrow\;$ *m est impair ou n est impair.*

c) $\forall n\,,\,m \in \mathbb{N}\,,\; (m^2{+}n^2$ *est impair ou* $m^2{+}n^2 = 4k, k \in \mathbb{N})\;\Rightarrow\;$ *m est pair ou n est pair.*

d) $\forall n\,,\,m \in \mathbb{N}^*\,,\; m^2 - n^2$ *n'est pas une multiple de 8* $\;\Rightarrow\;$ *m est pair ou n est pair.*

e) Si n^2 *est un multiple de* 3 *alors n est aussi un multiple de 3, n étant un entier positif.*

f) $A \cap \overline{B} = \emptyset \;\Leftrightarrow\; A \subset B\,.$

g) $A \subset B \;\Leftrightarrow\; E = \overline{A} \cup B\,.$

h) $\forall\; A, B, C \;\subset\; E, \quad (A \cap B) \;\subset\; C \;\Longrightarrow\; \mathcal{C}_A(C) \;\cap\; \mathcal{C}_B(C) \;=\; \emptyset\,.$
$(\mathcal{C}_A(C)$ *est le complémentaire de* C *dans* A*).*

Démontrer un théorème en utilisant son énoncé contraposé :

- on écrit l'énoncé contraposé C,
- on démontre C par la méthode directe.

  Soit le théorème : $T\ :\ [\forall n, m \in \mathbb{N},\ P \Rightarrow Q]$

  et son énoncé contraposé $C\ :\ [\forall n, m \in \mathbb{N},\ \text{non}\, Q \Rightarrow\ \text{non}\, P]$

Ces deux énoncés sont logiquement équivalents : C vrai $\Leftrightarrow T$ vrai.

a) Soit le théorème T :

   Référentiel : $m, n \in \mathbb{N}$

   Hypothèse $P\ :\ m \cdot n$ pair

   Conclusion $Q\ :\ m$ est pair ou n est pair

   On écrit la proposition contraposée C :

   Référentiel : $m, n \in \mathbb{N}$

   Hypothèse non $Q\ :\ m$ est impair et n est impair

   Conclusion non $P\ :\ m \cdot n$ est impair

   Preuve de la proposition contraposée :

   Par hypothèse : $\left\{ \begin{array}{rcl} m &=& 2k+1\,,\ k \in \mathbb{N} \\ n &=& 2l+1\,,\ l \in \mathbb{N} \end{array} \right.$

$$
\begin{array}{rcl}
m \cdot n = (2k+1)\cdot(2l+1) &=& 4\,kl + 2\,k + 2\,l + 1 \\
&=& 2\,(2kl + k + l) + 1 \\
&=& 2k' + 1 \quad \text{où } k' \in \mathbb{N}
\end{array}
$$

   $\Rightarrow\ m \cdot n$ est impair.

   L'énoncé contraposé C est vrai donc T est aussi vrai.

b) Référentiel : $m, n \in \mathbb{N}^*$

   Hypothèse $P\ :\ m^n$ impair

   Conclusion $Q\ :\ m$ est impair ou n est impair

   On écrit la proposition contraposée :

   Référentiel : $m, n \in \mathbb{N}^*$

   Hypothèse non $Q\ :\ m$ est pair et n est pair

   Conclusion non $P\ :\ m^n$ est pair

   Preuve de la proposition contraposée :

   Par hypothèse : $\left\{ \begin{array}{rcl} m &=& 2k\,,\ k \in \mathbb{N}^* \\ n &=& 2l\,,\ l \in \mathbb{N}^* \end{array} \right.$

$$\begin{aligned} m^n = (2k)^{2l} &= 2^{2l} \cdot k^{2l} \\ &= 2(2^{2l-1} \cdot k^{2l}) \\ &= 2k' \quad \text{où } k' = 2^{2l-1} \cdot k^{2l} \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ m^n est pair.

L'énoncé contraposé C est vrai donc T est aussi vrai.

c) Référentiel : $m, n \in \mathbb{N}$

Hypothèse P : $m^2 + n^2$ est impair ou $m^2 + n^2 = 4k$, $k \in \mathbb{N}$

Conclusion Q : m est pair ou n est pair

On écrit la proposition contraposée :

Référentiel : $m, n \in \mathbb{N}$

Hypothèse non Q : m est impair et n est impair

Conclusion non P : $m^2 + n^2$ est pair et $m^2 + n^2 \neq 4k$, $k \in \mathbb{N}$

Preuve de la proposition contraposée :

Par hypothèse : $\begin{cases} m = 2k+1, \ k \in \mathbb{N} \\ n = 2l+1, \ l \in \mathbb{N} \end{cases}$

$$\begin{aligned} m^2 + n^2 &= 4k^2 + 4k + 1 + 4l^2 + 4l + 1 \\ &= 4\,(k^2 + k + l^2 + l) + 2 \\ &= 4\,k' + 2 \quad \text{où } k' \in \mathbb{N} \\ &= 2\,(2k' + 1) \end{aligned}$$

ainsi $m^2 + n^2$ est pair mais n'est pas multiple de 4 car $2k' + 1$ est impair.

L'énoncé contraposé C est vrai donc T est aussi vrai.

d) Référentiel : $m, n \in \mathbb{N}^*$

Hypothèse P : $m^2 - n^2$ n'est pas un multiple de 8

Conclusion Q : m est pair ou n est pair

On écrit la proposition contraposée :

Référentiel : $m, n \in \mathbb{N}^*$

Hypothèse non Q : m est impair et n est impair

Conclusion non P : $m^2 - n^2$ est un multiple de 8

Preuve de la proposition contraposée :

Par hypothèse : $\begin{cases} m = 2l+1, \ l \in \mathbb{N} \\ n = 2p+1, \ p \in \mathbb{N} \end{cases}$

$$
\begin{aligned}
m^2 - n^2 &= (2l+1)^2 - (2p+1)^2 \\
&= 4\,(l^2 + l - p^2 - p) \\
&= 4\,l\,(l+1) - 4\,p\,(p+1) \\
&= 4 \cdot 2\,a - 4 \cdot 2\,b \qquad a\,,\, b \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

car l et $l+1$ sont deux entiers consécutifs donc leur produit est pair, de même pour p et $p+1$.

$\Rightarrow\ m^2 - n^2 = 8a - 8b = 8k, \quad k \in \mathbb{Z}$

ainsi $m^2 - n^2$ est un multiple de 8.

L'énoncé contraposé C est vrai donc T est aussi vrai.

e) Référentiel : $n \in \mathbb{N}$

Hypothèse P : $n^2 = 3k\,,\ k \in \mathbb{N}$

Conclusion Q : $n = 3k'\,,\ k' \in \mathbb{N}$

On écrit la proposition contraposée :

Référentiel : $n \in \mathbb{N}$

Hypothèse non Q : $n \neq 3k'\,,\ k' \in \mathbb{N}$

Conclusion non P : $n^2 \neq 3k\,,\ k \in \mathbb{N}$

Preuve de la proposition contraposée :

- On suppose : $n = 3l + 1\,,\ l \in \mathbb{N}$
  $n^2 = (3l+1)^2 = 9l^2 + 6l + 1 = 3(3l^2 + 2l) + 1 = 3l' + 1\,,\ l' \in \mathbb{N}$
  Ainsi n^2 n'est pas un multiple de 3.
- On suppose : $n = 3l + 2\,,\ l \in \mathbb{N}$
  $n^2 = (3l+2)^2 = 9l^2 + 12l + 4 = 9l^2 + 12l + 3 + 1 = 3(3l^2 + 4l + 1) + 1 = 3l' + 1\,,\ l' \in \mathbb{N}$
  Ainsi n^2 n'est pas un multiple de 3.

L'énoncé contraposé C est vrai donc T est aussi vrai.

f) Soit le théorème T :

$\forall A\,,\, B \subset E\ :\quad A \cap \overline{B} = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad A \subset B$

On écrit la proposition contraposée C :

$\forall A\,,\, B \subset E\ :\quad A \cap \overline{B} \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad A \not\subset B$

Preuve de C par la méthode directe :

$$
\begin{aligned}
A \cap \overline{B} \neq \emptyset \quad &\Leftrightarrow \quad \exists x \in E\,,\, x \in A \cap \overline{B} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists x \in E\,,\, x \in A \text{ et } x \in \overline{B} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists x \in E\,,\, x \in A \text{ et } x \notin B \\
&\Leftrightarrow \quad A \not\subset B
\end{aligned}
$$

L'énoncé contraposé C est vrai donc T est aussi vrai.

g) Soit le théorème $T : \forall A, B \subset E, \quad P \Leftrightarrow Q$

et son énoncé contraposé $C : \forall A, B \subset E, \quad \text{non}\, P \Leftrightarrow \text{non}\, Q$

Ces deux énoncés sont logiquement équivalents : C vrai $\Leftrightarrow T$ vrai.
Soit le théorème T :

$\forall A, B \subset E : \quad A \subset B \quad \Leftrightarrow \quad E = \overline{A} \cup B$

On écrit la proposition contraposée C :

$\forall A, B \subset E : \quad A \not\subset B \quad \Leftrightarrow \quad E \neq \overline{A} \cup B$

Preuve de C par la méthode directe :

$$
\begin{aligned}
A \not\subset B \quad & \Leftrightarrow \quad \exists x \in E, x \in A \text{ et } x \notin B \\
& \Leftrightarrow \quad \exists x \in E, x \in A \text{ et } x \in \overline{B} \\
& \Leftrightarrow \quad \exists x \in E, x \in A \cap \overline{B} \\
& \Leftrightarrow \quad \exists x \in E, x \notin \overline{A \cap \overline{B}} \\
& \Leftrightarrow \quad \exists x \in E, x \notin \overline{A} \cup B \\
& \Leftrightarrow \quad E \neq \overline{A} \cup B
\end{aligned}
$$

L'énoncé contraposé C est vrai donc T est aussi vrai.

h) Soit le théorème $T : \forall A, B, C \subset E, \quad P \Rightarrow Q$

et son énoncé contraposé $C : \forall A, B, C \subset E, \quad \text{non}\, Q \Rightarrow \text{non}\, P$

Ces deux énoncés sont logiquement équivalents : C vrai $\Leftrightarrow T$ vrai.
Soit le théorème T :

$\forall A, B, C \subset E, \quad (A \cap B) \subset C \Rightarrow \mathcal{C}_A(C) \cap \mathcal{C}_B(C) = \emptyset.$

On écrit la proposition contraposée C :

$\forall A, B, C \subset E : \quad \mathcal{C}_A(C) \cap \mathcal{C}_B(C) \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad (A \cap B) \not\subset C$

Preuve de C par la méthode directe :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}_A(C) \cap \mathcal{C}_B(C) \neq \emptyset \quad & \Rightarrow \quad \exists x \in E, x \in \mathcal{C}_A(C) \cap \mathcal{C}_B(C) \\
& \Rightarrow \quad \exists x \in E, x \in \mathcal{C}_A(C) \text{ et } x \in \mathcal{C}_B(C) \\
& \Rightarrow \quad \exists x \in E, (x \in A \text{ et } x \notin C) \text{ et } (x \in B \text{ et } x \notin C) \\
& \Rightarrow \quad \exists x \in E, x \in A \text{ et } x \in B \text{ et } x \notin C \\
& \Rightarrow \quad \exists x \in E, x \in (A \cap B) \text{ et } x \notin C \\
& \Rightarrow \quad (A \cap B) \not\subset C
\end{aligned}
$$

L'énoncé contraposé C est vrai donc T est aussi vrai.

Ex-03-04: *En utilisant la méthode par l'absurde, démontrer les propositions suivantes :*

a) Si x *est irrationnel et* y *rationnel alors* $x+y$ *est irrationnel.*

b) $\forall a \in \mathbb{N}^*$, *si* a^2+2 *est un multiple de 3 alors* a *n'est pas un multiple de 3.*

c) $\forall\, m,n \in \mathbb{N}\,,\ m \leq 3$ *et* $n \leq 3 \ \Rightarrow\ m \cdot n \neq 15.$

d) Soient A *et* B *des sous-ensembles du référentiel* E.
$\forall\ A, B \subset E, \quad A \subset B \Rightarrow \bar{A} \cup B = E.$

e) $\sqrt{3}$ *est irrationnel.*
Indication : utiliser que si n^2 *est un multiple de 3, alors* n *est un multiple de 3. (la preuve se fera plus loin)*

a) Démonstration de l'énoncé $H \Rightarrow C$ par la méthode par l'absurde :
montrer que les hypothèses H et non C vraies aboutissent à une situation *contradictoire.*

Référentiel : $\mathbb{R}$

Hypothèse :	$x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ et $y \in \mathbb{Q}$	:	H
Conclusion :	$x+y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$	:	C

Ecrire les hypothèses H et non C.

On suppose :

$$\begin{cases} H \ : & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \quad \text{et} \quad y \in \mathbb{Q} \\ \text{non } C \ : & x+y \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Ainsi par hypothèse

$(x+y) \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow x+y = \dfrac{m}{n}\,,\ m \in \mathbb{Z}\,,\ n \in \mathbb{Z}^*$ et $m\,,n$ premiers entre eux

et

$y \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow y = \dfrac{a}{b}\,,\ a \in \mathbb{Z}\,,\ b \in \mathbb{Z}^*$ et $a\,,b$ premiers entre eux

D'où : $\quad x + \dfrac{a}{b} = \dfrac{m}{n} \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{m}{n} - \dfrac{a}{b} = \dfrac{bm-an}{nb} = \dfrac{c}{d}\,, \quad c\,,d \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad x \in \mathbb{Q}\,.$

Mais par hypothèse, $\quad x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\,.$

L'hypothèse (non C vraie) aboutit à une situation contradictoire où l'on a simultanément $x \in \mathbb{Q}$ et $\quad x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\,.$
Ce qui est impossible donc la conclusion ($x+y$ irrationnel) est vraie.

b) Démonstration de l'énoncé $H \Rightarrow C$ par la méthode par l'absurde :
montrer que les hypothèses H et non C vraies aboutissent à une situation *contradictoire.*

Référentiel : $\mathbb{N}$

Hypothèse :	$a \in \mathbb{N}^*\,,\ a^2+2 = 3k \quad k \in \mathbb{N}^*$	:	H
Conclusion :	a n'est pas multiple de 3	:	C

Ecrire les hypothèses H et non C.

On suppose :

$$\begin{cases} H \ : & a \in \mathbb{N}^*\,,\ a^2+2 = 3k \quad k \in \mathbb{N}^* \\ \text{non } C \ : & a = 3n\,,\ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Ainsi par hypothèse

$$\begin{cases} a^2+2=3k \\ a^2+2=(3n)^2+2=9n^2+2 \end{cases}$$

d'où

$3k=9n^2+2 \quad \Rightarrow \quad 2=3\left(k-3n^2\right)$ c'est-à-dire 2 est multiple de 3.

L'hypothèse (non C vraie) aboutit à la situation absurde où 2 est un multiple de 3.

Ce qui est impossible donc la conclusion (a n'est pas multiple de 3) est vraie.

c) Démonstration de l'énoncé $H \Rightarrow C$ par la méthode par l'absurde :
montrer que les hypothèses H et non C vraies aboutissent à une situation *contradictoire*.

Référentiel : $\mathbb{N}$

Hypothèse : $m\,,\,n\,\in\,\mathbb{N}\,,\; m\leq 3$ et $n\leq 3$: H
Conclusion : $m\cdot n\neq 15$: C

Ecrire les hypothèses H et non C.
On suppose :

$$\begin{cases} H \;:\; m\,,\,n\,\in\,\mathbb{N}\,,\; m\leq 3 \text{ et } n\leq 3 \\ \text{non } C \;:\; m\cdot n=15 \end{cases}$$

- si $n\neq 0$: $\quad m\cdot n=15 \quad\Rightarrow\quad m=\dfrac{15}{n}\geq 5$ car $n\leq 3$.
  On a donc silmultanément $m\leq 3$ et $m\geq 5$: ce qui est impossible.
  Ainsi $(m\cdot n\neq 15)$ est vrai.
- si $n=0$: on a simultanément $m\cdot n=0$ et $m\cdot n=15$: ce qui est impossible.
  Ainsi la conclusion $(m\cdot n\neq 15)$ est vraie.

d) Démonstration de l'énoncé $H \Rightarrow C$ par la méthode par l'absurde :
montrer que les hypothèses H et non C vraies aboutissent à une situation contradictoire.
Remarque : on note $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E.

Référentiel : un ensemble E

Hypothèse : $A\,,\,B\,\subset\,E\,,\; A\subset B$: H
Conclusion : $\overline{A}\,\cup\,B\,=\,E$: C

Ecrire les hypothèses H et non C.
Remarque : on note $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E.

On suppose :

$$\begin{cases} H \;:\; A\,,\,B\,\subset\,E\,,\; A\subset B \\ \text{non } C \;:\; \overline{A}\,\cup\,B\,\neq\,E \end{cases}$$

Par hypothèse :

$$\begin{aligned}
\overline{A}\cup B\neq E \quad &\Rightarrow \quad \exists x\in E\,,\quad x\notin \overline{A}\cup B \\
&\Rightarrow \quad \exists x\in E\,,\quad x\in \overline{\overline{A}\cup B} \\
&\Rightarrow \quad \exists x\in E\,,\quad x\in A\cap\overline{B} \\
&\Rightarrow \quad \exists x\in E\,,\quad x\in A \text{ et } x\in\overline{B} \\
&\Rightarrow \quad \exists x\in E\,,\quad x\in A \text{ et } x\notin B \\
&\Rightarrow \quad A\not\subset B
\end{aligned}$$

L'hypothèse (non C vraie) aboutit à une situation contradictoire où l'on a simultanément $A \subset B$ et $A \not\subset B$.

Ce qui est impossible donc la conclusion $(\overline{A} \cup B = E)$ est vraie.

e) Démonstration de l'énoncé $H \Rightarrow C$ par la méthode par l'absurde :
montrer que les hypothèses H et non C vraies aboutissent à une situation *contradictoire*.

Référentiel : $\mathbb{R}$

Hypothèse : $x = \sqrt{3}$

Conclusion : x est irrationnel

Ecrire les hypothèses H et non C.

On suppose :

$$\begin{cases} H \ : \quad x = \sqrt{3} \\ \\ \text{non } C \ : \ x = \sqrt{3} \text{ est rationnel} \end{cases}$$

Par hypothèse :

$\sqrt{3}$ est rationnel
$\Leftrightarrow$
$\exists\, a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que :

$$\begin{aligned} & \sqrt{3} = \frac{a}{b} > 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 3 = \frac{a^2}{b^2} \\ \Leftrightarrow \quad & a^2 = 3b^2 \\ \Leftrightarrow \quad & a^2 \text{ est multiple de } 3 \\ \Leftrightarrow \quad & a \text{ est multiple de } 3 \\ \Leftrightarrow \quad & a = 3a' \,, a' \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \text{ rationnel} \quad \Leftrightarrow \quad & \sqrt{3} = \frac{3a'}{b} > 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 3 = \frac{9a'^2}{b^2} \\ \Leftrightarrow \quad & b^2 = 3a'^2 \\ \Leftrightarrow \quad & b^2 \text{ est multiple de } 3 \\ \Leftrightarrow \quad & b \text{ est multiple de } 3 \\ \Leftrightarrow \quad & b = 3b' \,, b' \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

Ainsi $\sqrt{3}$ est rationnel $\Leftrightarrow \sqrt{3} = \dfrac{3a'}{3b'} = \dfrac{a}{b}$

donc a et b ont un facteur commun, mais par hypothèse, a et b sont premiers entre eux.

Ainsi en supposant $\sqrt{3}$ rationnel, on a simultanément que a et b ont un facteur commun et a et b sont premiers entre eux : ce qui est impossible. Donc $\sqrt{3}$ est irrationnel.

Ex-03-05: *Soit la proposition* T *suivante :*

$$T:\ \forall m,n\in\mathbb{N},\ n\neq 0\ \Rightarrow\ m+n\sqrt{2}\ \textit{est irrationnel.}$$

a) Démontrer la proposition T *par l'absurde.*

b) Enoncer la contraposée C *de la proposition* T. C *est-elle vraie ?*

c) Enoncer la réciproque R *de la proposition* T *et la démontrer par la méthode de la contraposée.*

a) Démonstration de l'énoncé $H\Rightarrow C$ par la méthode par l'absurde :
montrer que les hypothèses H et non C vraies aboutissent à une situation *contradictoire.*

Référentiel : $\mathbb{N}$

Hypothèse : $n\,,\,m\in\mathbb{N}\,,\,n\neq 0$: H

Conclusion : $m+n\sqrt{2}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$: C

Ecrire les hypothèses H et non C.
On suppose :

$$\begin{cases} H\ :\ \ n\,,\,m\in\mathbb{N}\,,\,n\neq 0\\ \text{non } C\ :\ \ m+n\sqrt{2}\in\mathbb{Q}\end{cases}$$

Ainsi par hypothèse

$m+n\sqrt{2}\in\mathbb{Q}\ \Leftrightarrow\ m+n\sqrt{2}=\dfrac{a}{b}\,,\ a\in\mathbb{Z}\,,\ b\in\mathbb{Z}^*$ et $a\,,b$ premiers entre eux

Or $n\neq 0\,,$ d'où $\sqrt{2}=\dfrac{a-bm}{nb}=\dfrac{c}{d}\,,\quad c\,,d\in\mathbb{Z}\quad\Rightarrow\quad\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$

Mais $\sqrt{2}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ (pour la démonstration voir le point f)

L'hypothèse (non C vraie) aboutit à une situation contradictoire où l'on a simultanément $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$ et $\sqrt{2}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.
Ce qui est impossible donc la conclusion $(m+n\sqrt{2}$ irrationnel) est vraie.

b) Ecrire la contraposée d'un énoncé de la forme $H\Rightarrow C$.
Le théorème $T:\ \forall n\,,\,m\in\mathbb{N}\,,\ H\Rightarrow C$

a pour contraposée $C:\ \forall n\,,\,m\in\mathbb{N}\,,$ non $C\Rightarrow$ non H

Soit le théorème $T:\ \forall m\,,\,n\in\mathbb{N}\,,\ n\neq 0\ \Rightarrow\ m+n\sqrt{2}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

Il a pour énoncé contraposé :

$C:\ \forall m\,,\,n\in\mathbb{N}\,,\ m+n\sqrt{2}\in\mathbb{Q}\ \Rightarrow\ n=0$

Cet énoncé est logiquement équivalent à T, donc C est vrai.

c) Ecrire la réciproque R d'un énoncé de la forme $H\Rightarrow C$.

Ecrire la contraposée de R et la montrer par la méthode directe.
Le théorème $T:\ \forall n\,,\,m\in\mathbb{N}\,,\ H\Rightarrow C$

a pour réciproque $R:\ \forall n\,,\,m\in\mathbb{N}\,,\ C\Rightarrow H$

Soit le théorème $T:\ \forall m\,,\,n\in\mathbb{N}\,,\ n\neq 0\ \Rightarrow\ m+n\sqrt{2}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

Il a pour énoncé réciproque :

$R: \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, \quad m+n\sqrt{2} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \quad \Rightarrow \quad n \neq 0$

Pour montrer R, on montre son énoncé contraposé C_R qui lui est logiquement équivalent. On écrit donc d'abord C_R.

$C_R \; : \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, \quad n = 0 \quad \Rightarrow \quad m+n\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

ce qui est évident car $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$.

C_R est vrai donc R est vrai.

Ex-03-06*: Ecrire la négation des propositions P suivantes.*
Dans le cas où la proposition est fausse, donner un contre-exemple.

a) $\forall x \in \mathbb{R}, \; x^2 = 9 \;\Rightarrow\; x = 3$.

b) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \; x^2 = y^2 \;\Rightarrow\; x = y$.

c) $\forall x \in \mathbb{R}, \; x \leq 2 \;\Rightarrow\; x \leq 0$.

d) $\forall x \in \mathbb{R}, \; x \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; x \in \mathbb{Q}$.

e) $\forall x \in \mathbb{R}, \; 2x^2 = 8 \;\Rightarrow\; x = 2$ *ou* $x = -2$.

f) $\forall (n;\, m) \in \mathbb{N}^2, \; n+m = 0 \;\Rightarrow\; n = m = 0$.

g) $\forall (a;\, b) \in \mathbb{R}^2, \; a < b \;\Rightarrow\; \exists x \in \mathbb{Q}, \; a < x < b$.

h) Un nombre est irrationnel lorsqu'il s'écrit comme produit de deux nombres irrationnels.

i) a *et* b *étant irrationnels, leur quotient est irrationnel.*

Ecrire la négation d'une proposition P.
Utiliser la méthode du contre-exemple lorsque P est fausse.

- La proposition $\quad P \; : \quad \forall x \in E, \; R \;\Rightarrow\; S$

  a pour négation $\quad$ non P : $\quad \exists x \in E, \; R$ et non S

  Attention au quantificateur !
  Attention la négation d'une implication n'est pas une implication !

- Pour montrer que P est fausse, on montre que non P est vraie. C'est-à-dire il existe un élément de E qui vérifie R et non S (méthode du contre-exemple) : l'hypothèse de P est vraie et sa conclusion fausse.

a) $P \; : \quad \forall x \in \mathbb{R}, \; x^2 = 9 \;\Rightarrow\; x = 3$.

non P : $\exists x \in \mathbb{R}, \; x^2 = 9$ et $x \neq 3$
P faux ; contre-exemple : si $x = -3$, l'hypothèse de P est vraie et sa conclusion est fausse.

b) $P \; : \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \; x^2 = y^2 \;\Rightarrow\; x = y$.

non P : $\exists x, y \in \mathbb{R}, \; x^2 = y^2$ et $x \neq y$
P faux ; contre-exemple : si $x = 2$, $y = -2$, l'hypothèse de P est vraie et sa conclusion est fausse.

c) $P \; : \quad \forall x \in \mathbb{R}, \; x \leq 2 \;\Rightarrow\; x \leq 0$.

non P : $\exists x \in \mathbb{R}, \; x \leq 2$ et $x > 0$
P faux ; contre-exemple : si $x = 1$, l'hypothèse de P est vraie et sa conclusion est fausse.

d) $P \; : \quad \forall x \in \mathbb{R}, \; x \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; x \in \mathbb{Q}$.

non P : $\exists x \in \mathbb{R}, \; x \in \mathbb{R}$ et $x \notin \mathbb{Q}$
P faux ; contre-exemple : si $x = \sqrt{2}$, l'hypothèse de P est vraie et sa conclusion est fausse.

e) $P \; : \quad \forall x \in \mathbb{R}, \; 2x^2 = 8 \;\Rightarrow\; x = 2$ ou $x = -2$.

non P : $\exists x \in \mathbb{R}, \; 2x^2 = 8$ et $(x \neq 2$ et $x \neq -2)$
P vrai.

f) P : $\forall (n;\, m) \in \mathbb{N}^2 ,\ n+m=0 \ \Rightarrow\ n=m=0 .$

non P : $\exists (n;\, m) \in \mathbb{N}^2 ,\ n+m=0$ et $(n \neq 0$ ou $m \neq 0)$
P vrai.

g) P : $\forall (a;\, b) \in \mathbb{R}^2 ,\ a<b \ \Rightarrow\ \exists x \in\ \mathbb{Q},\ a<x<b .$

non P : $\exists (a;\, b) \in \mathbb{R}^2 ,\ a<b$ et $(\forall x \in \mathbb{Q},\ a \geq x$ ou $x \geq b)$
P vrai.

h) P : Un nombre est irrationnel lorsqu'il s'écrit comme produit de deux nombres irrationnels.

On commence par réécrire la proposition :

$\forall x \in \mathbb{R},\ x$ est produit de 2 irrationnels $\Rightarrow$ x est irrationnel.

non P : $\exists x \in \mathbb{R},\ x$ est produit de 2 irrationnels et x est rationnel
P faux ; contre-exemple : si $x=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$, l'hypothèse de P est vraie et sa conclusion est fausse.

i) P : a et b étant irrationnels, leur quotient est irrationnel.

On commence par réécrire la proposition :

$\forall a, b \in \mathbb{R},\ a$ et b sont irrationnels $\Rightarrow$ $\dfrac{a}{b}$ est irrationnel.

non P : $\exists a, b \in \mathbb{R},\ a$ et b sont irrationnels et $\dfrac{a}{b}$ est rationnel
P faux ; contre-exemple : si $a=\sqrt{2}$ et $b=\sqrt{2}$, l'hypothèse de P est vraie et sa conclusion est fausse.

Ex-03-07*: Démontrer par récurrence :*

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = 1+2+3+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1) .$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = 2+4+6+\cdots+2n = n(n+1) .$

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = 1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2 = \frac{n\,(2n-1)\,(2n+1)}{3} .$

d) $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = 2+6+18+\cdots+2\cdot 3^{n-1} = 3^n-1 .$

e) $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2 .$

f) $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = 3+3^2+3^3+\cdots+3^n = \frac{3}{2}\,(3^n-1) .$

g) $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\,(n+1)} = \frac{n}{n+1} .$

h) $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = 1^2-2^2+3^2-\cdots+(-1)^{n+1}n^2 = \frac{1}{2}(-1)^{n+1}n\,(n+1) .$

i) $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $5^n+5 < 5^{n+1} .$

j) $\forall n \in \mathbb{N}$: 10^n-1 *est un multiple de* 9.

k) $\forall n \in \mathbb{N}$: $2^{2n}+2$ *est divisible par* 3.

l) $\forall n \in \mathbb{N}$ *et* $n \geq 6$: $2^n \geq 6n+7 .$

m) $\forall n \in \mathbb{N}$ *et* $n \geq 4$: $2^n < n! .$

n) $\forall n \in \mathbb{N}$ *et* $n \geq 7$: $\left(\frac{4}{3}\right)^n > n .$

o) $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{(2n)!}{n!n!} \leq 2^{2n-1}$

p) $3^{3n}+1$ *est un multiple de 7 pour tout* n *impair et* $n \geq 1 .$

Démonstration par récurrence.
Marche à suivre.

- Vérifier la proposition pour le plus petit n.
- Démontrer le “pas” de récurrence.
  * Expliciter l'hypothèse et la conclusion du “pas” de récurrence.
  * Rédiger la preuve.

a) **Vérification de la proposition pour $n = 1$.**

$$S_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{2}\, n\,(n+1)\,\Big|_{n=1} = 1\,.$$

la proposition est vraie pour $n = 1$.
Démonstration du “pas” de récurrence.

Hypothèse : $S_n = \frac{1}{2}\, n\,(n+1)$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$ donné.

Conclusion : $S_{n+1} = \frac{1}{2}\,(n+1)\,(n+2)$.

Preuve :

$S_{n+1} = \underbrace{1 + 2 + \cdots + n}_{= S_n} + (n+1)$

$S_{n+1} = S_n + n + 1$.

Or par hypothèse, $S_n = \frac{1}{2}\, n\,(n+1)$, donc

$S_{n+1} = \frac{1}{2}\, n\,(n+1) \; + \; n + 1$,

$S_{n+1} = (\frac{1}{2}n + 1)\,(n+1) \; = \; \frac{1}{2}\,(n+1)\,(n+2)$

b) **Vérification de la proposition pour $n = 1$.**

$$S_1 = 2 \qquad \text{et} \qquad n\,(n+1)\,\big|_{n=1} = 2\,.$$

la proposition est vraie pour $n = 1$.
Démonstration du “pas” de récurrence.

Hypothèse : $S_n = n\,(n+1)$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$ donné.

Conclusion : $S_{n+1} = (n+1)\,(n+2)$.

Preuve :

$S_{n+1} = \underbrace{2 + 4 + 6 + \cdots + 2n}_{= S_n} + 2(n+1)$

$S_{n+1} = S_n + 2(n+1)$.

Or par hypothèse, $S_n = n\,(n+1)$, donc

$S_{n+1} = n\,(n+1) \; + \; 2(n+1) = (n+1)\,(n+2)$

c) **Vérification de la proposition pour $n = 1$.**

$$S_1 = 1^1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{3}\, n\,(2n-1)\,(2n+1)\,\Big|_{n=1} = 1\,.$$

la proposition est vraie pour $n = 1$.

Démonstration du "pas" de récurrence.

Hypothèse : $S_n = \frac{1}{3}\, n\,(2n-1)\,(2n+1)$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$ donné.

Conclusion : $S_{n+1} = \frac{1}{3}\,(n+1)\,(2n+1)\,(2n+3)$.

Preuve :

$$S_{n+1} = \underbrace{1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2}_{=S_n} + (2n+1)^2$$

$$S_{n+1} = S_n + (2n+1)^2 .$$

Or par hypothèse, $S_n = \frac{1}{3}\, n\,(2n-1)\,(2n+1)$, donc

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= \tfrac{1}{3}\, n\,(2n-1)\,(2n+1) + (2n+1)^2 \\
&= (2n+1)\,\tfrac{1}{3}\,(2n^2 - n + 6n + 3) \\
&= (2n+1)\,\tfrac{1}{3}\,(2n^2 + 5n + 3) \\
&= \tfrac{1}{3}\,(2n+1)\,2\,(n+\tfrac{3}{2})\,(n+1) \\
&= \tfrac{1}{3}\,(2n+1)\,(2n+3)\,(n+1)
\end{aligned}$$

d) **Vérification de la proposition pour $n = 1$.**

$$S_1 = 2 \qquad \text{et} \qquad 3^n - 1 \,\Big|_{n=1} = 2 .$$

la proposition est vraie pour $n = 1$.

Démonstration du "pas" de récurrence.

Hypothèse : $S_n = 3^n - 1$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$ donné.

Conclusion : $S_{n+1} = 3^{n+1} - 1$.

Preuve :

$$S_{n+1} = \underbrace{2 + 6 + 18 + \cdots + 2 \cdot 3^{n-1}}_{=S_n} + 2 \cdot 3^n$$

$$S_{n+1} = S_n + 2 \cdot 3^n .$$

Or par hypothèse, $S_n = 3^n - 1$, donc

$$S_{n+1} = 3^n - 1 + 2 \cdot 3^n = 3^n\,(1+2) - 1 = 3^{n+1} - 1$$

e) **Vérification de la proposition pour $n = 1$.**

$$S_1 = 1^3 = 1 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2 \Bigg|_{n=1} = 1 .$$

la proposition est vraie pour $n = 1$.

Démonstration du "pas" de récurrence.

Hypothèse : $S_n = \left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$ donné.

Conclusion : $S_{n+1} = \left(\frac{(n+1)\,(n+2)}{2}\right)^2$.

Preuve :

$S_{n+1} = \underbrace{1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3}_{=S_n} + (n+1)^3$

$S_{n+1} = S_n + (n+1)^3$.

Or par hypothèse, $S_n = \left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2$, donc

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \left(\tfrac{n\,(n+1)}{2}\right)^2 \;+\; (n+1)^3 \\ &= (n+1)^2\,\tfrac{1}{4}\,(n^2+4n+4) \\ &= \tfrac{1}{4}\,(n+1)^2\,(n+2)^2 \end{aligned}$$

f) **Vérification de la proposition pour $n = 1$.**

$$S_1 = 3 \qquad \text{et} \qquad \frac{3}{2}\,(3^n - 1)\,\Big|_{n=1} = 3\,.$$

la proposition est vraie pour $n = 1$.
Démonstration du “pas” de récurrence.

Hypothèse : $S_n = \frac{3}{2}\,(3^n - 1)$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$ donné.

Conclusion : $S_{n+1} = \frac{3}{2}\,(3^{n+1} - 1)$.

Preuve :

$S_{n+1} = \underbrace{3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n}_{=S_n} + 3^{n+1}$

$S_{n+1} = S_n + 3^{n+1}$.

Or par hypothèse, $S_n = \frac{3}{2}\,(3^n - 1)$, donc

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \tfrac{3}{2}\,(3^n - 1) \;+\; 3^{n+1} \\ &= \tfrac{1}{2}\,3^{n+1} \;+\; 3^{n+1} \;-\; \tfrac{3}{2} \\ &= 3^{n+1}\,(\tfrac{1}{2} \;+\; 1) \;-\; \tfrac{3}{2} \\ &= \tfrac{3}{2}\,(3^{n+1} - 1) \end{aligned}$$

g) **Vérification de la proposition pour $n = 1$.**

$$S_1 = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{n}{n+1}\,\Big|_{n=1} = \frac{1}{2}\,.$$

la proposition est vraie pour $n = 1$.
Démonstration du “pas” de récurrence.

Hypothèse : $S_n = \dfrac{n}{n+1}$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$ donné.

Conclusion : $S_{n+1} = \dfrac{n+1}{n+2}$.

Preuve :

$$S_{n+1} = \underbrace{\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}}_{=S_n} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}$$

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}.$$

Or par hypothèse, $S_n = \dfrac{n}{n+1}$, donc

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} \\ &= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{(n+1)^2}{(n+1)\cdot(n+2)} \\ &= \frac{n+1}{n+2} \end{aligned}$$

h) **Vérification de la proposition pour $n = 1$.**

$$S_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{2}\,(-1)^{n+1}\,n\,(n+1)\,\Big|_{n=1} = 1.$$

la proposition est vraie pour $n = 1$.

Démonstration du “pas” de récurrence.

Hypothèse : $S_n = \frac{1}{2}\,(-1)^{n+1}\,n\,(n+1)$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$ donné.

Conclusion : $S_{n+1} = \frac{1}{2}\,(-1)^{n+2}\,(n+1)\,(n+2)$.

Preuve :

$$S_{n+1} = \underbrace{1^2 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (-1)^{n+1}\,n^2}_{=S_n} + (-1)^{n+2}\,(n+1)^2$$

$$S_{n+1} = S_n + (-1)^{n+2}\,(n+1)^2.$$

Or par hypothèse, $S_n = \frac{1}{2}\,(-1)^{n+1}\,n\,(n+1)$, donc

$$S_{n+1} = \tfrac{1}{2}\,(-1)^{n+1}\,n\,(n+1) \;+\; (-1)^{n+2}\,(n+1)^2,$$

$$S_{n+1} = (-1)^{n+2}\,(n+1)\,\left[-\tfrac{1}{2}\,n + (n+1)\right],$$

$$S_{n+1} = (-1)^{n+2}\,(n+1)\,\left[\tfrac{1}{2}\,n + 1\right],$$

$$S_{n+1} = (-1)^{n+2}\,(n+1)\,\tfrac{1}{2}\,\left[n + 2\right],$$

$S_{n+1} = \frac{1}{2}\left(-1\right)^{n+2}\left(n+1\right)\left(n+2\right).$

i) **Vérification de la proposition pour** $n = 1$ **.**

$5 + 5 < 5^2$

On a : $10 < 25$ donc la proposition est vraie pour $n = 1$.

Démonstration du "pas" de récurrence.

Hypothèse : $5^n + 5 < 5^{n+1}$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$ donné.

Conclusion : $5^{n+1} + 5 < 5^{n+2}$.

Preuve :

$5^{n+1} + 5 = 5^{n+1} + 25 - 20 = 5(5^n + 5) - 20 < 5 \cdot 5^{n+1} - 20$ par hypothèse d'induction

donc

$5^{n+1} + 5 < 5^{n+2} - 20 < 5^{n+2}$

j) **Vérification de la proposition pour** $n = 0$ **.**

$10^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = 9 \cdot 0$

donc la proposition est vraie pour $n = 0$.

Démonstration du "pas" de récurrence.

Hypothèse : $10^n - 1 = 9k$ pour un $n \in \mathbb{N}$ donné et $k \in \mathbb{N}$.

Conclusion : $10^{n+1} - 1 = 9\,l,\ l \in \mathbb{N}$.

Preuve :

$10^{n+1} - 1 = 10 \cdot 10^n - 1 = 10\left(9k + 1\right) - 1$ car par hypothèse d'induction $10^n = 9k + 1$

donc

$10^{n+1} - 1 = 10 \cdot 9k + 10 - 1 = 10 \cdot 9k + 9 = 9\,l, \quad l = 10k + 1 \in \mathbb{N}$

$10^{n+1} - 1$ est donc un multiple de 9.

k) **Vérification de la proposition pour** $n = 0$ **.**

$2^0 + 2 = 1 + 2 = 3$

donc la proposition est vraie pour $n = 0$.

Démonstration du "pas" de récurrence.

Hypothèse : $2^{2n} + 2 = 3k$ pour un $n \in \mathbb{N}$ donné et $k \in \mathbb{N}$.

Conclusion : $2^{2(n+1)} + 2 = 3\,l,\ l \in \mathbb{N}$.

Preuve :

$2^{2(n+1)} + 2 = 2^{2n+2} + 2 = 4 \cdot 2^{2n} + 2 = 3 \cdot 2^{2n} + 2^{2n} + 2$

or par hypothèse d'induction $2^{2n} + 2 = 3k$

donc

$2^{2(n+1)} + 2 = 3 \cdot 2^{2n} + 3k = 3\,l, \quad l = 2^{2n} + k \in \mathbb{N}$

$2^{2(n+1)} + 2$ est donc un multiple de 3, c'est-à-dire il est divisible par 3.

l) **Vérification de la proposition pour** $n = 6$ **.**

$2^n = 2^6 = 64$

$6n + 7 = 36 + 7 = 43$

et $64 > 43$

donc la proposition est vraie pour $n = 6$.

Démonstration du "pas" de récurrence.

Hypothèse : $2^n \geq 6n+7$ pour un $n \in \mathbb{N}$ donné et $n \geq 6$.

Conclusion : $2^{2n+1} \geq 6(n+1)+7, \quad n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 6$.

Preuve :

$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2 \cdot (6n+7)$ par hypothèse d'induction
$2^{n+1} \geq 12n+14 = 6n+6n+6+7+1 = 6(n+1)+7+6n+1$
ainsi
$2^{n+1} \geq 6(n+1)+7+6n+1 \geq 6(n+1)+7$

m) **Vérification de la proposition pour** $n = 4$ **.**

$2^4 = 16$
et $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

On a : $16 < 24$ donc la proposition est vraie pour $n = 4$.

Démonstration du "pas" de récurrence.

Hypothèse : $2^n < n! \quad n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 4$ donné.

Conclusion : $2^{n+1} < (n+1)!$.

Preuve : pour $n \geq 4$

$2^n < n! \quad | \cdot 2$
$2^{n+1} < 2 \cdot n! < (n+1)!$

car : $2 \cdot n! < (n+1)!$
en effet :
$2 \cdot n! < (n+1) \cdot n!$
$2 < n+1$ ce qui est vrai car $n \geq 4$

n) **Vérification de la proposition pour** $n = 7$ **.**

$\left(\frac{4}{3}\right)^7 > 7$ car $1 > \left(\frac{3}{4}\right)^7 \cdot 7$

donc la proposition est vraie pour $n = 7$.

Démonstration du "pas" de récurrence.

Hypothèse : $\left(\frac{4}{3}\right)^n > 7 \quad n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 7$ donné.

Conclusion : $\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} > n$

Preuve : pour $n \geq 7$

$\left(\frac{4}{3}\right)^n > n \quad | \cdot \frac{4}{3}$
$\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} > n \cdot \frac{4}{3} > n+1$

car : $n \cdot \frac{4}{3} > n+1$
en effet :
$4n > 3n+3$
$n > 3$ ce qui est vrai car $n \geq 7$

o) **Vérification de la proposition pour** $n = 1$ **.**

$$\frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{(2 \cdot 1)!}{1!1!} = \frac{2!}{1 \cdot 1} = \frac{2}{1} = 2$$

et $2^{2n-1} = 2^{2\cdot 1-1} = 2^1 = 2$

On a $2 \leq 2$ et la proposition est vraie pour $n = 1$.

Démonstration du "pas" de récurrence.

Hypothèse : $\dfrac{(2n)!}{n!n!} \leq 2^{2n-1}$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$ donné.

Conclusion : $\dfrac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \leq 2^{2n+1}$

Preuve :

$$\begin{aligned}
\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} &= \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)(n+1)n!n!} \\
&= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} \cdot \frac{(2n)!}{n!n!} \\
&\leq \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} \cdot 2^{2n-1} \quad \text{par hypothèse} \\
&= \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} \cdot 2^{2n-1} \\
&= \frac{2(2n+1)}{(n+1)} \cdot 2^{2n-1} \\
&= \frac{(2n+1)}{(n+1)} \cdot 2^{2n} \\
&\leq 2^{2n+1}
\end{aligned}$$

car $\dfrac{(2n+1)}{(n+1)} \leq 2$

en effet

$$\begin{aligned}
& 2n+1 \leq 2(n+1) \\
\Leftrightarrow\ & 2n+1 \leq 2n+2
\end{aligned}$$

c'est vrai !

p) **Vérification de la proposition pour $n = 1$.**

$3^{3n} + 1 = 3^{3\cdot 1} + 1 = 3^3 + 1 = 28 = 7 \cdot 4$

la proposition est vraie pour $n = 1$.

Démonstration du "pas" de récurrence.

Hypothèse : $3^{3(2l+1)} + 1 = 7k$, $k \in \mathbb{N}^*$, pour un $n = 2l+1$ donné, $l \in \mathbb{N}$

Conclusion : $3^{3(2l+3)} + 1 = 7k'$, $k' \in \mathbb{N}^*$,

Preuve :

$$
\begin{aligned}
3^{3(2l+3)}+1 = {} & 3^{6l+9}+1 \\
= {} & 3^6 \cdot 3^{6l+3}+1 \\
= {} & 3^6 \cdot 3^{6l+3}+3^6-3^6+1 \\
= {} & 3^6\left(3^{3(2l+1)}+1\right)-3^6+1 \\
= {} & 729 \cdot 7k-729+1 \qquad : \text{par hypothèse de récurrence et } 3^6=729 \\
= {} & 729 \cdot 7k-728 \\
= {} & 7\,(729k-104) \\
= {} & 7k' \qquad \text{avec } k'=729k-104 \in \mathbb{N}^*
\end{aligned}
$$