Série 02: Language logique

Ex*-02-01: Ecrire, en français, la négation des propositions suivantes.*

a) T : *« Darwin est mortel ».*

b) T : *« tout humain est mortel ».*

c) T : *« il existe un humain mortel ».*

a)

$$T : \text{« Darwin est mortel ».}$$

C'est une proposition simple. La négation portant sur le verbe,

$$\text{non}T : \text{« Darwin n'est pas mortel »}$$

ou encore, comme il n'y pas d'autre possibilité que l'immortalité,

$$\text{non}T : \text{« Darwin est immortel ».}$$

b)

$$T : \text{« tout humain est mortel ».}$$

C'est une proposition universelle. La négation est une proposition existentielle :

$$\text{non}T : \text{« il existe un humain immortel ».}$$

c)

$$T : \text{« il existe un humain mortel ».}$$

C'est une proposition existentielle. La négation est une proposition universelle :

$$\text{non}T : \text{« tout humain est immortel ».}$$

Ex*-02-02: En notant* E *l'ensemble des humains,* P *la propriété définie sur* E *« d'être mortel »,* M *l'ensemble associé à* P *et* $d \in E$ *l'individu nommé Darwin, écrire les propositions ci-dessous, ainsi que leur négation, en langage propositionnel et en langage ensembliste.*

a) T : *« Darwin est mortel ».*

b) T : *« tout humain est mortel ».*

c) T : *« il existe un humain mortel ».*

a) • T :

$$\text{« Darwin est mortel »} \;\Leftrightarrow\; P(d) \;\Leftrightarrow\; d \in M$$

• non$T$:

$$\text{« Darwin est immortel »} \;\Leftrightarrow\; \text{non}P(d) \;\Leftrightarrow\; d \notin M \;\Leftrightarrow\; d \in C_E(M) \;\Leftrightarrow\; d \in \overline{M}$$

b) • T :

$$\text{« tout humain est mortel »} \;\Leftrightarrow\; \forall x \in E,\, P(x) \;\Leftrightarrow\; \forall x \in E,\, x \in M \;\Leftrightarrow\; M = E$$

• non$T$:

$$\text{« il existe un humain immortel »} \;\Leftrightarrow\; \exists x \in E,\, \text{non}P(x) \;\Leftrightarrow\; \exists x \in E,\, x \notin M$$

$$\Leftrightarrow\; \exists x \in E,\, x \in \overline{M} \;\Leftrightarrow\; \overline{M} \neq \emptyset \;\Leftrightarrow\; M \neq E$$

c)• T :

$$\text{« il existe un humain mortel »} \Leftrightarrow \exists x \in E,\, P(x) \Leftrightarrow \exists x \in E,\, x \in M \Leftrightarrow M \neq \emptyset$$

• non$T$:

$$\text{« tout humain est immortel »} \Leftrightarrow \forall x \in E,\, \text{non}P(x) \Leftrightarrow \forall x \in E,\, x \notin M$$
$$\Leftrightarrow \forall x \in E,\, x \in \overline{M} \Leftrightarrow \overline{M} = E \Leftrightarrow M = \emptyset$$

Ex-02-03*: En notant I la propriété définie sur $\mathbb{Z}$ « d'être impair », A l'ensemble associé à I, P la propriété définie sur $\mathbb{Z}$ « d'être premier » et B l'ensemble associé à P, écrire les propositions ci-dessous, ainsi que leur négation, en langage propositionnel et en langage ensembliste. Donner également la valeur de vérité de toutes les propositions énoncées.*

a) T : 9 est impair et premier

b) U : 9 est impair ou premier

c) V : tout impair est premier

d) W : il existe un non premier pair

a)• T :

$$\text{9 est impair et premier} \Leftrightarrow I(9) \text{ et } P(9) \Leftrightarrow 9 \in A \cap B\,.$$

T est fausse.

• non$T$:

$$9 \notin A \cap B \Leftrightarrow 9 \in \overline{A} \cup \overline{B} \Leftrightarrow \text{non}I(9) \text{ ou non}P(9) \Leftrightarrow \text{9 est pair ou non premier}\,.$$

non$T$ est vraie.

b)• U :

$$\text{9 est impair ou premier} \Leftrightarrow I(9) \text{ ou } P(9) \Leftrightarrow 9 \in A \cup B\,.$$

U est vraie.

• non$U$:

$$9 \notin A \cup B \Leftrightarrow 9 \in \overline{A} \cap \overline{B} \Leftrightarrow \text{non}I(9) \text{ et non}P(9) \Leftrightarrow \text{9 est pair et non premier}\,.$$

non$U$ est fausse.

c)• V :

$$\text{tout impair est premier} \Leftrightarrow \Big(I \Rightarrow P\Big)$$
$$\Leftrightarrow \Big(\forall n \in \mathbb{Z},\ \text{si } I(n),\ \text{alors } P(n)\Big) \Leftrightarrow \Big(\forall n \in A, n \in B\Big) \Leftrightarrow A \subset B$$
$$\Leftrightarrow \overline{A} \cup B = \mathbb{Z} \Leftrightarrow \text{tout entier est pair ou premier}\,.$$

V est fausse.

• non$V$:

$$A \not\subset B \Leftrightarrow A \cap \overline{B} \neq \emptyset \Leftrightarrow \Big(\exists n \in A, n \notin B\Big) \Leftrightarrow \Big(\exists n \in \mathbb{Z},\, I(n) \text{ et non}P(n)\Big)$$
$$\Leftrightarrow \text{il existe un impair non premier}\,.$$

non$V$ est vraie.

d)• W :

$$\text{il existe un non premier pair} \Leftrightarrow \Big(\exists n \in \mathbb{Z},\, \text{non}I(n) \text{ et non}P(n)\Big) \Leftrightarrow \overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset\,.$$

W est vraie.

- non$W$: $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$

$$\Leftrightarrow \quad A \cup B = \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad \Big(\forall n \in \mathbb{Z},\, I(n) \text{ ou } P(n)\Big)$$

$\Leftrightarrow$ tout entier est impair ou premier

$$\Leftrightarrow \quad \overline{A} \subset B \quad \Leftrightarrow \quad \Big(\forall n \in \overline{A},\, n \in B\Big) \quad \Leftrightarrow \quad \Big(\text{non}I \Rightarrow P\Big)$$

$\Leftrightarrow$ tout pair est premier

$$\Leftrightarrow \quad \overline{B} \subset A \quad \Leftrightarrow \quad \Big(\forall n \in \overline{B},\, n \in A\Big) \quad \Leftrightarrow \quad \Big(\text{non}P \Rightarrow I\Big)$$

$\Leftrightarrow$ tout non premier est impair .

non$W$ est fausse.

***Ex*-02-04**: *Ecrire, en langage quantifié, la négation des propositions P suivantes et déterminer si l'on a P ou (non P) vrai.*

a) $\exists\, x \in \mathbb{R}\,,\ |x| = 0\,.$

b) $\forall\, x \in \mathbb{R}\,,\ x = \sqrt{3}\,.$

c) $\forall\, x \in \mathbb{R}\,,\ x \neq 0\,.$

d) $\exists\, x \in \mathbb{R}\,,\ x^2 - 2x + 2 = 0\,.$

e) $\forall\, x \in \{1,\, 2,\, 3,\, 4\},\ x^2 - 10 \leq 0\,.$

f) $\forall\, x \in \mathbb{N},\ \exists\, k \in \mathbb{N},\ x = 2k\,.$

g) $\forall x \in A = \{1,\, 2,\, 3\}, \exists y \in A, x^2 + 2y < 10\,.$

h) $\forall\, (a;\, b) \in \mathbb{N}^2\,,\ a^2 + b^2 \leq (a+b)^2\,.$

i) $\forall\, x \in \mathbb{R}_+,\, (x \leq 1 \ \ \textit{et} \ \ x^2 \leq x)\,.$

j) $\forall\, x \in \mathbb{R}_+,\, (x \leq 1 \ \ \textit{ou} \ \ x^2 \leq x)\,.$

k) $\forall x \in [0, 1],\, x^2 \leq x\,.$

a) $P:\ \exists\, x \in \mathbb{R}\,,\ |x| = 0\,.$

(non P) : $\forall\, x \in \mathbb{R}\,,\ |x| \neq 0\,.$
P vrai, car il existe $x = 0 \in \mathbb{R}\,.$
(non P) faux.

b) $P:\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,,\ x = \sqrt{3}\,.$

(non P) : $\exists\, x \in \mathbb{R}\,,\ x \neq \sqrt{3}\,.$
(non P) vrai, car il existe $x = \sqrt{2} \in \mathbb{R}\,.$
P faux.

c) $P:\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,,\ x \neq 0\,.$

(non P) : $\exists\, x \in \mathbb{R}\,,\ x = 0\,.$
(non P) vrai, car il existe $x = 0 \in \mathbb{R}\,.$
P faux.

d) $P:\ \exists\, x \in \mathbb{R}\,,\ x^2 - 2x + 2 = 0\,.$

(non P) : $\forall\, x \in \mathbb{R}\,,\ x^2 - 2x + 2 \neq 0\,.$
or $\Delta' = 1 - 2 < 0$
(non P) vrai, car $\Delta' < 0$.
P faux.

e) $P:\ \forall\, x \in \{1;\, 2;\, 3;\, 4\}\,,\ x^2 - 10 \leq 0\,.$

(non P) : $\exists\, x \in \{1;\, 2;\, 3;\, 4\}\,,\ x^2 - 10 > 0\,.$
(non P) vrai, car il existe $x = 4$ tel que $x^2 - 10 > 0$.
P faux.

f) $P:\ \forall\, x \in \mathbb{N},\ \exists\, k \in \mathbb{N},\ x = 2k\,.$ (non P) : $\exists\, x \in \mathbb{N}\,,\ \forall\, k \in \mathbb{N}\,,\ x \neq 2k\,.$
(non P) vrai, car il existe $x = 3$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}\,,\, x \neq 2k$.
P faux.

g) $P: \ \forall x \in A = \{1;\, 2;\, 3\}\,,\ \exists y \in A\,,\ x^2 + 2y < 10\,.$

$(\text{non } P): \ \exists x \in A = \{1;\, 2;\, 3\}\,,\ \forall y \in A\,,\ x^2 + 2y \geq 10\,.$
(non P) vrai, car il existe $x = 3$ tel que pour tout $y \in A \ : \ x^2 + 2y \geq 10\,.$
P faux.

h) $P: \ \forall (a;\, b) \in \mathbb{N}^2\,,\ a^2 + b^2 \leq (a+b)^2\,.$ (non P) : $\exists (a;\, b) \in \mathbb{N}^2\,,\ a^2 + b^2 > (a+b)^2\,.$
P vrai, car pour tout $(a;\, b) \in \mathbb{N}^2\,,\ ab \geq 0$ donc
$a^2 + b^2 \leq a^2 + b^2 + 2ab$ c'est-à-dire $a^2 + b^2 \leq (a+b)^2\,.$
(non P) faux.

i) $P: \ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ (x \leq 1 \text{ et } x^2 \leq x)\,.$ (non P) : $\exists x \in \mathbb{R}_+\,,\ (x > 1 \text{ ou } x^2 > x)\,.$
non P vrai, car il existe $x = 2$ tel que $x > 1\,.$
P faux.

j) $P: \ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ (x \leq 1 \text{ ou } x^2 \leq x)\,.$ (non P) : $\exists x \in \mathbb{R}_+\,,\ (x > 1 \text{ et } x^2 > x)\,.$
non P vrai, car il existe $x = 2$ tel que $x > 1$ et $x^2 > x\,.$
P faux.

k) $P: \ \forall x \in [0,1],\ x^2 \leq x\,.$ (non P) : $\exists x \in [0,1]\,, x^2 > x\,.$
P vrai, car pour tout $0 \leq x \leq 1\,, x^2 - x \leq 0.$
non P faux.

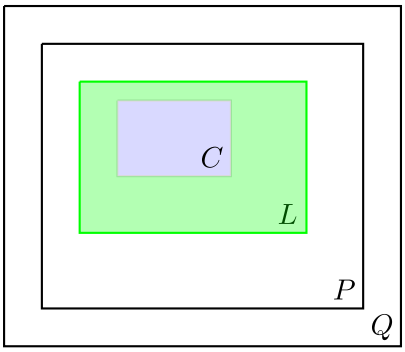
Ex-02-05*: Soit E un sous-ensemble des quadrilatères du plan que l'on considère comme un référentiel. Déterminer E pour que les propositions suivantes soient vraies :*

a) Pour tout quadrilatère $ABCD \in E$, $ABCD$ est un losange si et seulement si ses diagonales se coupent à angle droit.

b) Pour tout quadrilatère $ABCD \in E$, $ABCD$ est un carré si et seulement si les angles en A, B, C et D sont droits.

Indication : un losange est, par définition, un parallélogramme dont les 4 côtés sont de même longueur.

On considère les diagrammes de Venn suivants.



$Q =$ ensemble des quadrilatères

$P =$ ensemble des paralléllogrammes

$L =$ ensemble des losanges

$C =$ ensemble des carrés

Le losange et le carré sont des parallélogrammes particuliers. Le carré est un losange particulier.

a) $E =$ ensemble des parallélogrammes

$ABCD$ est un losange $\Leftrightarrow$ ses diagonales se coupent à angle droit.

Pour que l'équivalence ait lieu, il faut que E soit l'ensemble des parallélogrammes car les côtés doivent être parallèles deux à deux. Il faut enlever le cas des quadrilatères quelconques dont les diagonales se coupent à angle droit.

b) $E =$ ensemble des losanges

$ABCD$ est un carré $\Leftrightarrow$ les angles en A, B, C et D sont droits.

Pour que l'équivalence ait lieu, il faut que E soit l'ensemble des losanges car les côtés doivent être de même longueur. Il faut donc enlever le cas des rectangles.