***Ex*-01-01**: *Soient* $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{2, 4\}$; *trouver tous les ensembles* X *vérifiant :*

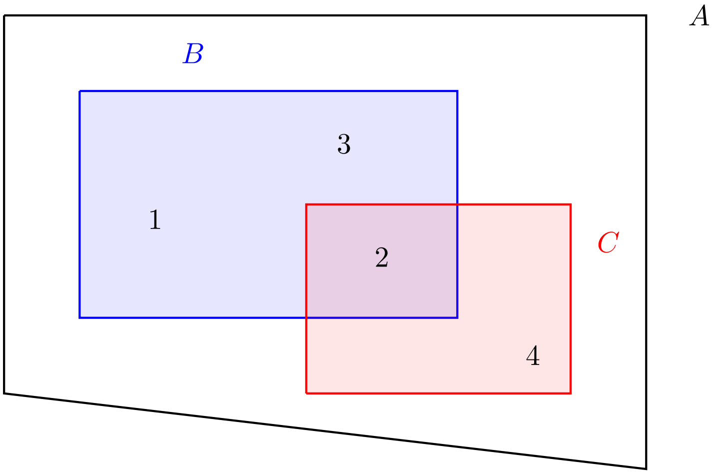
a) $X \subset B$ *et* $X \subset C$,

b) $X \subset B$ *et* $X \not\subset C$,

c) $X \subset A$ *et* $X \not\subset B$,

d) $X \subset C$ *et* $X \not\subset B$.

On représente les ensembles A, B et C à l'aide de diagrammes de Venn.
$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{2, 4\}$



a) $X \subset B$ et $X \subset C$
On a $X \subset (B \cap C)$. Or $B \cap C = \{2\}$, donc $X = \emptyset$ ou $X = \{2\}$.

b) $X \subset B$ et $X \not\subset C$
On a $4 \notin X$ et $\{2\} \neq X$. D'où les possibilités pour l'ensemble X :
$\{1\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$

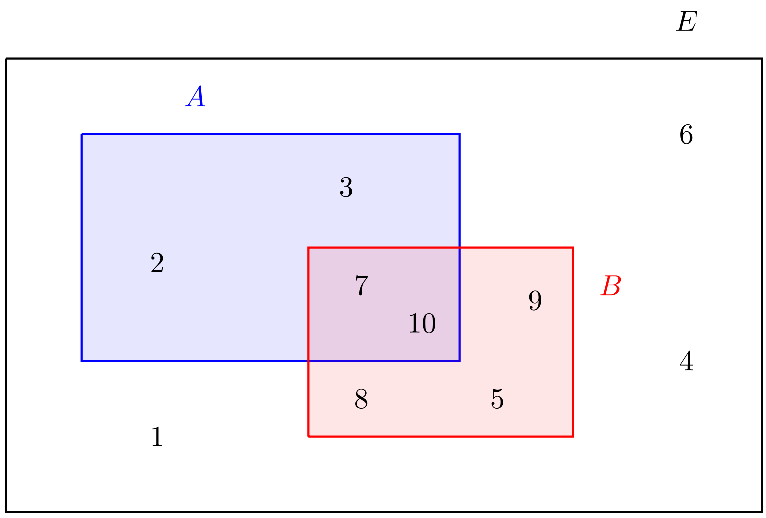
c) $X \subset A$ et $X \not\subset B$
Il suffit que 4 soit présent dans X. D'où les possibilités pour l'ensemble X :
$\{4\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$

d) $X \subset C$ et $X \not\subset B$
Il suffit que 4 soit présent dans X. D'où les possibilités pour l'ensemble X : $\{4\}$, $\{2, 4\}$

***Ex*-01-02**: *Soient* $A \subset E$ *et* $B \subset E$. *Quels sont les éléments de* A, B *et* E *si :*

$$A \cup B = \{2, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}, \quad C_E(A) = \{1, 4, 5, 6, 8, 9\}, \quad C_E(B) = \{1, 2, 3, 4, 6\}.$$

- Déterminer E :
  Comme $E = A \cup C_E(A)$ et que $A \subset A \cup B \subset E$, on a nécessairement que $E = C_E(A) \cup (A \cup B) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.
- Déterminer A et B :
  Comme $C_E(A) = \{1, 4, 5, 6, 8, 9\} = \{x \in E | x \notin A\}$ et $A \subset E$, on a donc $A = C_E(C_E(A))$ D'où $A = \{2, 3, 7, 10\}$. De manière similaire, on détermine que $B = C_E(C_E(B)) = \{5, 7, 8, 9, 10\}$.



Ex-01-03: *Soient* $A,\ B,\ C\ \subset E$. *Quels sont les éléments de* $A,\ B,\ C$ *et* E *sachant que :*

$C_E(A\cup B\cup C)=\{1,\ 8,\ 12\}$,

$C_E(B)=\{1,\ 2,\ 5,\ 6,\ 8,\ 10,\ 11,\ 12\}$,

$B\cap C=\emptyset$,

$A\cap C=\{5\}$,

$A\cup B=\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 9\}$,

$A\cup C=\{2,\ 3,\ 4, 5,\ 6,\ 10,\ 11\}$.

- On a que $E=(A\cup B\cup C)\cup C_E(A\cup B\cup C)$ et $A\cup B\cup C=(A\cup B)\cup(A\cup C)$. D'où

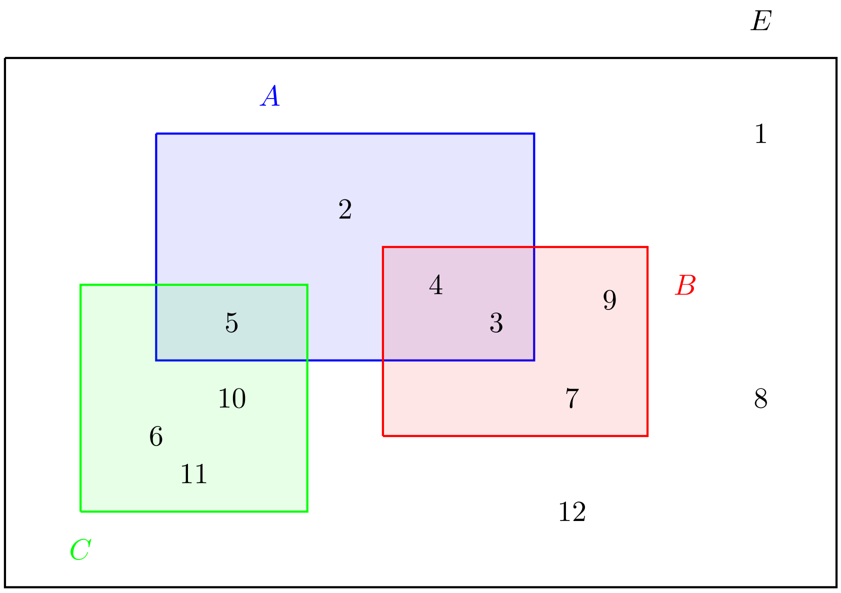
$$E\ =\ \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12\}.$$

- Comme $C_E(B)=\{1,\ 2,\ 5,\ 6,\ 8,\ 10,\ 11,\ 12\}$ et $B\subset E$, on a

$$B\ =\ \{3,\ 4,\ 7,\ 9\}.$$

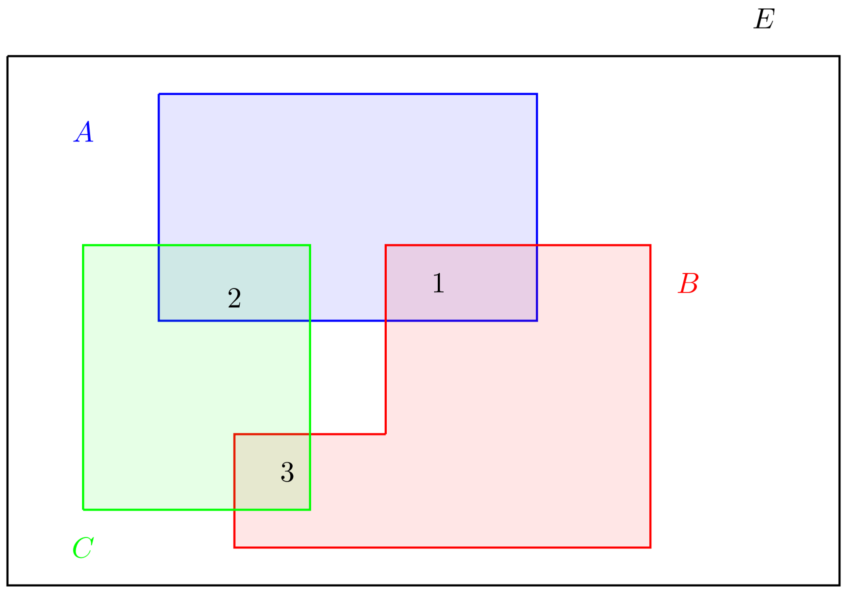
- Comme $A\cup B=\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 9\}$ et $B\ =\ \{3,\ 4,\ 7,\ 9\}$, on a que $\{2,5\}\subset A$.
  De plus, comme $A\cup C=\{2,\ 3,\ 4, 5,\ 6,\ 10,\ 11\}$, on déduit que $6, 10, 11\notin A$ (sinon ils se retrouveraient dans $A\cup B$.) Donc nécessairement $\{5, 6, 10, 11\}\subset C$.
  Finalement :
  - Comme $B\cap C=\emptyset$, on a $3, 4\notin C$ (puisqu'ils sont dans B)
  - Comme $A\cap C=\{5\}$, on a en particulier $2\notin C$ (comme il est dans A)

  Nécessairement, on conclut alors que $\{5, 6, 10, 11\}=C$. Puisque $A\cup C=\{2,\ 3,\ 4, 5,\ 6,\ 10,\ 11\}$ et $A\cap C=\{5\}$, on conclut que $A=\{2, 3, 4, 5\}$.



***Ex*-01-04**: *Trouver des ensembles* A, B, C *tels que :* $A \cap B \cap C = \emptyset$ *mais ni* $A \cap B$, *ni* $A \cap C$, *ni* $B \cap C$ *ne soient vides.*

Par exemple : $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$, $C = \{2, 3\}$



***Ex*-01-05**: *On considère les ensembles suivants :*

$$A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -x^2+x+12 > 0\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R}_+ \,|\, (x-1)^2 > 0\}, \quad C = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2-25 \leq 0\}.$$

En vous aidant d'une représentation sur l'axe réel, expliciter :

a) $A \cap B$

b) $A \cup B$

c) $A \cup (B \cap C)$

d) $A \cap (B \cup C)$

e) $C_C(A \cap B)$

f) $C_C(A) \cup B$

g) Peut-on trouver une formulation équivalente dans les cas c) et d) ?

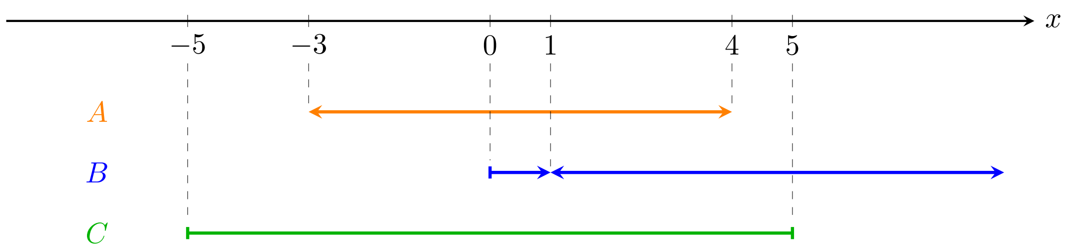
On commence par expliciter les ensembles A, B et C, puis les représenter sur un axe horizontal.

$A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -x^2 + x + 12 > 0\} \;=\; \{x \in \mathbb{R} \,|\, -(x+3)(x-4) > 0\} \;=]-3\,,\,4[$

$B = \{x \in \mathbb{R}_+ \,|\, (x-1)^2 > 0\} \;=\; \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$

$C = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - 25 \leq 0\} \;=\; [-5\,,\,5]$

$A \;=\;]-3\,,\,4[\qquad B \;=\; \mathbb{R}_+ \setminus \{1\} \qquad C \;=\; [-5\,,\,5]$



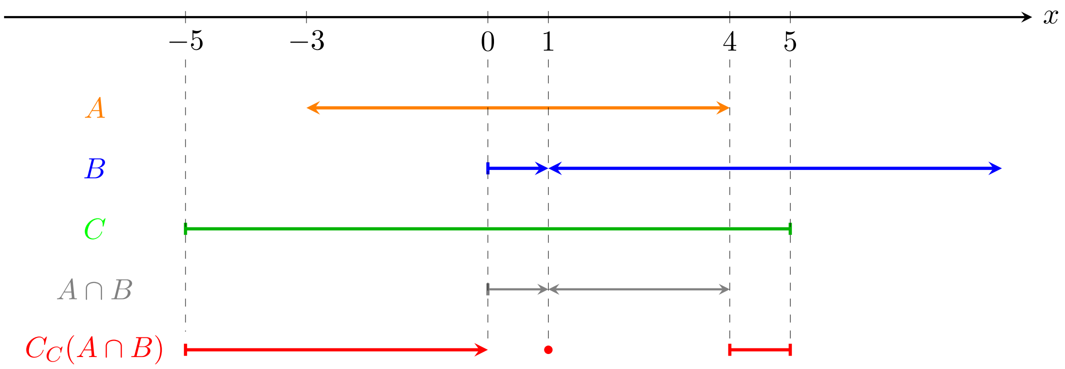
a) $A \cap B \;=\; [0\,,\,1[\,\cup\,]1\,,4[$

b) $A \cup B \;=\,]-3\,,\,+\infty[$

c) $B \cap C \;=\; [0\,,\,1[\,\cup\,]1\,,5]$ d'où $A \cup (B \cap C) \;=\,]-3\,,5]$

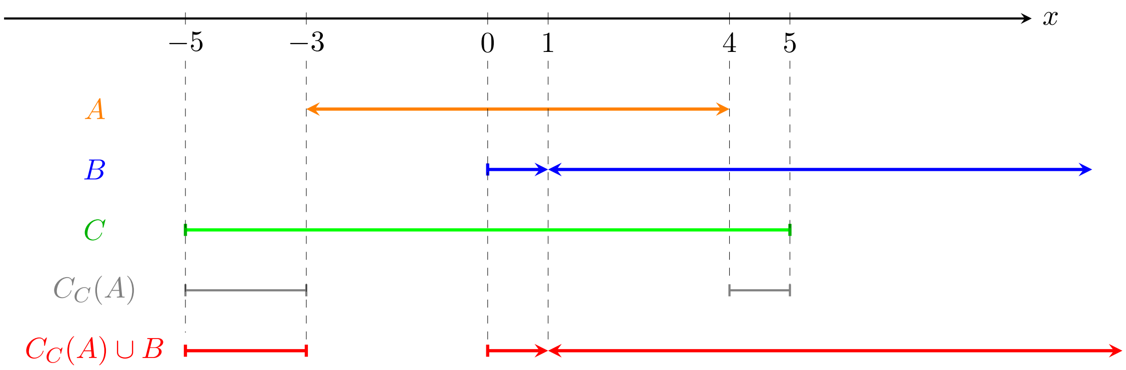
d) $B \cup C \;=\; [-5\,,\,+\infty[$ d'où $A \cap (B \cup C) \;=\,]-3\,,4[$

$A \;=\,]-3\,,\,4[\qquad B \;=\; \mathbb{R}_+ \setminus \{1\} \qquad C \;=\; [-5\,,\,5]$



e) $A \cap B \;=\; [0\,,\,1[\,\cup\,]1\,,4[$ d'où $C_C(A \cap B) \;=\; [-5\,,\,0[\,\cup\,\{1\}\;\cup\;[4\,,5]$

$A \;=\,]-3\,,\,4[\qquad B \;=\; \mathbb{R}_+ \setminus \{1\} \qquad C \;=\; [-5\,,\,5]$



f) $C_C(A) \;=\; [-5\,,\,-3]\;\cup\;[4\,,5]$ d'où $C_C(A) \cup B \;=\; [-5\,,\,-3]\;\cup\;[0\,,\,1[\,\cup\,]1\,,\,+\infty[$

g) $(A \cup B)\;\cap\;(A \cup C) \;=\; A \cup (B \cap C)$
$(A \cap B)\;\cup\;(A \cap C) \;=\; A \cap (B \cup C)$

Ex-01-06*:*

a) Soit D l'ensemble défini par

$$D = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\tfrac{\pi}{6} + 2k\pi, \tfrac{5\pi}{6} + 2k\pi\right[\,.$$

Représenter D sur la droite réelle, puis, en s'aidant de la représentation, calculer

$$D \cap \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[\text{ et } D \cap [-5\pi, -3\pi].$$

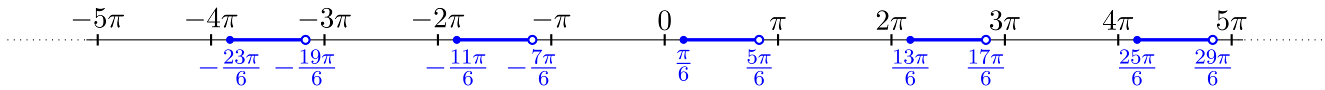
*b) (**Facultatif**) On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les ensembles*

$$A_n = \left]-\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}\right[, \quad B_n = \left]\tfrac{1}{2^n}, \tfrac{1}{2^{n-1}}\right].$$

Exprimer les ensembles ci-dessous sous forme compacte simplifiée :

$$\bigcup_{n\geq 1} A_n\,, \quad \bigcap_{n\geq 1} A_n\,, \quad \bigcup_{n\geq 1} B_n\,, \quad \bigcap_{n\geq 1} B_n\,,$$

a) Représentation sur la droite :



On voit facilement, à partir de l'image ci-dessus :

$$D \cap \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[= \left[\tfrac{\pi}{6}, \tfrac{\pi}{2}\right[$$

$$D \cap [-5\pi, -3\pi] = \left[-\tfrac{23\pi}{6}, -\tfrac{19\pi}{6}\right[$$

b) Remarquons pour commencer que $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$ et que $B_n \cap B_m = \emptyset$ pour tout $n \neq m$.

- Puisque $A_2 \subset A_1$, on a $A_1 \cup A_2 = A_1$. De même, puisque $A_k \subset A_1$ pour tout $k \geq 1$, on a que

$$A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n = A_1 \qquad \forall n$$

  Ainsi,

$$\bigcup_{n\geq 1} A_n = A_1 \cup A_2 \cup \cdots = A_1 =]-1, 1[$$

- Puisque $A_2 \subset A_1$, on a $A_1 \cap A_2 = A_2$. De même, puisque $A_{k+1} \subset A_k$ pour tout $k \geq 1$, on a que

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = A_n \qquad \forall n$$

  Ainsi,

$$\bigcap_{n\geq 1} A_n = \{0\}\,.$$

- Les ensembles B_1 et B_2 sont disjoints, mais

$$\begin{aligned} B_2 \cup B_1 &= \left]\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}\right] \cup \left]\tfrac{1}{2}, 1\right] = \left]\tfrac{1}{4}, 1\right] \\ B_3 \cup B_2 \cup B_1 &= \left]\tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{4}\right] \cup \left]\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}\right] \cup \left]\tfrac{1}{2}, 1\right] = \left]\tfrac{1}{8}, 1\right] \\ &\vdots \\ B_n \cup \cdots \cup B_2 \cup B_1 &= \left]\tfrac{1}{2^n}, 1\right] \end{aligned}$$

  Ainsi,

$$\bigcup_{n\geq 1} B_n =]0, 1]$$

- Puisque les B_n sont tous disjoints,

$$\bigcap_{n\geq 1} B_n = \emptyset$$