

Série 14: Exponentielles et logarithmes

Ex-14-01: Calculer sans machine les quantités suivantes :

a) $A = \log_2 \frac{1}{16}$

c) $C = \log_\pi 1$

e) $E = \log(\log 10^{10})$

b) $B = \log_4 2$

d) $D = \log_{1/2} 8$

f) $F = e^{2 \ln 5}$

a) On exprime l'argument du logarithme comme une exponentielle de même base :

$$A = \log_2 \frac{1}{16} = \log_2(2^{-4}) = -4 \log_2(2) = -4.$$

b) $B = \log_4 2 = \log_4 \sqrt{4} = \log_4(4^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} \log_4(4) = \frac{1}{2}.$

c) Le logarithme de 1 est nul quel que soit sa base : $C = \log_\pi 1 = \frac{\ln 1}{\ln \pi} = 0.$

d) $D = \log_{1/2} 8 = \log_{1/2} (\frac{1}{2})^{-3} = -3 \log_{1/2} (\frac{1}{2}) = -3.$

e) $E = \log(\log 10^{10}) = \log[10(\log 10)] = \log[10] = 1.$

f) On exprime l'argument de l'exponentielle comme un logarithme de même base :

$$F = e^{2 \ln 5} = e^{\ln(5^2)} = e^{\ln 25} = 25.$$

Ex-14-02: Exprimer les quantités suivantes à l'aide d'une seule fonction logarithme ou exponentielle :

a) $A = \log 15 - \log 6 + 3 \log 2$

b) $B = \sqrt{e^9} \cdot e^{2 - \ln 3} \cdot e^{-3/2}$

a)
$$\begin{aligned} A &= \log 15 - \log 6 + 3 \log 2 = \log 15 - \log 6 + \log(2^3) = \log(15 \cdot \frac{1}{6} \cdot 2^3) \\ &= \log(2 \cdot 10) = 1 + \log 2. \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} B &= \sqrt{e^9} \cdot e^{2 - \ln 3} \cdot e^{-3/2} = e^{9/2} \cdot e^{2 + \ln \frac{1}{3}} \cdot e^{-3/2} = e^{9/2} \cdot e^2 \cdot e^{\ln \frac{1}{3}} \cdot e^{-3/2} \\ &= \frac{1}{3} e^{9/2} \cdot e^{-3/2} \cdot e^2 = \frac{1}{3} e^{9/2 - 3/2 + 2} = \frac{1}{3} e^5. \end{aligned}$$

Ex-14-03: Résoudre les équations suivantes par rapport à $x \in \mathbb{R}$:

a) $e^{3x/2} - e^{-3x/2} = \frac{1}{2} (e^{x/2} + 5e^{-x/2})$

b) $e^{\sin x} - e^{-\sin x} = 2 (1 + e^{-\sin x})$

c) $3 + \log_2 (\frac{1}{2} - x) = \log_2 (\frac{x-9}{x+1})$

d) $\log_{1/2} (2x - 13 - \frac{15}{x}) - \frac{1}{2} = \log_{1/2} [2(x - 15)] + \frac{1}{2}$

a)
$$e^{3x/2} - e^{-3x/2} = \frac{1}{2} (e^{x/2} + 5e^{-x/2}), \quad D_{\text{def}} = \mathbb{R}.$$

On pose $y = e^{x/2}$, $y > 0$ et l'équation devient : $2(y^3 - y^{-3}) = y + 5y^{-1}$

$$\Leftrightarrow 2y^6 - y^4 - 5y^2 - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow 2z^3 - z^2 - 5z - 2 = 0,$$

avec $z = y^2 = e^x$, $z > 0$. $z = -1$ est une racine évidente :

$$(z+1)(2z^2-3z-2)=0 \Leftrightarrow (z+1)(z-2)(2z+1)=0.$$

La seule solution positive est $z=2$: $e^x=2 \Leftrightarrow x=\ln 2$.

b) $e^{\sin x} - e^{-\sin x} = 2(1 + e^{-\sin x})$, $D_{\text{def}} = \mathbb{R}$.

$$e^{\sin x} - e^{-\sin x} = 2(1 + e^{-\sin x}) \Leftrightarrow e^{\sin x} - 3e^{-\sin x} - 2 = 0,$$

on pose $y = e^{\sin x}$, $y > 0$ et l'équation devient : $y - 3y^{-1} - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow y^2 - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow (y-3)(y+1) = 0 \Leftrightarrow y = 3 \quad (y > 0).$$

$$y = 3 \Leftrightarrow e^{\sin x} = 3 \Leftrightarrow \sin x = \ln 3,$$

or $3 > e$ ($e \approx 2,718$) et la fonction $\ln$ est croissante, donc $\ln 3 > 1$,

l'équation $\sin x = \ln 3$ n'admet donc pas de solution.

c) $3 + \log_2\left(\frac{1}{2} - x\right) = \log_2\left(\frac{x-9}{x+1}\right)$.

$$D_{\text{def}} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} - x > 0 \text{ et } \frac{x-9}{x+1} > 0\right\} =]-\infty, -1[.$$

$$\log_2(2^3) + \log_2\left(\frac{1}{2} - x\right) - \log_2\left(\frac{x-9}{x+1}\right) = 0 \Leftrightarrow \log_2\left(2^3 \cdot \left(\frac{1}{2} - x\right) \cdot \frac{x+1}{x-9}\right) = \log_2 1$$

$$\Leftrightarrow 2^3 \cdot \left(\frac{1}{2} - x\right) \cdot \frac{x+1}{x-9} = 1 \Leftrightarrow 8x^2 + 5x - 13 = 0 \Leftrightarrow (8x+13)(x-1) = 0.$$

$x = 1 \notin D_{\text{def}}$, la seule solution est $x = -\frac{13}{8}$.

d) $\log_{1/2}\left(2x - 13 - \frac{15}{x}\right) - \frac{1}{2} = \log_{1/2}[2(x-15)] + \frac{1}{2}$.

$$D_{\text{def}} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 13 - \frac{15}{x} > 0 \text{ et } 2(x-15) > 0\right\} =]15, +\infty[.$$

$$\log_{1/2}\left(2x - 13 - \frac{15}{x}\right) - \log_{1/2}[2(x-15)] = 1$$

$$\Leftrightarrow \log_{1/2}\left(\frac{2x^2-13x-15}{2x(x-15)}\right) = \log_{1/2}\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{2x^2-13x-15}{2x(x-15)} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 15 = 0 \Leftrightarrow (x+5)(x-3) = 0$$

or $x = -5 \notin D_{\text{def}}$ et $x = 3 \notin D_{\text{def}}$, d'où $S = \emptyset$.

Ex-14-04: Résoudre les inéquations suivantes par rapport à $x \in \mathbb{R}$:

a) $\ln(2x - e^{-\ln x}) < 2 + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

b) $3^{x+4} - 1458 \leq 9^x$

Indication : $1458 = 27 \cdot 54$

c) $e^9 \cdot e^x > \left(e^{\sqrt{6-x}}\right)^2$

d) $\ln(x^2 \sqrt{e^{2x}}) > x + \ln(16x - 48)$

a) $\ln(2x - e^{-\ln x}) < 2 + \ln\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow \ln\left(2x - \frac{1}{x}\right) < 2 + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$.

$$D_{\text{def}} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0, \frac{1}{x} > 0 \text{ et } 2x - \frac{1}{x} > 0\right\} =]\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty[.$$

$$\ln\left(2x - \frac{1}{x}\right) < 2 + \ln\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{2x^2-1}{x}\right) < 2 + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow \ln(2x^2 - 1) + \ln\left(\frac{1}{x}\right) < 2 + \ln\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow \ln(2x^2 - 1) < 2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 1 < e^2 \Leftrightarrow x^2 < \frac{1+e^2}{2} \Leftrightarrow -\sqrt{\frac{1+e^2}{2}} < x < \sqrt{\frac{1+e^2}{2}}.$$

$$\text{D'où } S = \left] \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2(1+e^2)}}{2} \right[.$$

b) $3^{x+4} - 1458 \leq 9^x, \quad D_{\text{def}} = \mathbb{R}.$

$$3^{x+4} - 1458 \leq 9^x \Leftrightarrow (3^2)^x - 3^x \cdot 3^4 + 1458 \geq 0 \Leftrightarrow (3^x)^2 - 81 \cdot 3^x + 1458 \geq 0$$

En posant $y = 3^x, y > 0$, l'inéquation devient :

$$y^2 - 81y + 1458 \geq 0 \Leftrightarrow (y - 27)(y - 54) \geq 0 \Leftrightarrow y \leq 27 \text{ ou } y \geq 54.$$

- $y \leq 27 \Leftrightarrow 3^x \leq 27 \Leftrightarrow 3^x \leq 3^3 \Leftrightarrow x \leq 3$
- $y \geq 54 \Leftrightarrow 3^x \geq 54 \Leftrightarrow 3^x \geq 2 \cdot 3^3 \Leftrightarrow x \geq 3 + \log_3(2)$

car la fonction exponentielle de base 3 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\text{D'où } S =] - \infty, 3] \cup [3 + \log_3(2), +\infty[.$$

c) Domaine de définition : on doit imposer que $x \leq 6$, d'où $D_{\text{def}} =] - \infty, 6]$.

$$e^9 \cdot e^x > \left(e^{\sqrt{6-x}}\right)^2 \Leftrightarrow e^{9+x} > e^{2\sqrt{6-x}}$$

La fonction exponentielle étant strictement croissante :

$$\Rightarrow 9 + x > 2\sqrt{6-x}$$

$$\text{Condition de positivité : } 9 + x > 0 \Leftrightarrow x > -9$$

$$\text{Après élévation au carré, nous avons : } x^2 + 18x + 81 > 4(6-x) \Leftrightarrow$$

$$(x+3)(x+19) > 0 \Leftrightarrow x \in] - \infty; -19[\cup] -3; +\infty[$$

En intersection avec le domaine de définition et la condition de positivité, nous avons : $S =] -3; 6]$

d) Domaine de définition : on doit imposer que $x^2\sqrt{e^{2x}} > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ et $16x - 48 > 0 \Leftrightarrow x > 3$. D'où $D_{\text{def}} =]3, +\infty[$.

En utilisant les propriétés du logarithme :

$$\ln(x^2\sqrt{e^{2x}}) > x + \ln(16x - 48) \Leftrightarrow \ln(x^2) + \ln(\sqrt{e^{2x}}) > x + \ln(16x - 48)$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2) + x > x + \ln(16x - 48) \Leftrightarrow \ln(x^2) > \ln(16x - 48).$$

Comme le logarithme naturel est une fonction monotone croissante, on a :

$$x^2 > 16x - 48 \Leftrightarrow (x-4)(x-12) > 0 \Leftrightarrow x \in]\leftarrow; 4[\cup]12; \rightarrow[;$$

On obtient en intersection avec le domaine de définition : $S =]3; 4[\cup]12; \rightarrow[$.

Ex-14-05: Résoudre les inéquations suivantes par rapport à $x \in \mathbb{R}$:

a) $\log_a \frac{x-4}{x-6} \leq -1 + \log_a(2x) - 2 \log_a |x-6|$

(i) avec $a = 2$,

(ii) puis avec $a = \frac{1}{2}$.

b) $\log_a(4-x) + a \leq a \cdot \log_a(x+2) - 1$

- (i) avec $a = 2$,
(ii) puis avec $a = \frac{1}{2}$.

a) $\log_a \frac{x-4}{x-6} \leq -1 + \log_a(2x) - 2 \log_a |x-6|$.

$$D_{\text{def}} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x-6 \neq 0, \quad 2x > 0 \quad \text{et} \quad \frac{x-4}{x-6} > 0 \right\} =]0, 4[\cup]6, +\infty[.$$

$$\log_a \frac{x-4}{x-6} + 2 \log_a |x-6| + 1 \leq \log_a(2x)$$

$$\Leftrightarrow \log_a \frac{x-4}{x-6} + \log_a(x-6)^2 + \log_a(a) \leq \log_a(2x)$$

$$\Leftrightarrow \log_a[a(x-4)(x-6)] \leq \log_a(2x).$$

(i) La fonction logarithme de base $a = 2$ est strictement croissante :

$$\log_2[2(x-4)(x-6)] \leq \log_2(2x) \quad \Leftrightarrow \quad 2(x-4)(x-6) \leq 2x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 11x + 24 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-3)(x-8) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [3, 8].$$

$$\text{D'où} \quad S = [3, 4[\cup]6, 8].$$

(ii) La fonction logarithme de base $a = \frac{1}{2}$ est strictement décroissante :

$$\log_{1/2}[\frac{1}{2}(x-4)(x-6)] \leq \log_{1/2}(2x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(x-4)(x-6) \geq 2x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 14x + 24 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)(x-12) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty, 2] \cup [12, +\infty[. \quad \text{D'où} \quad S =]0, 2] \cup [12, +\infty[.$$

b) Ensemble de définition : les arguments du log doivent être positifs : $D_f =]-2; 4[$

$$\log_a(4-x) + a \leq a \cdot \log_a(x+2) - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \log_a \frac{(4-x)}{(x+2)^a} \leq -a - 1$$

(i) $\log_2 \frac{(4-x)}{(x+2)^2} \leq -3$

Le logarithme et la fonction puissance sont strictement monotones croissantes pour $a = 2$; on peut prendre l'exponentielle de base 2 de chaque membre :

$$\frac{(4-x)}{(x+2)^2} \leq 2^{-3} \quad \Leftrightarrow \quad 4-x \leq \frac{1}{8}(x+2)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 12x - 28 \geq 0$$

$$x \in]-\infty; -14] \cup [2; +\infty[= I_1; \quad S = I_1 \cap D_f = [2; 4[.$$

(ii) Le logarithme et la fonction puissance sont strictement monotones décroissantes pour $a = 1/2$; on peut prendre l'exponentielle de base 1/2 de chaque membre :

$$\frac{(4-x)}{(x+2)^{\frac{1}{2}}} \geq \frac{1}{2}^{\frac{-3}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad 4-x \geq \sqrt{8(x+2)} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 16x \geq 0$$

car $x < 4$, donc on a pu élever l'inégalité au carré puisque tous les facteurs sont positifs.

$$x \in]-\infty; 0] \cup [16; +\infty[= I_2; \quad S = I_2 \cap D_f =]-2; 0].$$

Ex-14-06: Calculer, là où elles existent, les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

$$a) \ a(x) = \tan(a^x),$$

$$b) \ b(x) = e^{1/\ln x},$$

$$c) \ c(x) = \ln(\ln x),$$

$$d) \ d(x) = \arcsin(e^x),$$

$$e) \ e(x) = x \cdot \sin(\ln x - \frac{\pi}{4}).$$

$$a) \ a(x) = \tan(a^x) = \tan(e^{x \ln a}) \Rightarrow a'(x) = \ln a e^{x \ln a} [1 + \tan^2(e^{x \ln a})]$$

$$= a^x \ln a [1 + \tan^2(a^x)],$$

$$b) \ b(x) = e^{1/\ln x} \Rightarrow b'(x) = (1/\ln x)' e^{1/\ln x} = -\frac{e^{1/\ln x}}{x \ln^2 x},$$

$$c) \ c(x) = \ln(\ln x) \Rightarrow c'(x) = (\ln x)' \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{x \ln x},$$

$$d) \ d(x) = \arcsin(e^x) \Rightarrow d'(x) = (e^x)' \frac{1}{\sqrt{1 - (e^x)^2}} = \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}},$$

$$e) \ e(x) = x \cdot \sin(\ln x - \frac{\pi}{4}) \Rightarrow e'(x) = \sin(\ln x - \frac{\pi}{4}) + x \cdot \frac{1}{x} \cdot \cos(\ln x - \frac{\pi}{4})$$

$$= \sin(\ln x - \frac{\pi}{4}) + \cos(\ln x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \sin(\ln x).$$