Analyse A Mise à Niveau, EPFL

Série 13: Logarithme naturel

Ex-13-01*: Exprimer les nombres suivants à l'aide de la fonction logarithme :*

a) $A = -1\,,$ *b)* $B = \frac{1}{2}\,,$ *c)* $C = 3\,.$

a) $A = -1 = -\ln e = \ln(e^{-1}) = \ln\left(\frac{1}{e}\right).$

b) $B = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ln e = \ln(e^{\frac{1}{2}}) = \ln(\sqrt{e}).$

c) $C = 3 = 3\ln e = \ln(e^3).$

Ex-13-02*: Exprimer les quantités suivantes de la façon la plus simple possible, à l'aide d'une seule fonction logarithme :*

a) $A = \ln 15 - \ln 6 + 3\ln 2\,,$ *b)* $B = \ln(3\cdot\sqrt{e}) + \ln\left(\frac{2\sqrt{2}}{9}\right) - \frac{1}{2}\ln 8\,.$

a) $A = \ln 15 - \ln 6 + 3\ln 2 = \ln 15 + \ln(6^{-1}) + \ln(2^3) = \ln\left(15\cdot\frac{1}{6}\cdot 2^3\right) = \ln(20)\,.$

b) $B = \ln(3\cdot\sqrt{e}) + \ln\left(\frac{2\sqrt{2}}{9}\right) - \frac{1}{2}\ln 8 = \ln(3) + \frac{1}{2}\ln(e) + \ln\left(2\sqrt{2}\right) - \ln(9) - \ln(\sqrt{8})$

$= \ln(3) + \frac{1}{2} + \ln\left(\sqrt{8}\right) - 2\ln(3) - \ln(\sqrt{8}) = \frac{1}{2} - \ln(3)\,.$

Ex-13-03*: Résoudre les équations suivantes par rapport à $x \in \mathbb{R}$:*

a) $3\ln 2 + \ln\left(\frac{1}{2} - x\right) = \ln\left(\frac{x-9}{x+1}\right)$

b) $\ln(\sin x) = 1 + \ln(\cos x)$

c) $\ln\left(2x - 13 - \frac{15}{x}\right) + \ln\sqrt{2} = \ln(2x - 30) - \ln\sqrt{2}$

a) $3\ln 2 + \ln\left(\frac{1}{2} - x\right) = \ln\left(\frac{x-9}{x+1}\right).$

$D_{\text{def}} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} - x > 0 \text{ et } \frac{x-9}{x+1} > 0\right\} = \left]-\infty\,, -1\right[\,.$

$\ln(2^3) + \ln\left(\frac{1}{2} - x\right) = \ln\left(\frac{x-9}{x+1}\right) \quad\Leftrightarrow\quad \ln\left[8\left(\frac{1}{2} - x\right)\right] = \ln\left(\frac{x-9}{x+1}\right)$

$\Leftrightarrow \quad 8\left(\frac{1}{2} - x\right) = \frac{x-9}{x+1} \quad\Leftrightarrow\quad 8x^2 + 5x - 13 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad (8x+13)(x-1) = 0\,.$

$x = 1 \notin D_{\text{def}}\,,$ la seule solution est $x = -\frac{13}{8}\,.$

b) $\ln(\sin x) = 1 + \ln(\cos x)\,.$

$D_{\text{def}} = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x > 0 \text{ et } \cos x > 0\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]2k\pi\,, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[\,.$

$\ln(\sin x) - \ln(\cos x) = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \ln\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \ln(\tan x) = \ln e$

$\Leftrightarrow \quad \tan x = e \quad\Leftrightarrow\quad x = \arctan e + k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$

Les seules solutions acceptables sont celles qui appartiennent au premier quadrant : $x = \arctan e + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$

c) $\ln\left(2x-13-\frac{15}{x}\right)+\ln\sqrt{2}=\ln(2x-30)-\ln\sqrt{2}$.

$D_{\text{def}}=\left\{x\in\mathbb{R}\mid 2x-13-\frac{15}{x}>0 \text{ et } 2(x-15)>0\right\} =]15\,,+\infty[$.

$\ln\left(2x-13-\frac{15}{x}\right)+2\ln\sqrt{2}=\ln[2(x-15)]$

$\Leftrightarrow \quad \ln\left(2x-13-\frac{15}{x}\right)+\ln 2=\ln 2+\ln(x-15)$

$\Leftrightarrow \quad \ln\left(2x-13-\frac{15}{x}\right)=\ln(x-15)$

$\Leftrightarrow \quad 2x-13-\frac{15}{x}=x-15 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+2x-15=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+5)(x-3)=0$.

Or $\quad x=-5\notin D_{\text{def}} \quad$ et $\quad x=3\notin D_{\text{def}}$, $\quad$ d'où $\quad S=\emptyset$.

Ex-13-04*: Résoudre les trois inéquations suivantes par rapport à $x\in\mathbb{R}$:*

a) $\ln\sqrt{3-x}+\ln\sqrt{x+1}\leq\ln\sqrt{10-6x}$

b) $\ln\left(2x-\frac{1}{x}\right)<2+\ln\left(\frac{1}{x}\right)$

c) $\ln\frac{x-4}{x-6}\leq-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{4}\right)+\ln(2x)-2\ln|x-6|$

a) $\ln\sqrt{3-x}+\ln\sqrt{x+1}\leq\ln\sqrt{10-6x}$.

$D_{\text{def}}=\{x\in\mathbb{R}\mid 3-x>0,\ x+1>0 \text{ et } 10-6x>0\} =]-1\,,\frac{5}{3}[$.

Sur D_{def}, $\quad \ln\sqrt{3-x}=\frac{1}{2}\ln(3-x)$, $\quad \ln\sqrt{x+1}=\frac{1}{2}\ln(x+1)$

et $\ln\sqrt{10-6x}=\frac{1}{2}\ln(10-6x)$. $\quad$ L'inéquation s'écrit alors

$\ln(3-x)+\ln(x+1)\leq\ln(10-6x) \quad \Leftrightarrow \quad \ln[(3-x)(x+1)]\leq\ln(10-6x)$

or la fonction logarithme est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$\ln[(3-x)(x+1)]\leq\ln(10-6x) \quad \Leftrightarrow \quad (3-x)(x+1)\leq 10-6x$

$\Leftrightarrow \quad x^2-8x+7\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)(x-7)\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\leq 1$ ou $x\geq 7$.

D'où $\quad S=(]-\infty,1]\cup[7,+\infty[)\cap D_{\text{def}} =]-1\,,1]$.

b) $\ln\left(2x-\frac{1}{x}\right)<2+\ln\left(\frac{1}{x}\right)$.

$D_{\text{def}}=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq 0,\ \frac{1}{x}>0 \text{ et } 2x-\frac{1}{x}>0\right\} =]\frac{\sqrt{2}}{2}\,,+\infty[$.

$\ln\left(2x-\frac{1}{x}\right)<2+\ln\left(\frac{1}{x}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{2x^2-1}{x}\right)<2+\ln\left(\frac{1}{x}\right)$

$\Leftrightarrow \quad \ln\left(2x^2-1\right)+\ln\left(\frac{1}{x}\right)<2+\ln\left(\frac{1}{x}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(2x^2-1\right)<2$

$\Leftrightarrow \quad \ln\left(2x^2-1\right)<\ln(e^2) \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2-1<e^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2<\frac{1+e^2}{2}$

$\Leftrightarrow \quad -\sqrt{\frac{1+e^2}{2}}<x<\sqrt{\frac{1+e^2}{2}}$.

D'où $S=\left]-\sqrt{\frac{1+e^2}{2}},\sqrt{\frac{1+e^2}{2}}\right[\cap D_{\text{def}}=\left]\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\frac{\sqrt{2(1+e^2)}}{2}\right[$.

c) $\ln\frac{x-4}{x-6}\leq-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{4}\right)+\ln(2x)-2\ln|x-6|$.

$$D_{\text{def}}=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x-6\neq 0,\ 2x>0 \text{ et } \frac{x-4}{x-6}>0\right\} =]0\,,4[\,\cup\,]6\,,+\infty[.$$

$$\begin{aligned}
& \ln\frac{x-4}{x-6} \le -\frac{1}{2}\,\ln\left(\frac{1}{4}\right)+\ln(2x)-2\,\ln|x-6| \\
\Leftrightarrow\quad & \ln\frac{x-4}{x-6} \le \frac{1}{2}\,\ln(4)+\ln(2)+\ln(x)-\ln(x-6)^2 \\
\Leftrightarrow\quad & \ln\frac{x-4}{x-6} \le 2\,\ln(2)+\ln(x)-\ln(x-6)^2 \\
\Leftrightarrow\quad & \ln\frac{x-4}{x-6}+\ln(x-6)^2 \le 2\,\ln(2)+\ln(x) \\
\Leftrightarrow\quad & \ln[\,(x-4)\,(x-6)\,] \le \ln(4x) \\
\Leftrightarrow\quad & (x-4)\,(x-6) \le 4x \quad (\text{car } \ln \text{ est strictement croissante}) \\
\Leftrightarrow\quad & x^2-14x+24 \le 0 \\
\Leftrightarrow\quad & (x-2)\,(x-12) \le 0\,,
\end{aligned}$$

D'où $\quad S=[2,12]\cap D_{\text{def}}=\ [\,2\,,\,4\,[\,\cup\,]\,6\,,\,12\,]\,.$

> ***Ex***-13-05: *Résoudre dans* $\mathbb{R}^2$ *le système suivant :*
>
> $$\begin{cases} \ln(6-x)-\ln y=\ln\left(\frac{6-x}{4x}\right)+3\ln 2 \\ \ln(2)+\ln(4y^2+1)-\ln(2y+3)\le \ln(x^2-2) \end{cases}$$

- Domaine de définition du système

$$D_{\text{def}}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 6-x>0\,,\quad y>0\,,\quad \frac{6-x}{4x}>0\,,\quad 2y+3>0 \ \text{ et } \ x^2-2>0\right\},$$

$$D_{\text{def}}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in\left]\sqrt{2}\,,\,6\right[\ \text{ et } \ y>0\right\},$$

i) On résout tout d'abord la première équation par rapport x en fonction de y :
$\ln(6-x)-\ln y=\ln\left(\frac{6-x}{4x}\right)+3\ln 2$

$\Leftrightarrow\quad \ln(6-x)-\ln y=\ln(6-x)-\ln(4x)+\ln(2^3)\quad\Leftrightarrow\quad \ln(4x)=\ln y+\ln 8$

$\Leftrightarrow\quad \ln(4x)=\ln(8y)\quad\Leftrightarrow\quad x=2y\,,\quad$ avec $\ x\in\,]\,\sqrt{2}\,,\,6\,[\ $ et $\ y\in\left]\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\,3\,\right[.$

ii) Sur D_{def}, le système est donc équivalent à

$$\begin{cases} x=2y \\ \ln(2)+\ln(4y^2+1)-\ln(2y+3)\le\ln(x^2-2) \end{cases}$$

On remplace x par $2y$ et on résout à présent l'inéquation par rapport à $y\in\left]\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\,3\,\right[$:

$$\begin{aligned}
& \ln(2)+\ln(4y^2+1)-\ln(2y+3)\le\ln\left[(2y)^2-2\right] \\
\Leftrightarrow\quad & \ln(2)+\ln(4y^2+1)\le\ln(2y+3)+\ln(2)+\ln(2y^2-1) \\
\Leftrightarrow\quad & \ln(4y^2+1)\le\ln(2y+3)+\ln(2y^2-1) \\
\Leftrightarrow\quad & \ln(4y^2+1)\le\ln\left[(2y+3)\,(2y^2-1)\right] \\
\Leftrightarrow\quad & 4y^2+1\le(2y+3)\,(2y^2-1)\quad(\text{car } \ln \text{ est strictement croissante}) \\
\Leftrightarrow\quad & 2y^3+y^2-y-2\ge 0 \\
\Leftrightarrow\quad & (y-1)\,(2y^2+3y+2)\ge 0 \\
\Leftrightarrow\quad & y-1\ge 0\,.
\end{aligned}$$

On a donc $y\ge 1$ et $y\in\left]\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\,3\,\right[$, d'où $y\in\,[\,1\,,\,3\,[$. D'où

$$S=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=2y \ \text{ et } \ y\in\,[\,1\,,\,3\,[\ \right\}$$

.

L'ensemble solution est le segment de droite d'extrémités $A(2\,,\,1)$ et $B(6\,,\,3)$ (non compris).

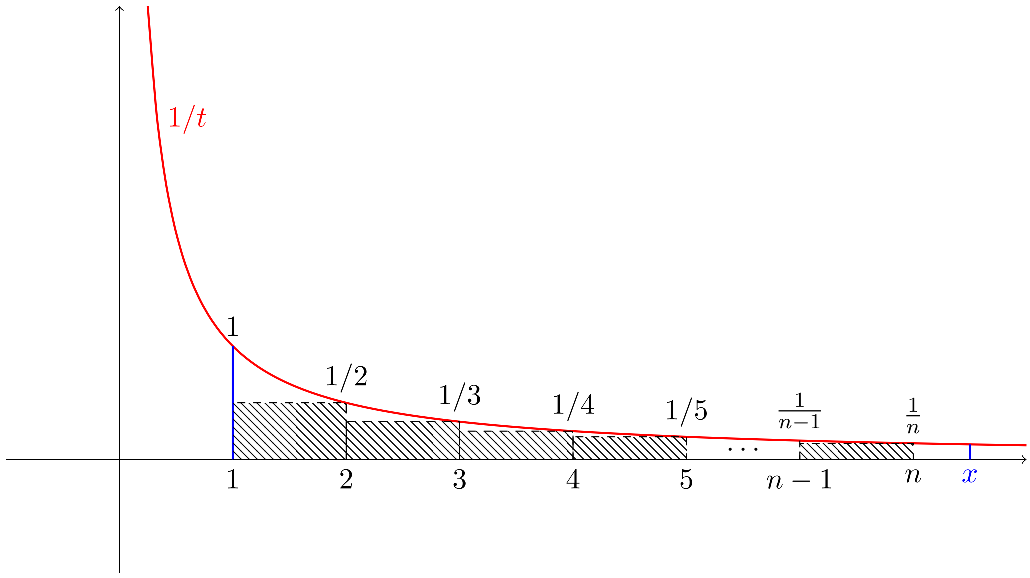
Ex-13-06*:*
En utilisant l'interprétation géométrique de $\ln(x)$*, démontrer que*

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty.$$

Indication : On pourra utiliser que la somme

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n}\right) = +\infty.$$

On utilise le fait que $\ln(x)$ représente l'aire comprise sous la courbe $1/t$ entre 1 et x. Pour $x > 1$, on prend $n = E(x) \in \mathbb{N}$ comme le plus grand entier plus petit ou égal à x et on construit les rectangles suivants sous la courbe $1/t$.



Chaque rectangle est de longueur 1 et de hauteur $1/n$. Par conséquent, l'aire hachurée qui est la somme des aires des rectangles vaut

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{E(x)}$$

et est plus petite que l'aire comprise sous la courbe $1/t$ entre 1 et x et qui vaut $\ln(x)$.

Par conséquent, on a

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{E(x)} \leq \ln(x).$$

On observe à gauche la série harmonique que l'on sait être divergente lorsque $E(x) \to +\infty$. Or, si $x \to +\infty$, alors forcément on a $n = E(x) \to +\infty$ et donc

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{E(x)}\right) = \lim_{E(x)\to+\infty} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{E(x)}\right) = +\infty,$$

Par conséquent, puisque

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{E(x)} \leq \ln(x).$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{E(x)}\right) = +\infty,$$

par le théorème du gendarme, on a nécessairement que

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty.$$