Série 12: Polynômes

Ex-12-01: *Sans effectuer la division, donner pour les cas suivants les restes de la division de $P(x)$ par $Q(x)$. Puis à l'aide du schéma de Hörner, effectuer la division euclidienne de $P(x)$ par $Q(x)$.*

a) $P(x) = -x^3 + 2x^2 - 3x + 1 \quad Q(x) = x + 5$

b) $P(x) = (x+1)^5 \quad Q(x) = x - 1$

c) $P(x) = x^2 + 1 \quad Q(x) = 2x + 1$

Utiliser le schéma de Hörner.

a) $P(x) = -x^3 + 2x^2 - 3x + 1 \quad Q(x) = x + 5$
Le reste est donné par $P(-5) = 191$.

	-1	2	-3	1
$x_0 = -5$		5	-35	190
	-1	7	-38	191

Ainsi

$$P(x) = (-x^2 + 7x - 38)(x+5) + 191 = (-x^2 + 7x - 38)Q(x) + P(-5)\,.$$

b) $P(x) = (x+1)^5 \quad Q(x) = x - 1$
Le reste est donné par $P(1) = 32$.
Développons le binôme de Newton :

$$\begin{aligned}(x+1)^5 &= C_5^0(1)^0x^5 + C_5^1(1)^1x^4 + C_5^2(1)^2x^3 + C_5^3(1)^3x^2 \\ &\quad + C_5^4(1)^4x^1 + C_5^5(1)^5x^0 \\ &= x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1\,,\end{aligned}$$

	1	5	10	10	5	1
$x_0 = 1$		1	6	16	26	31
	1	6	16	26	31	32

Ainsi

$$P(x) = (x^4 + 6x^3 + 16x^2 + 26x + 31)(x-1) + 32 = (x^4 + 6x^3 + 16x^2 + 26x + 31)Q(x) + P(1)\,.$$

c) $P(x) = x^2 + 1 \quad Q(x) = 2x + 1$
Le reste est donnée par $P(-0.5) = \frac{5}{4}$.
Remarquons que $Q(x)$ n'est pas unitaire. La division par un monôme unitaire $x - x_0 = \frac{a}{a}(x - x_0)$ $(a \neq 0)$ s'écrit aussi $P(x) = F(x)(x - x_0) + P(x_0) = \frac{1}{a}F(x)(ax - ax_0) + P(x_0)$. Il suffit donc d'écrire $Q(x) = 2(x + \frac{1}{2})$ (donc $a = 2$ et $x_0 = -\frac{1}{2}$) et d'effectuer la division de $P(x)$ par $x + \frac{1}{2}$:

	1	0	1
$x_0 = -\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$

Ainsi

$$P(x) = (x - \tfrac{1}{2})(x + \tfrac{1}{2}) + \tfrac{5}{4} = \tfrac{1}{2}(x - \tfrac{1}{2})(2x+1) + P(-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{4}(2x-1)Q(x) + P(-\tfrac{1}{2})\,.$$

Ex-12-02*:*

a) Déterminer $a \in \mathbb{R}$ *pour que* $x^4 - a^2x + 3 - a$ *admette 4 comme reste après division par* $x - 3$ *et 24 comme reste après division par* $x + 1$ *;*

b) Trouver un polynôme réel $P(x)$ *du troisième degré admettant 5 comme racine double,* -5 *comme reste de la division par* $x + 1$*, et tel que* $x - 2$ *divise* $P(x)$*.*

a) Utilisez les propriétés des polynômes.

- Le reste de la division de P par $(x-3)$ est égal à $P(3)$;
- Le reste de la division de P par $(x+1)$ est égal à $P(-1)$.

Soit $P(x) = x^4 - a^2x + 3 - a$.

- Le reste de la division de P par $(x-3)$ est égal à $P(3)$.

$$P(3) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 81 - 3a^2 + 3 - a = 4 \quad \Leftrightarrow \quad (a-5)\,(-3a-16) = 0\,.$$

- Le reste de la division de P par $(x+1)$ est égal à $P(-1)$.

$$P(-1) = 24 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + a^2 + 3 - a = 24 \quad \Leftrightarrow \quad (a-5)\,(a+4) = 0\,.$$

Les deux conditions sont réunies simultanément si et seulement si $a = 5$.

b) Utilisez les propriétés des polynômes.

Le polynôme P est du troisième degré, il admet 5 comme racine double et il est divisible par $(x-2)$, donc il s'écrit :

$$P(x) = a\,(x-5)^2\,(x-2)\,.$$

De plus le reste de la division de P par $x+1$ est égal à -5 :

$$P(-1) = -5 \quad \Leftrightarrow \quad -108\,a = -5 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{5}{108} \quad \Rightarrow$$

$$P(x) = \frac{5}{108}\,(x-5)^2\,(x-2)\,.$$

Ex-12-03*: Sans utiliser les nombres complexes, décomposer les polynômes suivants en facteurs irréductibles dans* $\mathbb{R}[x]$*.*

a) $P(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$

b) $Q(x) = 5x^6 - 21x^4 + 16$

c) $R(x) = x^5 - 2x^3 - 2x^2 - 3x - 2$.

Chercher des racines évidentes et factoriser.

Les facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[x]$ sont soit du premier degré, soit du second degré avec discriminant négatif.

a) On remarque que la somme des coefficients est nulle. $x = 1$ est donc un zéro de $P(x)$: $P(1) = 0$. $P(x)$ est donc divisible par $x - 1$:

$$P(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1 = (x-1)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\,.$$

Les coefficients inconnus se déduisent par identification : α , puis β et enfin γ .

$$P(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1 = (x-1)(2x^2 + 3x + 1) .$$

Le facteur $(2x^2 + 3x + 1)$ admet $x = -1$ comme racine évidente $(2 - 3 + 1 = 0)$:

$$2x^2 + 3x + 1 = (x+1)(2x+1) .$$

Remarque : on peut toujours se ramener au calcul du discriminant.
Ainsi,

$$P(x) = (x-1)(x+1)(2x+1) .$$

b) On remarque que les puissances sont toutes paires.
Posons donc $y = x^2$:

$$Q(x) = 5y^3 - 21y^2 + 16 .$$

La somme des coefficients est nulle. $y = 1$ annule donc $Q(x)$ et $Q(x)$ est divisible par $y - 1$:

$$Q(x) = 5y^3 - 21y^2 + 16 = (y-1)(\alpha y^2 + \beta y + \gamma) .$$

Les coefficients inconnus se déduisent par identification : α , puis β et enfin γ .

$$Q(x) = 5y^3 - 21y^2 + 16 = (y-1)(5y^2 - 16y - 16) .$$

Le facteur $(5y^2 - 16y - 16)$ admet $y = 4$ comme racine $(5 \cdot 16 - 16 \cdot 4 - 16 = 0)$:

$$5y^2 - 16y - 16 = (y-4)(5y+4) .$$

Remarque : $\Delta' = 8^2 + 5 \cdot 16 = 2^2 4^2 + 5 \cdot 4^2 = 4^2 3^2$.
Ainsi,

$$Q(x) = (y-1)(y-4)(5y+4) = (x^2-1)(x^2-4)(5x^2+4) = (x+1)(x-1)(x+2)(x-2)(5x^2+4) ,$$

$5x^2 + 4$ étant irréductible.

c) On remarque $x = -1$ est un zéro de $R(x)$: $R(-1) = 0$. $R(x)$ est donc divisible par $x + 1$:

$$R(x) = x^5 - 2x^3 - 2x^2 - 3x - 2 = (x+1)(x^4 - x^3 - x^2 - x - 2) .$$

Le facteur $(x^4 - x^3 - x^2 - x - 2)$ admet à nouveau $x = -1$ comme racine évidente :

$$x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 = (x+1)(x^3 - 2x^2 + x - 2) .$$

Le facteur $(x^3 - 2x^2 + x - 2)$ admet $x = 2$ comme racine évidente :

$$x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x-2)(x^2+1) .$$

$x^2 + 1$ est irréductible.
Ainsi,

$$R(x) = (x+1)^2(x-2)(x^2+1) .$$

Ex-12-04*: Décomposer les polynômes suivants en facteurs irréductibles dans* $\mathbb{C}[x]$.

a) $A(x) = x^3 - x^2 + 2x - 2$,

b) $B(x) = x^4 - 1$,

c) $C(x) = x^4 + 4$.

Utilisez les propriétés connues sur la décomposition des polynômes.

a) Pour ce polynôme, on devine immédiatement la racine $x = 1$ et les deux autres se calculent sans difficulté :

$A(x) = (x-1)\,(x+i\sqrt{2})\,(x-i\sqrt{2})\,,$

b) Pour ce polynôme, on a immédiatement $x^4 - 1 = (x^2+1)(x^2-1)$, ce qui nous donne après calcul :

$B(x) = (x-1)\,(x+1)\,(x-i)\,(x+i)\,,$

c) Les racines complexes de $C(x) = x^4 + 4$ sont les racines quatrièmes de -4.

$$x^4 + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 = [4\,,\, \pi + 2k\pi] \quad \Leftrightarrow \quad x = [\sqrt{2}\,,\, \tfrac{\pi}{4} + k\,\tfrac{\pi}{2}]\,, \quad k = 0\,,1\,,2\,,3\,.$$

$$x_0 = 1+i\,, \quad x_1 = -1+i\,, \quad x_2 = -1-i\,, \quad x_3 = 1-i\,.$$

D'où la décomposition de $C(x)$ dans $\mathbb{C}[x]$:

$$C(x) = (x-1-i)\,(x+1-i)\,(x+1+i)\,(x-1+i)\,.$$

Ex-12-05*: Décomposer les polynômes suivants en facteurs irréductibles dans* $\mathbb{R}[x]$.

a) $A(x) \;=\; x^4 + 1\,,$

b) $B(x) \;=\; x^{12} - x^8 - x^4 + 1\,.$

Utilisez les propriétés connues sur la décomposition des polynômes.
Il faut utiliser la décomposition dans les complexes.

a) On détermine les quatre racines complexes de $A(x) = x^4 + 1$:

$$x^4 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 = [1\,,\, \pi + 2k\pi] \quad \Leftrightarrow \quad x = [1\,,\, \tfrac{\pi}{4} + k\,\tfrac{\pi}{2}]\,, \quad k = 0\,,1\,,2\,,3\,.$$

$$x_0 = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,(1+i)\,, \quad x_1 = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,(-1+i)\,, \quad x_2 = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,(-1-i)\,, \quad x_3 = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,(1-i)\,.$$

On regroupe les racines par paires de racines complexes conjuguées :

$$(x-x_0)\,(x-x_3) \;=\; x^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(x_0)\,x + |x_0|^2 \;=\; x^2 - \sqrt{2}\,x + 1\,.$$

$$(x-x_1)\,(x-x_2) \;=\; x^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(x_1)\,x + |x_1|^2 \;=\; x^2 + \sqrt{2}\,x + 1\,.$$

D'où la décomposition de $A(x)$ dans $\mathbb{R}[x]$:

$$A(x) = (x^2 - \sqrt{2}\,x + 1)\,(x^2 + \sqrt{2}\,x + 1)\,.$$

b) En posant $z = x^4$, on transforme le polynôme $B(x)$ en un polynôme du troisième degré en z que l'on peut factoriser en devinant la première racine.

$$x^{12} - x^8 - x^4 + 1 \;=\; z^3 - z^2 - z + 1 \;=\; (z-1)\,(z^2-1) \;=\; (z-1)^2\,(z+1)$$

D'où : $\quad B(x) \;=\; (x^4-1)^2\,(x^4+1)\,.$

Le polynôme $x^4 - 1$ se décompose facilement en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[x]$:

$$x^4 - 1 \;=\; (x^2-1)\,(x^2+1) \;=\; (x+1)\,(x-1)\,(x^2+1)\,.$$

La décomposition du polynôme $x^4 + 1$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[x]$ a déjà été faite dans l'exercice précédent.

$$x^4 + 1 \;=\; (x^2 - \sqrt{2}\,x + 1)\,(x^2 + \sqrt{2}\,x + 1)\,.$$

En conclusion, la décomposition de B en irréductibles s'écrit :

$$B(x) \;=\; (x+1)^2\,(x-1)^2\,(x^2+1)^2\,(x^2 + \sqrt{2}\,x + 1)\,(x^2 - \sqrt{2}\,x + 1)\,.$$

Ex-12-06*: Décomposer le polynôme P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[x]$, sachant que $x = 2 - i$ est une racine de P.*

$$P(x) \;=\; 3x^4 + 2x^3 - 46x^2 + 90x - 25\,.$$

Il faut trouver un produit de polynômes du premier et du deuxième degré , ces derniers à discriminants négatifs.

Utilisez le fait qu'une racine complexe d'un polynôme apparaît toujours avec son conjugué dans la décomposition d'un polynôme à coefficients réels.

Le polynôme P est à coefficients réels, donc si $2 - i$ est une racine de P alors son conjugué $2 + i$ est aussi une racine de P.

Après divisions euclidiennes, on obtient :

$$P(x) = (x - 2 + i)\,(x - 2 - i)\,(3x^2 + 14x - 5) = (x^2 - 4x + 5)\,(3x^2 + 14x - 5)\,.$$

Le polynôme $(3x^2 + 14x - 5)$ est réductible dans $\mathbb{R}[x]$, on cherche ses racines à l'aide du discriminant et on en déduit la décomposition de $P(x)$ dans $\mathbb{R}[x]$:

$$P(x) = (3x-1)\,(x+5)\,(x^2 - 4x + 5)\,.$$

Ex-12-07*:*

a) Montrer les formules de Viète pour un polynôme de degré 3 : soit $P_3(z) = az^3 + bz^2 + cz + d, a, b, c, d \in \mathbb{C}, a \neq 0$, soient $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ les racines de P. Alors On a

$$z_1 + z_2 + z_3 = \frac{-b}{a}, \quad z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3 = \frac{c}{a}, \quad z_1z_2z_3 = \frac{-d}{a}.$$

Indication : écrire $P_3(z) = a(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)$ et développer l'expression.

b) Déterminer les polynômes P_3 du troisième degré vérifiant les quatre conditions suivantes :

i) $P_3(1) = 0$,

ii) le reste de la division de P_3 par $z-i$ est égal à i - 1,

iii) le produit des racines de P_3 vaut 1 + i,

iv) la somme des racines non réelles de P_3 est égale à 1 + i.

Indication : séparer la discussion selon que P_3 a deux racines non réelles ou une seule.

a) En développant l'égalité on a

$$P_3(z) = a(z^3 - (z_1+z_2+z_3)z^2 + (z_1z_2+z_2z_3+z_1z_3)z - z_1z_2z_3).$$

Puisque $P_3(z) = az^3+bz^2+cz+d = a\left(z^3+\frac{b}{a}z^2+\frac{c}{a}z+\frac{d}{a}\right)$, on a forcément

$$-(z_1+z_2+z_3) = \frac{b}{a}, \quad z_1z_2+z_2z_3+z_1z_3 = \frac{c}{a}, \quad -z_1z_2z_3 = \frac{d}{a}$$

d'où le résultat.

b) La condition i) implique $P_3(z) = (z-1)P_2(z)$;

La condition iv) implique :

- Si P_3 possède deux racines non réelles z_1 et z_2, les conditions iii) et iv) nous donnent :

  $1 \cdot z_1z_2 = 1+i$; $z_1+z_2 = 1+i \quad \Rightarrow \quad P_2(z) = k(z^2-(1+i)z+(1+i))$

  $P_3(z) = k(z-1)(z^2-(1+i)z+(1+i))$ et la condition ii) nous donne :

  $P_3(i) = i-1$

  $\Leftrightarrow i-1 = k(i-1)(-1-i+1+1+i)$ d'ou $k=1$

  $P_3(z) = (z-1)(z^2-(1+i)z+(1+i)) = z^3-(2+i)z^2+2(1+i)z-(1+i)$

- Si P_3 ne possède qu'une racine non réelle $z = 1+i$ (de la condition iv))

  $P_2(z) = k(z-(1+i))(z-a)$ et la condition ii) nous donne : $P_3(i) = i-1$

  $\Leftrightarrow i-1 = k(i-1)(-1)(i-a)$ d'ou $k(a-i) = 1$

  La condition iii) implique : $1 \cdot (1+i) \cdot a = (1+i) \quad \Rightarrow \quad a = 1$

  On a alors : $k = \dfrac{1}{1-i} = \dfrac{1}{2}(1+i)$

$$P_3(z) = \frac{1}{2}(1+i)(z-1)^2(z-(1+i)) = \frac{1}{2}(1+i)z^3-(1+2i)z^2+\frac{1}{2}(1+5i)z-i.$$