Analyse A Mise à Niveau, EPFL

Série 11: Nombres complexes

***Ex*-11-01**: *Trouver le module et un argument de :*

a) $z = 5 + 12i$;

b) $z = \sqrt{3} + i$;

c) $z = \dfrac{1 + i\tan\alpha}{1 - i\tan\alpha}$.

a) $z = 5 + 12i \Rightarrow |z| = \sqrt{25 + 144} = 13$, et $\cos\varphi = \dfrac{5}{13}$; $\sin\varphi = \dfrac{12}{13}$; On peut donc prendre $\varphi = \arccos\left(\frac{5}{13}\right)$.

b) $z = \sqrt{3} + i \Rightarrow |z| = 2$; $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$;

c)

$$z = \frac{1 + i\tan\alpha}{1 - i\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\alpha - i\sin\alpha} = \frac{(\cos\alpha + i\sin\alpha)^2}{(\cos\alpha - i\sin\alpha)(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha\,,$$

d'où $|z| = 1$ et $\varphi = 2\alpha$.

***Ex*-11-02**: *Mettre sous la forme $[r;\varphi]$ les nombres complexes suivants :*

a) $z = -2$;

b) $z = 7i - \dfrac{3}{i}$;

c) $z = -1 + i$;

d) $z = \sqrt{3} + i$;

e) $z = \dfrac{1}{1 - i}$;

f) $z = -3\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

a) $z = -2 = [2;\pi]$;

b) $z = 7i - \dfrac{3}{i} = 7i + 3i = 10i = \left[10;\dfrac{\pi}{2}\right]$;

c) $z = -1 + i = \left[\sqrt{2};\dfrac{3\pi}{4}\right]$;

d) $z = \sqrt{3} + i = \left[2;\dfrac{\pi}{6}\right]$;

e) On amplifie par le conjugué du dénominateur.
$z = \dfrac{1}{1 - i} = \dfrac{1 + i}{2} = \left[\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\pi}{4}\right]$;

f) $z = -3\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = 3\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \pi\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \pi\right)\right) = \left[3;\dfrac{5\pi}{4}\right] = \left[3;-\dfrac{3\pi}{4}\right]$.

***Ex*-11-03**: *Mettre sous la forme $a + bi$:*

a) $z = \left[5;-\dfrac{\pi}{2}\right]$;

b) $z = \left[2;\dfrac{\pi}{8}\right]$;

c) $z = [\pi;\pi - t]$;

d) $z = \dfrac{\left[2;-\frac{\pi}{4}\right]}{\left[\frac{1}{2};\frac{\pi}{4}\right]}$;

e) $z = \dfrac{\left[2;-\frac{\pi}{3}\right]^4}{\left[4;\frac{\pi}{4}\right]}$.

a) $z = \left[5;-\dfrac{\pi}{2}\right] = 5\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right) = -5i$

b) $z=\left[2;\dfrac{\pi}{8}\right]=2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)\right)=\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}$

car : $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=\sqrt{\dfrac{1}{2}\left(1+\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)}$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=\sqrt{\dfrac{1}{2}\left(1-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)}$

c) $z=[\pi;\pi-t]=\pi[\cos(\pi-t)+i\sin(\pi-t)]=-\pi\cos t+i\pi\sin t$

d) $z=\dfrac{\left[2;-\frac{\pi}{4}\right]}{\left[\frac{1}{2};\frac{\pi}{4}\right]}=\left[4;-\dfrac{\pi}{2}\right]=-4i$

e) $z=\dfrac{\left[2;-\frac{\pi}{3}\right]^4}{\left[4;\frac{\pi}{4}\right]}=\dfrac{\left[16;-\frac{4\pi}{3}\right]}{\left[4;\frac{\pi}{4}\right]}=\left[4;-\dfrac{19\pi}{12}\right]=\left[4;\dfrac{5\pi}{12}\right]$

Calcul de $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$:

$\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)=\cos\left[\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right]=+\sqrt{\dfrac{1+\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)}{2}},$

positivité du cos : $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)=\sqrt{\dfrac{1+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2}}=\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}}$

et de même, $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)=\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}}$

$\Rightarrow z=4\left[\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)\right]=\sqrt{8-4\sqrt{3}}+i\sqrt{8+4\sqrt{3}}$

Or : $8\pm4\sqrt{3}=8\pm2\sqrt{12}=(\sqrt{6}\pm\sqrt{2})^2$

ce qui finalement nous donne : $z=(\sqrt{6}-\sqrt{2})+i(\sqrt{6}+\sqrt{2})$.

Ex-11-04*: Déterminer* $\varphi\in[0,\pi]$ *pour que* $Re\left(\left[\sqrt{3};\dfrac{2}{3}\right]^3\cdot[4;\varphi]\right)=Im\left(\dfrac{[6;1+\varphi]^2}{[3;\varphi]}\right)$.

$$\mathrm{Re}\left(\left[\sqrt{3};\frac{2}{3}\right]^3\cdot[4;\varphi]\right)=\mathrm{Im}\left(\frac{[6;1+\varphi]^2}{[3;\varphi]}\right)\ \Leftrightarrow\ \mathrm{Re}\left(\left[3\sqrt{3};2\right]\cdot[4;\varphi]\right)=\mathrm{Im}\left(\frac{[36;2+2\varphi]}{[3;\varphi]}\right)$$

$$\Leftrightarrow\ \mathrm{Re}\left(\left[12\sqrt{3};2+\varphi\right]\right)=\mathrm{Im}\left([12;2+\varphi]\right)\ \Leftrightarrow\ 12\sqrt{3}\cos(2+\varphi)=12\sin(2+\varphi)$$

$$\Leftrightarrow\ \tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos(2+\varphi)-\tfrac{1}{2}\sin(2+\varphi)=0\ \Leftrightarrow\ \sin\tfrac{\pi}{3}\cos(2+\varphi)-\cos\tfrac{\pi}{3}\sin(2+\varphi)=0$$

$$\Leftrightarrow\ \sin\left(\tfrac{\pi}{3}-(2+\varphi)\right)=0\ \Leftrightarrow\ \tfrac{\pi}{3}-(2+\varphi)=0+k\pi\ \Leftrightarrow\ \varphi=\tfrac{\pi}{3}-2+k\pi$$

avec la condition $\varphi\in[0,\pi]$, on obtient : $\varphi=\dfrac{4\pi}{3}-2.$

Ex-11-05: *Résoudre :*

a) $z - i\overline{z} = 0$ *sachant que* $|z| = 2\sqrt{2}$ *;*

b) $2iz + \overline{z} = 0$ *sachant que* $|z| = 2$ *;*

c) $z^{11} = \overline{z}$ *sachant que* $0 < \mathrm{Im} z < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ *.*

a) On pose $z = x + iy$. On a

$$0 = z - i\bar{z} = (x + iy) - i(x - iy) = (x - y) - i(x - y) \Leftrightarrow x = y.$$

De plus comme on a $8 = |z|^2 = x^2 + y^2$, on trouve finalement $x = y = \pm 2$. D'où les solutions

$$z_1 = 2 + 2i, \quad z_2 = -2 - 2i.$$

b) On pose $z = x + iy$. On a

$$0 = 2iz + \bar{z} = 2i(x + iy) + (x - iy) = (x - 2y) + i(2x - y) \Leftrightarrow x - 2y = 0 \text{ et } 2x - y = 0 \Leftrightarrow x = y = 0.$$

Ceci est en contradiction avec le fait que $|z| = 2$.
Il n'y a donc pas de solution.

c) Revenir à la forme trigonométrique.
On a $z^{11} = \overline{z}$ et $0 < \mathrm{Im} z < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; on pose $z = [r; \varphi]$ et on obtient :

$$[r^{11}; 11\varphi] = [r; -\varphi] \Leftrightarrow \begin{cases} r^{10} = 1 \\ 11\varphi = -\varphi + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r = 1 \\ \varphi = \frac{k\pi}{6} \quad k = 0, \ldots, 11 \end{cases}$$

On doit avoir : $0 < \sin\left(\dfrac{k\pi}{6}\right) < \dfrac{\sqrt{2}}{2} \qquad \Rightarrow \qquad k = 1; 5 \qquad$ d'où les solutions :

$$\begin{cases} z_1 = \left[1; \dfrac{\pi}{6}\right] = \dfrac{1}{2}(\sqrt{3} + i) \\[2ex] z_5 = \left[1; \dfrac{5\pi}{6}\right] = \dfrac{1}{2}(-\sqrt{3} + i) \end{cases}$$

Ex-11-06*:*

a) Trouver les racines cubiques de $\quad z = 1 - i\sqrt{3} \quad$ *et* $\quad z = \dfrac{1}{(1+i)^2}$ *;*

b) Calculer tous les nombres complexes $z = \dfrac{\omega}{\omega'}$ *où* ω *est une racine carrée de* $(-1+i)^3$ *et* ω' *est une racine 7-ième de* i*.*

a) Il s'agit de mettre les nombres complexes sous forme $x + iy$ puis sous forme trigonométrique puis résoudre l'équation $\omega^3 = z$.

$$z = 1 - i\sqrt{3} = \left[2; \frac{5\pi}{3}\right] = \left[2; -\frac{\pi}{3}\right] \quad \Rightarrow \quad \omega_k = \left[\sqrt[3]{2}; -\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\right], \quad k = 0, 1, 2.$$

$$z = \frac{1}{(1+i)^2} = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2} = \left[\frac{1}{2}; \frac{3\pi}{2}\right] \quad \Rightarrow \quad \omega_k = \left[\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}\right] \quad k = 0, 1, 2.$$

b) On met ces nombres complexes (numérateur et dénominateur) sous forme trigonométrique puis on calcule en utilisant les relations entre les modules et les arguments.

$$(-1+i)^3 = \left[\sqrt{2^3}; \frac{9\pi}{4}\right], \quad \omega_l = \left[2^{3/4}; \frac{9\pi}{8} + \ell\pi\right], l = 0, 1.$$

$$i = \left[1; \frac{\pi}{2}\right], \quad \omega'_k = \left[1; \frac{\pi}{14} + \frac{2k\pi}{7}\right], k = 0, 1, \ldots, 6.$$

d'où :

$$z = \left[2^{3/4}; \frac{59\pi}{56} + \left(\ell - \frac{2k}{7}\right)\pi\right] \quad \ell = 0, 1, \quad k = 0, \ldots, 6.$$

Ex-11-07*: Soit $z \in \mathbb{C}$, on définit z' par*

$$z' = z\overline{z} - (1+3i)z - 6 + 9i$$

Déterminer dans le plan complexe l'ensemble des nombres z tels que z' soit situé sur l'axe des nombres imaginaires.

Soit $z = x + iy$. En introduisant cette notation dans l'équation de départ :

$$z' = (x+iy)(x-iy) - (1+3i)(x+iy) - 6 + 9i \quad \Leftrightarrow$$

$$z' = x^2 + y^2 - x - iy - 3ix + 3y - 6 + 9i \quad \Leftrightarrow$$

$$z' = x^2 + y^2 - x + 3y - 6 + i(-3x - y + 9) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{Re}(z') &= x^2 + y^2 - x + 3y - 6 \\ \mathrm{Im}(z') &= -3x - y + 9 \end{cases}$$

Dire que z' est situé sur l'axe des imaginaires signifie que $\mathrm{Re}(z') = 0$. D'où on déduit l'équation :

$$x^2 + y^2 - x + 3y - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{34}{4} = 0$$

Il s'agit donc du cercle de centre $\Omega\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$ et de rayon $r = \sqrt{\frac{17}{2}}$.

Ex-11-08*:*

a) Déterminer l'ensemble des points du plan complexe satisfaisant

$$|z - i| = |z + 4 + 7i|.$$

b) Dans le plan complexe, on considère z_1 et z_2 tels

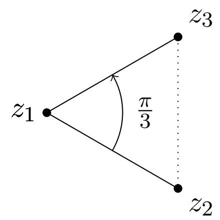
$$z_1 = 2 - 3i, \ z_2 = 8 + 3i.$$

Déterminer le point z_3 sachant que z_1, z_2, z_3 forment un triangle équilatéral d'orientation positive (c'est-à-dire que l'on parcourt les sommets z_1, z_2, z_3 dans le sens trigonométrique).

a) $|z-i| = |z+4+7i| \;\Leftrightarrow\; |z-i|^2 = |z+4+7i|^2 \;\Leftrightarrow\; (z-i)(\overline{z-i}) =$

$(z+4+7i)(\overline{z+4+7i}) \;\Leftrightarrow\; x^2+(y-1)^2 = (x+4)^2+(y+7)^2 \;\Leftrightarrow\; x+2y+8=0\,.$
C'est donc la droite d'équation $x+2y+8=0$. D'un point de vue géométrique on cherche l'ensemble des points du plan qui sont à égale distance de i et de $-4-7i$; c'est donc la médiatrice du segment qui relie ces deux points. (Normal qu'on tombe sur une équation de droite !)

b) On commence par faire une figure d'étude :



Il s'agit de faire tourner le point z_2 autour de z_1, donc on effectue une multiplication par un complexe a de module 1 et d'angle $\frac{\pi}{3}$ en prenant l'origine en z_1.

$$z_3 - z_1 = a(z_2-z_1) = 1(\cos(\tfrac{\pi}{3}) + i\sin(\tfrac{\pi}{3}))(z_2-z_1) = \left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(8+3i-2+3i)$$

$$= \left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(6+6i) = 3(1-\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})) \;\Rightarrow\; z_3 = 5-3\sqrt{3}+3\sqrt{3}i$$

Ex-11-09*:*

a) Calculer le nombre complexe obtenu en faisant tourner $z=5-i$ *d'un angle de* $-\dfrac{\pi}{2}$ *autour de l'origine ;*

b) On se donne les deux points $z_0=2+3i$ *et* $z_1=6+5i$*. Calculer le point* z_2 *connaissant les informations suivantes :*

- *la distance de* z_0 *à* z_1 *et la même que la distance de* z_0 *à* z_2
- *l'angle aigu* φ *orienté défini par* $\widehat{z_2z_0z_1}$ *est tel que* $\tan\varphi = \dfrac{4}{3}$ *;*

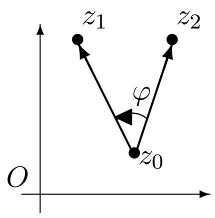
c) Soient $z_1=2+2i$ *et* $z_2=4+3i$*. Déterminer le point* z_0 *satisfaisant les conditions suivantes :*

- *La distance de* z_0 *au point* z_1 *vaut* $\sqrt{10}$
- *L'angle* $\widehat{z_2z_1z_0}$ *vaut* $-\dfrac{\pi}{4}$

a) Pour faire "tourner" un nombre, on va le multiplier par un complexe unitaire d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$, c'est-à-dire le nombre $-i$:

$$z' = z(-i) = (5-i)(-i) = -1-5i$$

b) Il s'agit de faire tourner le point z_1 autour de z_0, donc on effectue une multiplication par un complexe a de module 1 et d'angle $-\varphi$ en prenant l'origine en z_0.



On a

$$z_2 - z_0 = a(z_1 - z_0) = 1(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))(z_1 - z_0) = \left(\frac{3}{5} - i\frac{4}{5}\right)(6 + 5i - 2 - 3i)$$
$$= \left(\frac{3}{5} - i\frac{4}{5}\right)(4 + 2i) = 4 - 2i \;\Rightarrow\; z_2 = 4 - 2i + 2 + 3i = 6 + i$$

c) Il s'agit d'une similitude du plan ; le rapport d'homothétie k est donné par :

$$k = \frac{|z_0 - z_1|}{|z_2 - z_1|} \Rightarrow k = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{2}\ ;$$

l'angle de rotation vaut $-\dfrac{\pi}{4}$.

On va effectuer la similitude en prenant le point z_1 pour origine :

$$z_0 - z_1 = \left[\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4}\right](z_2 - z_1) \Rightarrow z_0 = (1 - i)z_2 + iz_1 \;\Rightarrow\; z_0 = (1 - i)(4 + 3i) + i(2 + 2i) = 5 + i.$$