Analyse A Mise à Niveau, EPFL

Série 10: Nombres complexes

***Ex*-10-01**: *Mettre sous la forme $a+ib$:*

a) $(4-i)+(2+3i)(1-i)$; *c)* i^n *n entier ;*

b) $\dfrac{1}{3-2i}$; *d)* $\dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$.

a) Utilisation des règles de calcul dans les nombres complexes.

$$(4-i)+(2+3i)(1-i)=(4-i)+[(2+3)+i(-2+3)]=(4-i)+(5+i)=9$$

b) Multiplier le dénominateur par le conjugué.

$$\frac{1}{3-2i}=\frac{3+2i}{(3-2i)(3+2i)}=\frac{3+2i}{9+4}=\frac{3}{13}+i\frac{2}{13}$$

c) Utilisation des règles de calcul dans les nombres complexes.

$$i^{4k}=1,\quad i^{4k+1}=i,\quad i^{4k+2}=-1,\quad i^{4k+3}=-i\quad k\in\mathbb{N}$$

d) Réfléchir à une simplification possible avant de se lancer dans les calculs.

$$\begin{aligned}\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7} &= \frac{(1+i)^7}{(1-i)^7}(1+i)^2=\left[\frac{(1+i)}{(1-i)}\right]^7(1+i)^2\\ &= \left[\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}\right]^7(1+i)^2=i^7(2i)=2\,.\end{aligned}$$

***Ex*-10-02**:

a) Résoudre en complétant le membre de gauche pour former un carré parfait :

$$z^2+2(1+i)z-\frac{5}{1+2i}=0$$

b) Résoudre en devinant une solution : $z^3+9z-10=0$.

a) On observe l'expression

$$z^2+2(1+i)z-\frac{5}{1+2i}=0\,,$$

et on complète les 2 premiers termes du membre de gauche

pour former un carré parfait ce qui donne :

$$z^2+2(1+i)z+(1+i)^2-\frac{5(1-2i)}{5}-(1+i)^2=0$$

qui s'écrit : $[z+(1+i)]^2-(1-2i)-2i=0 \quad\Leftrightarrow\quad [z+(1+i)]^2=1$ donc :

$$z+(1+i)=\pm 1\quad\Rightarrow\quad z=-i\quad\text{ou}\quad z=-2-i\,.$$

b) On devine la première solution.
$z^3 + 9z - 10 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z-1)(z^2+z+10) = 0 \quad \Rightarrow$

$$(z-1)\left(z + \frac{1+i\sqrt{39}}{2}\right)\left(z + \frac{1-i\sqrt{39}}{2}\right) = 0$$

d'où les solutions : $z_1 = 1$, $z_{2,3} = -\dfrac{1 \pm i\sqrt{39}}{2}$.

***Ex-*10-03**: *Montrer que :*

a) Si $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $(y \neq 0)$, il existe deux nombres réels T et N tels que :

$$z^2 - Tz + N = 0$$

- *Donner une interprétation de ces nombres.*
- *Résoudre cette équation en prenant les valeurs de $T = 1$ et $N = 2$;*

b) $|z| < 1$ implique $\left|(1-i)z^3 - iz\right| < \dfrac{5}{2}$.

---

a) Exprimer T et N en fonction de grandeurs associées au nombre complexe z .
i) On écrit :

$$(x+iy)^2 - T(x+iy) + N = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 - T \cdot x + N = 0 & (1) \\ 2xy - T \cdot y = 0 & (2) \end{cases}$$

$z \in \mathbb{C}$ si $y \neq 0$, de (2) on tire $T = 2x = 2\mathrm{Re}(z)$: 2 fois la partie réelle de z.

La valeur de T dans (1) nous donne : $x^2 - y^2 - 2x^2 + N = 0 \quad \Rightarrow$

$$N = x^2 + y^2 = |z|^2 \ \text{ : module de } z \text{ au carré}$$

Si $y = 0$, on a une équation réelle (classique).

ii) On peut résoudre l'équation donnée directement ou utiliser le résultat du point i)

$$T = 1 \ \Rightarrow \ x = \frac{1}{2}, \quad N = x^2 + y^2 = 2 \ \Rightarrow \ y = \pm\frac{\sqrt{7}}{2}$$

Les racines sont donc conjuguées et nous avons : $z_{1,2} = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{7}}{2} i$;

b) Utiliser les propriétés des modules des nombres complexes pour majorer cette expression.
Soit z tel que $|z| < 1$, on a alors :

$\left|(1-i)z^3 - iz\right| = |z| \ \left|(1-i)z^2 - i\right|$, on utilise l'inégalité triangulaire :

si $u, v \in \mathbb{C}$ alors $|u + v| \leq |u| + |v|$ et on obtient :

$\left|(1-i)z^2 - i\right| \leq |(1-i)z^2| + |-i| \quad$ d'où :

$$\left|(1-i)z^3 - iz\right| = |z| \ \left|(1-i)z^2 - i\right| \leq |z| \ \left(|1-i| \ |z|^2 + |1|\right) = A$$

Puisque $|z| < 1$ on a : $A < 1 \cdot (|1+i| + 1) = 1 \cdot (\sqrt{2} + 1) < \dfrac{3}{2} + 1 = \dfrac{5}{2}$.

Ex-10-04*: On considère l'équation :* $|z|^2 = \left(-\dfrac{3}{4} + bi\right) \cdot \left(\dfrac{z}{1-z}\right)$, $b \in \mathbb{R}^+$

Déterminer b *pour que cette équation ne possède qu'une solution* $(\neq 0)$ *;*

Quelle est cette solution ?

Décomposer le système en parties réelle et imaginaire.
Simplifiez premièrement l'équation ! On a :

$$|z|^2 = z\overline{z} = \left(-\frac{3}{4} + bi\right) \cdot \left(\frac{z}{1-z}\right), \quad b \in \mathbb{R}^+$$

Pour $z \neq 0$, on a alors :

$$(1-z)\overline{z} = \left(-\frac{3}{4} + bi\right).$$

On pose alors $z = x + iy$ et on obtient :

$$x - (x^2 + y^2) - iy = -\frac{3}{4} + ib \iff$$

$$\begin{cases} x - (x^2 + y^2) = -\frac{3}{4} \\ y = -b \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - x + b^2 - \frac{3}{4} = 0 \\ y = -b \end{cases}.$$

La première équation nous donne, avec la condition imposée : discriminant nul,

$\Delta = 0 = 1 + 3 - 4b^2 \quad \Rightarrow \quad b = 1$ avec la condition de positivité.

D'où : $x = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad z = \dfrac{1}{2} - i$.

Ex-10-05*: Trouver parmi les solutions de l'équation :* $(z + \overline{z})z^3 + 4(\overline{z}^2 - z^2) = 0$
celle(s) satisfaisant $2Rez > |z|$.

Mise en facteurs puis passer à la forme cartésienne.
L'équation : $(z + \overline{z})z^3 + 4(\overline{z}^2 - z^2) = 0 \iff (z + \overline{z})z^3 + 4(\overline{z} - z)(\overline{z} + z) = 0$

$\iff (\overline{z} + z)(z^3 + 4(\overline{z} - z)) = 0$

- $\overline{z} + z = 0 \Rightarrow x - iy + x + iy = 0 \Rightarrow 2x = 2\mathrm{Re}(z) = 0$: solution rejetée par la condition $2\mathrm{Re}z > |z|$ imposée.
- $z^3 + 4(\overline{z} - z) = 0 \iff (x + iy)^3 + 4(-2iy) = 0 \iff \begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 0 \\ 3x^2y - y^3 = 8y \end{cases}$

La solution $(x; y) = (0; 0)$ ne satisfait pas non plus la condition.

$$\begin{cases} x^2 - 3y^2 = 0 \\ 3x^2 - y^2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 3y^2 \\ 3(3y^2) - y^2 = 8 \end{cases} \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$$

Les deux solutions sont alors : $z_1 = \sqrt{3} + i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$ car $x > 0$.

Ex-10-06*: Donner sous la forme algébrique (ou cartésienne) les racines carrées des nombres complexes suivants :*

a) $z = 9i$;

b) $z = 5 - 12i$;

c) $z = \dfrac{1}{1-i} + \dfrac{1}{i}$.

Utiliser la définition de la racine carré : $\omega = \alpha + i\beta$ est une racine carré de $z = a + ib$ si et seulement si $\omega^2 = z$. Par conséquent on a

$$a + ib = (\alpha + i\beta)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = a \\ 2\alpha\beta = b\,. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = a \\ \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \operatorname{sgn}(\alpha\beta) = \operatorname{sgn}(b) \end{cases}$$

a) Cherchons donc $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$z = 0 + 9i = (\alpha + i\beta)^2 = \alpha^2 - \beta^2 + i2\alpha\beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = 0 \\ \alpha^2 + \beta^2 = |z| = 9 \\ \operatorname{sgn}(\alpha\beta) = +1 \end{cases} .$$

Alors $\alpha^2 = \beta^2$, $2\alpha^2 = 9$ et α et β sont de même signe :

$$\alpha = \beta = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

et les deux solutions sont

$$z_{1,2} = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2}(1 + i)\,.$$

b) Cherchons donc $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$z = 5 - 12i = (\alpha + i\beta)^2 = \alpha^2 - \beta^2 + i2\alpha\beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = 5 \\ \alpha^2 + \beta^2 = |z| = \sqrt{169} = 13 \\ \operatorname{sgn}(\alpha\beta) = -1 \end{cases} .$$

Alors, par addition et soustraction, $\alpha^2 = 9$, $\beta^2 = 4$ et α et β sont de signe contraire.

$$z_{1,2} = \pm\,(3 - 2i)\ .$$

c) Mettons tout d'abord z sous forme algébrique (amplification par les conjugués) :

$$z = \frac{1}{1-i} + \frac{1}{i} = \frac{1+i}{2} + \frac{-i}{1} = \frac{1-i}{2}\,.$$

Cherchons donc $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$z = \frac{1}{2} - i\frac{1}{2} = (\alpha + i\beta)^2 = \alpha^2 - \beta^2 + i2\alpha\beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = \frac{1}{2} \\ \alpha^2 + \beta^2 = |z| = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sgn}(\alpha\beta) = -1 \end{cases} .$$

Alors, par addition et soustraction, $\alpha^2 = \frac{\sqrt{2}+1}{4}$, $\beta^2 = \frac{\sqrt{2}-1}{4}$ et α et β sont de signe contraire. Enfin,

$$z_{1,2} = \pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{\sqrt{2}+1} - i\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)\,.$$