EPFL

**Enseignants: Dubuis, Favi, Friedli**
**Analyse A - MAN**
**24 juin 2024**
**Durée : 150 minutes**

1

# Robin des Bois

SCIPER : **999999**

**Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 13 questions et 16 pages, les dernières pouvant être vides. Le total est de 40 points. Ne pas dégrafer.**

- Posez votre carte d'étudiant sur la table et vérifiez votre nom et votre numéro SCIPER sur la première page.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  les points indiqués si la réponse est correcte,
  $0$ point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  $0$ point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, les enseignant·es se réservent le droit de l'annuler.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons sont à rendre mais ils ne seront pas corrigés.

| Respectez les consignes suivantes \| Observe this guidelines \| Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien | | |
|---|---|---|
| choisir une réponse \| select an answer<br>Antwort auswählen | ne PAS choisir une réponse \| NOT select an answer<br>NICHT Antwort auswählen | Corriger une réponse \| Correct an answer<br>Antwort korrigieren |

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

# Quelques formules de trigonométrie

**Formules d'addition :**

$$\sin(x+y) = \sin x\, \cos y + \cos x\, \sin y \qquad \cos(x+y) = \cos x\, \cos y - \sin x\, \sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\, \tan y}$$

**Formules de bissection :**

$$\sin^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{2} \qquad \cos^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1+\cos x}{2} \qquad \tan^2(\tfrac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

**Formules de transformation produit-somme :**

$$\cos(x)\cdot\cos(y) = \frac{1}{2}[\,\cos(x+y) + \cos(x-y)\,]$$

$$\sin(x)\cdot\sin(y) = -\frac{1}{2}[\,\cos(x+y) - \cos(x-y)\,]$$

$$\sin(x)\cdot\cos(y) = \frac{1}{2}[\,\sin(x+y) + \sin(x-y)\,]$$

**Formules de transformation somme-produit :**

$$\cos x + \cos y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \cos x - \cos y = -2\sin(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin(\tfrac{x+y}{2})\cos(\tfrac{x-y}{2}) \qquad \sin x - \sin y = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})$$

**Expressions des fonctions trigonométriques en fonction de $\tan(\frac{x}{2})$ :**

$$\sin x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \cos x = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \qquad \tan x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1-\tan^2(\frac{x}{2})}$$

## Première partie, questions à choix unique

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

**Question 1** (3 points)
L'unique solution $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ de l'équation

$$\cos(2x - \tfrac{\pi}{4}) + \sqrt{3}\sin(\tfrac{\pi}{4} - 2x) = 1$$

est

- [x] $x = \dfrac{-5\pi}{24}$
- [ ] $x = \dfrac{-\pi}{12}$
- [ ] $x = \dfrac{-\pi}{24}$
- [ ] $x = \dfrac{-7\pi}{24}$
- [ ] $x = \dfrac{-7\pi}{12}$
- [ ] $x = \dfrac{-\pi}{4}$
- [ ] $x = \dfrac{-5\pi}{12}$
- [ ] $x = \dfrac{-3\pi}{8}$

*Correction : L'équation est équivalente à $\cos(2x + \frac{\pi}{12}) = \frac{1}{2}$ dont les solutions sont données par $x = \frac{\pi}{8} + k\pi$ ou $x = \frac{-5\pi}{24} + k\pi$. La solution dans l'intervalle demandé est donc $-5\pi/24$.*

**Question 2** (3 points)
Soit $S$ l'ensemble solution de l'inéquation

$$\tan(2x) \leq \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad x \in [0, \pi]\,.$$

Alors $S$ est

- [ ] une union de 6 intervalles disjoints.
- [ ] un intervalle.
- [ ] une union de 2 intervalles disjoints.
- [ ] une union de 5 intervalles disjoints.
- [ ] une union de 4 intervalles disjoints.
- [x] une union de 3 intervalles disjoints.

*Correction : Les solutions de $\tan(2x) \leq \sqrt{3}/3$ sont $-\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$.*
$S = [0, \pi/12] \cup ]\pi/4, 7\pi/12] \cup ]3\pi/4, \pi]$.

**Question 3** (2 points)
Le nombre $\alpha = \arctan(-\frac{1}{2}) + \arctan(-\frac{1}{3})$ est égal à

- [ ] $\frac{\pi}{4}$
- [ ] $\frac{5\pi}{4}$
- [x] $-\frac{\pi}{4}$
- [ ] $\frac{3\pi}{4}$

*Correction : On utilise la formule $\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$ avec $a = \arctan(-\frac{1}{2})$ et $b = \arctan(-\frac{1}{3})$ on trouve $\tan(\alpha) = -1$. Comme on localise $\alpha \in ]-\pi, 0[$ il en résulte que $\alpha = -\frac{\pi}{4}$.*

**Question 4** (3 points)
Soit $m > 0$ un paramètre. Donner l'ensemble solution $S \subset \mathbb{R}$, en fonction de $m$, de l'inéquation

$$\sqrt{(x-m)(x+m)} < \sqrt{8}m.$$

- [x] $S = ]-3m, -m] \cup [m, 3m[$
- [ ] $S = ]-3m, 3m[$
- [ ] $S = ]-\sqrt{3}m, -m] \cup [m, \sqrt{3}m[$
- [ ] $S = [m, 3m[$

*Correction : Domaine de définition: le membre de gauche est défini $\iff x \notin ]-m, m[$.*
*Donc $D_{def} = ]-\infty, -m] \cup [m, +\infty[$.*
*Sous la condition $x \in D_{def}$ on peut élever au carré l'inéquation (car $m > 0$ comme donné dans l'énoncé) qui devient:*

$$(x-m)(x+m) < 8m^2 \iff x^2 - m^2 < 8m^2 \iff x^2 - 9m^2 < 0.$$

*Or* $x^2 - 9m^2 = (x - 3m)(x + 3m)$ *et donc*

$$S = ]-3m, 3m[ \cap D_{def} = ]-3m, -m] \cup [m, 3m[,$$

**Question 5** (3 points)
L'ensemble solution $S$ de l'inéquation

$$|1 - x| \leq 2 - |x| \qquad x \in \mathbb{R}\,,$$

est

■ $S = [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ ☐ $S = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ☐ $S = [0, \frac{4}{5}]$ ☐ $S = [-1, \frac{3}{2}]$

*Correction : On doit résoudre (a) :* $1 - x \leq 2 - |x| \iff |x| \leq 1 + x$ *et* $(b) 1 - x \geq -2 + |x| \iff |x| \leq 3 - x$*. On applique à nouveau le théorème pour résoudre (a.1)* $x \leq 1 + x$ *et (a.2)* $x \geq -1 - x$ *et (b.1)* $x \leq 3 - x$ *et (b.2)* $x \geq x - 3$*. On doit donc intersecter* $\mathbb{R} \cap [-\frac{1}{2}, +\infty[ \cap ]-\infty, \frac{3}{2}] \cap \mathbb{R} = [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$.

**Question 6** (2 points)
On considère l'affirmation $A$: “pour tout réel $x > 0$, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{m} \leq x$”.
La négation de $A$ est

■ “il existe $x > 0$ tel que $x < \frac{1}{m}$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$”
☐ “il n'existe aucun $x \leq 0$ tel que $x \leq \frac{1}{m}$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$”
☐ “il existe $x \leq 0$ tel que $x < \frac{1}{m}$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$”
☐ “il existe $x > 0$ tel que $x \geq \frac{1}{m}$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$”

*Correction : On applique les règles de négations des opérateurs logiques "il existe" et "pour tout".*

**Question 7** (2 points)
Soit $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \in \mathbb{C}$. Alors $z^8$ est égal à

■ $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ☐ $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ ☐ $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ☐ $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
☐ $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ☐ $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ ☐ $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ ☐ $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$

*Correction : Sous forme polaire, on a* $z = [1, \frac{-\pi}{6}]$ *d'où* $z^8 = [1, -\frac{4\pi}{3}]$.

**Question 8** (2 points)
Soit $a > 0$. Alors pour tout $x > 0$, l'expression $\log_{\frac{1}{a}}(x)$ est égale à

☐ $-\log_a(\frac{1}{x})$ ☐ $\log_a(-\frac{1}{x})$ ☐ $\log_{\frac{1}{a}}(\frac{1}{x})$ ■ $\log_a(\frac{1}{x})$

*Correction : On a* $\log_{1/a}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(1/a)} = -\frac{\ln(x)}{\ln(a)} = \frac{\ln(1/x)}{\ln(a)} = \log_a(1/x)$.

**Question 9** (3 points)
Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$, $m \neq 1$, le sommet de la parabole d'équation

$$P(x) = (1 - m)x^2 + 2mx + 1$$

est-il strictement à gauche de la droite verticale d'équation $x = -1$ ?

☐ $m \in \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$. ☐ $m \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$.
■ $m \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$. ☐ $m \in ]-1, 1[$.
☐ $m \in ]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$. ☐ $m \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[ \cup ]1, +\infty[$.

*Correction : L'abcisse du sommet est en* $x_S = \frac{-2m}{2(1-m)} = \frac{m}{m-1}$*. On résout* $\frac{m}{m-1} < -1 \iff$

$\frac{2m-1}{m-1} < 0 \iff m \in ]1/2, 1[.$

## Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées à la correction.

**Question 10:** *Cette question est notée sur 3 points.*

■0 □1 □2 □3

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$S_n = 2^3 + 4^3 + 6^3 + 8^3 + ... + (2n)^3.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$S_n = 2n^2(n+1)^2.$$

**Solution**

On montre le résultat par récurrence :

- Etape 1 : initialisation pour $n = 1$.

  On a $S_1 = (2 \cdot 1)^3 = 8 = 2 \cdot 1^2(1+1)^2$. Donc le résultat est vrai pour $n = 1$

- Etape 2 : pas de récurrence

  On suppose que le résultat est vrai pour $n \in \mathbb{N}^*$ et on montre qu'il est vrai également pour $n + 1$.

  On doit donc montrer que

  $$S_{n+1} = 2(n+1)^2((n+1)+1)^2 = 2(n+1)^2(n+2)^2$$

  sachant que $S_n = 2n^2(n+1)^2$.

  On calcule $S_{n+1}$ :

$$S_{n+1} = 2^3 + 4^3 + 6^3 + ... + (2n^3) + (2(n+1))^3 \underbrace{=}_{def. S_n} S_n + (2(n+1))^3$$

$$\underbrace{=}_{hyp.recurrence} 2n^2(n+1)^2 + 8(n+1)^3 = 2(n+1)^2(n^2 + 4(n+1)) = 2(n+1)^2(n+2)^2.$$

**Question 11:** *Cette question est notée sur 5 points.*

0 1 2 3 4 5

Soit $P(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$.

(a) Calculer $P(i)$.

(b) Décomposer $P$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[x]$.

(c) Décomposer $P$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[x]$.

**Solution**

(a) On a $P(i) = 1 - i - 2 + i + 1 = 0$.

(b) On remarque que $P(i) = i^4 + i^3 + 2i^2 + i + 1 = 1 - i - 2 + i + 1 = 0$ et comme $P$ est à coefficients réels on a que $P(-i) = 0$ (un calcul simple le montre aussi). Donc $P$ est divisible par $(x-i)(x+i) = x^2 + 1$.

En effectuant la division polynomiale (ou double Hörner) on trouve $P(x) = (x^2+1)(x^2+x+1)$.

*Alternative :* en regroupant les termes on a

$$P(x) = (x^4 + 2x^2 + 1) + x^3 + x = (x^2+1)^2 + x(x^2+1) = (x^2+1)(x^2+1+x).$$

(c) Ci-dessus on a trouvé que $i$ et $-i$ sont racines de $P$. Les deux autres racines complexes se trouvent grâce au discriminant: $x^2 + x + 1 = (x - \frac{-1+\sqrt{3}i}{2})(x - \frac{-1-\sqrt{3}i}{2})$. Le polynôme se factorise alors comme

$$P(x) = (x-i)(x+i)(x - \frac{-1+\sqrt{3}i}{2})(x - \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}).$$

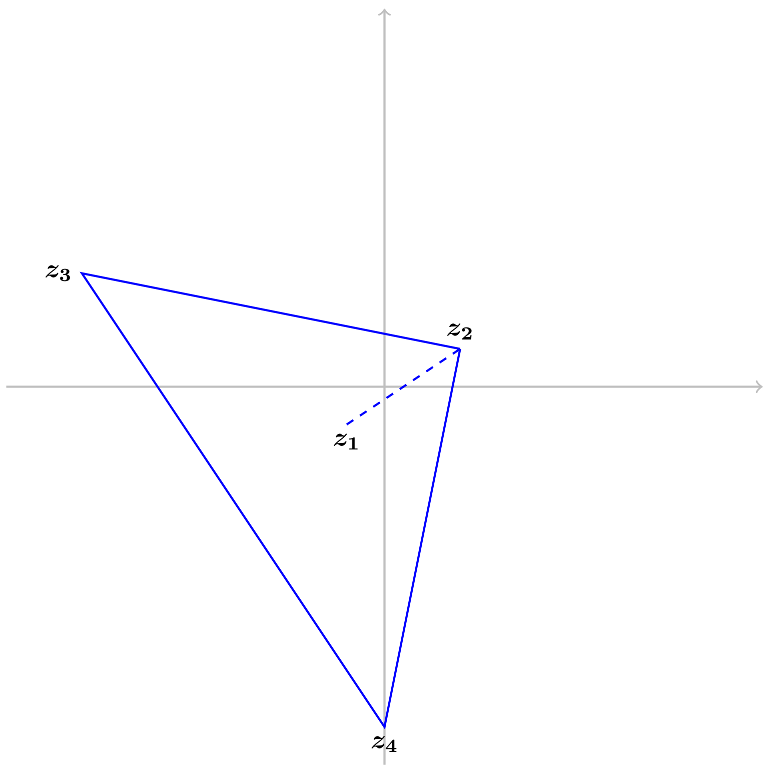
**Question 12:** *Cette question est notée sur 4 points.*

■0 □1 □2 □3 □4

Dans le plan complexe, on donne $z_1 = -1 - i$ et $z_2 = 2 + i$. Calculer $z_3$ et $z_4$ pour que le triangle $z_2z_3z_4$ soit tel que

- $|z_4 - z_2| = |z_3 - z_2| = 2\sqrt{2}|z_1 - z_2|$,
- l'angle au sommet $z_2$ est droit,
- la droite passant par $z_1$ et $z_2$ est la bissectrice de l'angle au sommet $z_2$,
- $\mathrm{Im}(z_4) < 0$.

Les points $z_3$ et $z_4$ doivent être donnés sous forme cartésienne, et ne doivent pas contenir de fonctions trigonométriques.
**Solution** On représente la situation ci-dessous.




Pour construire $z_3$ on fait tourner le segment $z_1z_2$ d'un angle $-\frac{\pi}{4}$ autour de $z_2$ et on multiplie sa longueur par $2\sqrt{2}$. Pour $z_4$, on fait de même en faisant tourner cette fois d'un angle $\frac{\pi}{4}$. On a donc

$$z_3 - z_2 = [2\sqrt{2}, -\pi/4] \cdot (z_1 - z_2) \text{ et } z_4 - z_2 = [2\sqrt{2}, \pi/4] \cdot (z_1 - z_2)$$
$$\iff z_3 = [2\sqrt{2}, -\pi/4] \cdot (z_1 - z_2) + z_2 \text{ et } z_4 = [2\sqrt{2}, \pi/4] \cdot (z_1 - z_2) + z_2$$

On calcule alors

$$\begin{aligned} z_3 = 2\sqrt{2}\left(\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4)\right) \cdot (-3 - 2i) + 2 + i &= \left(2\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{2}i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(-3 - 2i) + 2 + i \\ &= (2 - 2i) \cdot (-3 - 2i) + 2 + i \\ &= -8 + 3i \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
z_4 = 2\sqrt{2}\left(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)\right)\cdot(-3-2i)+2+i &= \left(2\sqrt{2}\frac{2\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2}i\frac{2\sqrt{2}}{2}\right)(-3-2i)+2+i \\
&= (2+2i)\cdot(-3-2i)+2+i \\
&= -9i
\end{aligned}
$$

*Alternative :* il est également possible de construire un autre triangle satisfaisant les conditions demandées en appliquant une symétrie centrale de centre $z_2$ au triangle $z_2z_3z_4$ construit ci-dessus.

**Question 13:** *Cette question est notée sur 5 points.*

■0 □1 □2 □3 □4 □5

Résoudre l'inéquation suivante par rapport à $x \in \mathbb{R}$ :

$$e^{-3\frac{x}{2}} - e^{-2\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} \leq \ln(e^3)e^{-\frac{x}{2}}.$$

**Solution**

En utilisant que $\ln(e^3) = 3\ln(e) = 3$, on récrit l'inéquation comme

$$e^{-3\frac{x}{2}} - e^{-2\frac{x}{2}} - 2e^{-\frac{x}{2}} \leq 0.$$

On pose à présent $t = e^{-x/2} > 0$ et on doit résoudre

$$t^3 - t^2 - 2t \leq 0 \text{ et } t > 0 \iff t(t+1)(t-2) \leq 0 \text{ et } t > 0$$
$$\iff (t+1)(t-2) \leq 0 \text{ et } t > 0 \iff t \in ]0, 2].$$

D'où on a

$$0 < e^{-x/2} \leq 2 \iff \frac{-x}{2} \leq \ln(2) \iff x \geq -2\ln(2).$$

D'où l'ensemble solution est

$$S = [-2\ln(2), +\infty[.$$